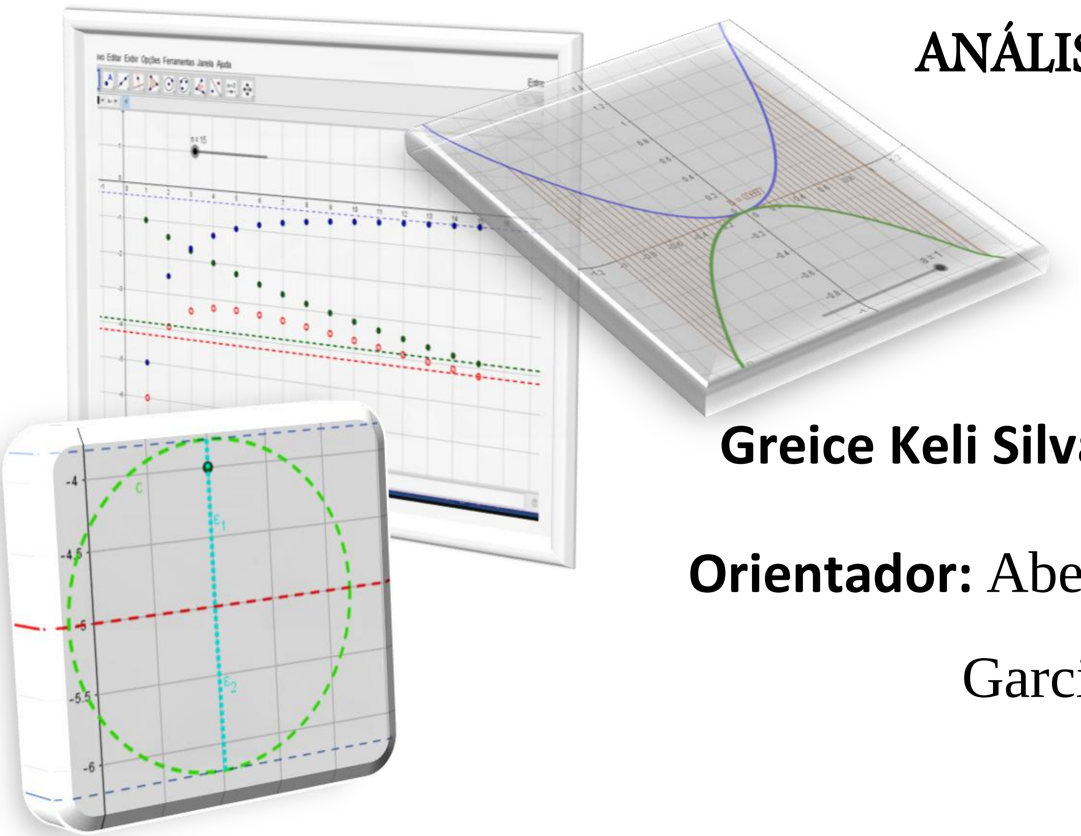
Caderno de Sequências Didáticas

Orientações para o professor

O ESTUDO DE SEQUÊNCIAS E LIMITES COM O GEOGEBRA: UMA PONTE ENTRE OS PENSAMENTOS INTUITIVO E MATEMÁTICO EM ANÁLISE REAL



Greice Keli Silva Lacerda

Orientador: Abel Rodolfo Garcia Lozano

PPGEC
Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências
UNIGRANRIO

UNIVERSIDADE UNIGRANRIO

GREICE KELI SILVA LACERDA

ABEL RODOLFO GARCIA LOZANO

CADERNO DE ATIVIDADES DIDÁTICAS

O Estudo de Sequências e Limites com o Auxílio do GeoGebra: Uma Ponte entre os Pensamentos Intuitivo e Matemático em Análise Real

Duque de Caxias, RJ
2018

CATALOGAÇÃO NA FONTE/BIBLIOTECA - UNIGRANRIO

L131e Lacerda, Greice Keli Silva.

O estudo de sequências e limites com o auxílio do GeoGebra em análise real na formação docente / Greice Keli Silva Lacerda. – 2018.
85 f. : il. ; 30 cm.

Caderno de Atividades (mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básica) – Universidade do Grande Rio "Prof. José de Souza Herdy", Escola de Educação, Ciências, Letras, Artes e Humanidades, 2018.
"Orientador Prof. Abel Rodolfo Garcia Lozano".
Bibliografia: f. 92-95.

ISBN: 978-85-9549-057-4 - Licença de autoria de Material Didático

1. Educação. 2. Análise real. 3. Engenharia didática. 4. Sequências (Matemática). I. Garcia Lozano, Abel Rodolfo. II. Universidade do Grande Rio "Prof. José de Souza Herdy". III. Título.

Este trabalho foi produzido no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências da UNIGRANRIO, no curso de Mestrado Profissional em Ensino das Ciências na Educação Básica e foi Avaliado pela Banca Examinadora:

Prof.ª Dr.ª Clícia Valladares Peixoto Friedmann – FFP/UERJ

Prof.ª Dr.ª Chang Kuo Rodrigues – UNIGRANRIO

Prof. Dr. Ângelo Santos Siqueira – UNIGRANRIO

O ESTUDO DE SEQUÊNCIAS E LIMITES COM O GEOGEBRA: UMA PONTE ENTRE OS PENSAMENTOS INTUITIVO E MATEMÁTICO EM ANÁLISE REAL

SUMÁRIO

O ESTUDO DE SEQUÊNCIAS E LIMITES COM O GEOGEBRA: UMA PONTE ENTRE OS PENSAMENTOS INTUITIVO E MATEMÁTICO EM ANÁLISE REAL

APRESENTAÇÃO

Este produto educacional tem a intenção de promover a articulação entre os “saberes curriculares” (Tardif, 2014, p.33) e os “saberes experienciais” (Tardif, 2014, p.33) no ensino dos conteúdos de Sequência de números reais, Limites de uma sequência de números reais, Subsequência de número reais, Limites infinitos, oferecidos na ementa da disciplina de Análise Real ou Análise na Reta ministrada em Cursos de Licenciatura Plena em Matemática e de Bacharelados em Matemática.

A importância do estudo da Análise Real na licenciatura faz-se presente, segundo Brito (2010), na necessidade de desenvolver no matemático a prática de demonstrar, enunciar e provar teoremas e resultados, familiarizando-o com os conceitos escritos em linguagem matemática formal e proporcionando-lhe: maior segurança na explicação de conhecimentos básicos, compreensão sólida e profunda da fundamentação teóricas de conceitos matemáticos e desenvolvimento de seu pensamento matemático.

O objetivo deste trabalho é fornecer aos professores dos cursos de graduação e aos alunos, licenciandos de Matemática, uma ferramenta que possa favorecer a construção do conhecimento matemático através da articulação do pensamento intuitivo, composto por ideias intuitivas, visualizações e manipulações do software Geogebra, que busquem acessar conhecimentos previamente adquiridos, e o pensamento matemático, que trata-se dos conhecimentos matemático formais, que possuem uma fundamentação teórica rigorosa e exigem manipulações algébricas para a realização de provas e demonstrações de teoremas.

A ferramenta aqui desenvolvida compõe-se de quatro sequências didáticas, que dividem o ensino dos conteúdos de Análise Real citados em várias etapas. Cada etapa foi desenvolvida de modo a facilitar a construção de conceitos através da: visualização de gráficos, utilização de exemplos, intuição, formalização de definições e manipulação algébrica para a realização de demonstrações. As descrições de cada etapa, bem como os questionamentos a serem feitos, as conexões entre cada fase, os comentários necessários à orientação do profissional que aplicará as atividades e alguns exercícios que induzem à prática das demonstrações e provas e que ajudam a avaliar da aprendizagem encontram-se nas seções denominadas de aula 1, 2, 3 e 4.

- **Público-Alvo:**

Alunos inscritos na disciplina de Análise Real de um curso de Licenciatura ou Bacharelado em Matemática. Ou qualquer pessoa que esteja estudando esses conceitos.

- **Tempo Estimado:**

Todas as seções foram elaboradas para terem a duração de duas aulas de 50 minutos cada.

- **Local:**

Sala de aula (com o auxílio de celulares com o software Geogebra instalado) ou, mais recomendado, laboratório de informática da instituição (com computadores que possuam o software instalado).

- **Material utilizado:**

Software Geogebra instalado no celular ou computador, acesso à internet, quadro branco, marcador para quadro branco, livros para pesquisa e folhas impressas com as atividades propostas.

- **Organização da turma:**

A proposta lançada é para o desenvolvimento de atividades individuais, pois possui a intensão de fazer com que o aluno se utilize de sua intuição e de conceitos previamente adquiridos na análise de gráfico e na busca, construção e solução de problemas.

AULA 1 – SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

- **Objetivo Geral:**

  Compreender a definição de sequência de números reais, partindo de ideias intuitivas sobre o assunto e chegando a definição formal de sequência.

- **Conteúdo:**

  Construção intuitiva do conceito de sequência números reais e de sequência limitada e a formalização deste conceito em linguagem matemática.

- **Objetivos específicos:**

a) Construir com o auxílio do software Geogebra a representação de um conjunto A de números naturais.
b) Representar no software Geogebra o conjunto dos valores de uma sequência de números reais determinados através de seu temos geral x_n.
c) Descrever, intuitivamente, sequência de números reais após analisar as representações feitas no software Geogebra.
d) Definir formalmente sequência de números reais.
e) Descrever, intuitivamente, sequência limitada.
f) Definir formalmente sequência limitada.
g) Demonstrar, através de manipulações algébricas, as afirmações feitas sobre sequência de números reais.

Desenvolvimento

1ª etapa: Iniciando esta etapa, solicite que o aluno instale no celular o software Geogebra. Caso o software já esteja instalado ou a turma esteja no laboratório de informática. Solicite que os alunos:

i) Abram o software e que construa um controle deslizante com as características descritas no "**Pequeno Manual de Construções no Geogebra**" presente no final deste trabalho.

ii) A seguir, construam no software a representação do conjunto A de números naturais digitando na entrada do programa o seguinte comando:

$$A = Sequência[\underset{\text{contador}}{i}, \underset{\text{variável}}{i}, \underset{\text{Valor inicial do conjunto}}{1}, \underset{\text{Valor final do conjunto}}{n}]$$

iii) Movimentem o controle deslizante, observem o conjunto gerado e descrevam o que ocorre.

Conexão entre as etapas: Nesta primeira etapa propõem-se a apresentação do software Geogebra e de suas ferramentas, orientando os alunos nas construções necessárias ao desenvolvimento das atividades. A próxima etapa propõe a construção de uma representação gráfica de uma sequência de números reais, auxiliando na visualização, na descrição intuitiva e na definição do conceito a ser estudado.

2ª etapa: Nesta etapa, os alunos deverão construir uma representação gráfica da sequência de números reais que será determinada pelo termo geral $x_n = \frac{1}{n}$.

Após a construção do controle deslizante e da representação do conjunto A de números naturais. Peça que os alunos:

iv) Movimentem o controle deslizante para a posição n = 1 e digitem na entrada do programa o seguinte comando:

$$x\_n = Sequência\left[\underbrace{\left(A,\frac{1}{A}\right)}_{\text{Pares ordenados (pontos)}}, \underset{\text{variável}}{A}, \underset{\text{Valor inicial do conjunto}}{1}, \underset{\text{Valor final do conjunto}}{n}\right]$$

v) Movimentem o controle deslizante, observem o gráfico gerado e descrevam o comportamento da sequência.

vi) Faça os seguintes questionamentos:

a) Intuitivamente, como podemos descrever o gráfico gerado?

Comentário: O objetivo desta questão é fazer com que o aluno perceba e descreva intuitivamente a ideia de sequência de números reais, ou seja, que ele perceba a função entre o conjunto A dos números naturais e o conjunto dos números reais $\left\{x: x = \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$.

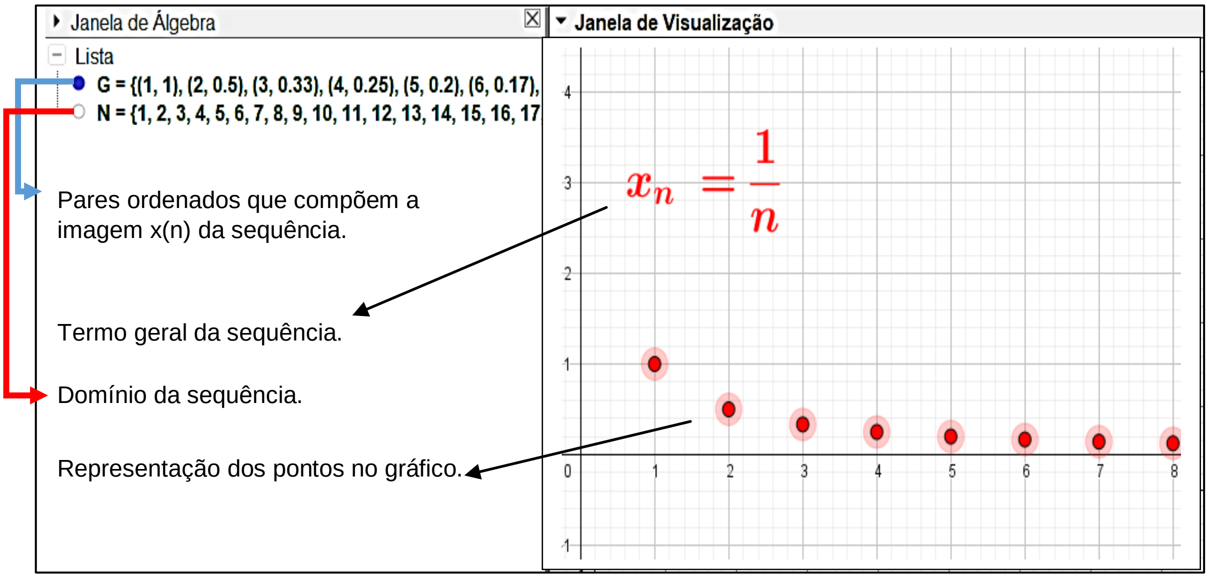
b) Defina sequência de números reais.

Definição: uma sequência de números reais é, por definição, uma função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, cujo domínio pertence ao conjunto dos números naturais e cuja imagem x(n) está contida no conjunto dos números reais.

Comentário: Este questionamento deve incentivar a busca pela formalização da ideia de sequência gerada anteriormente. Espera-se que o aluno busque a definição de sequência de números reais no livro adotado ou na internet, fazendo uma correlação com as manipulações no software e compreendendo que uma sequência de números reais é uma função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto dos números naturais e a imagem pertence ao conjunto dos números reais.

c) Determine os 10 primeiros termos da sequência $x_n = \frac{1}{n}$.

<u>**Comentário:**</u> Aqui, o aluno deverá compreender como são determinados cada termo da sequência e como representar o conjunto gerado por estes termos. Devemos chamar a atenção para o posicionamento e valores. Os alunos podem representar os termos da sequência de duas formas:



Podemos ver representados na figura: o domínio Dom (x), a imagem x(n) e o conjunto de valores dos seus termos.

$$Dom\ x(n) = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\ , 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, \dots\}$$

$$Pontos\ do\ Gráfico: G = \left\{\left(n, \frac{1}{n}\right) \mid n\ \in\ \mathbb{N}\right\} = \{(1, 1), (2, 0.5), (3, 0.33), \dots\}$$

$$Valores\ dos\ termos\ \ x_n = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \dots\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots\right\}$$

Conexão entre as etapas: A proposta desta etapa foi compreender a definição de sequência através da visualização e manipulação do software

Geogebra e da busca do conceito em livros ou na internet. O professor pode trabalhar ainda nesta fase com outros exemplos de sequências, por exemplo, $y_n = \frac{1}{n^2}$, $z_n = \sqrt[3]{n}$ e $p_n = \frac{n}{n^2 - 38}$. Na próxima etapa seguir-se-á um aprofundamento do conteúdo e lançar-se-á o desafio das manipulações algébricas para a prova de afirmações em relação ao assunto.

<u>3ª etapa</u>: Como os alunos já construíram a representação gráfica da sequência cujo termo gelar é $x_n = \frac{1}{n}$. Agora, vamos estudar o conceito de sequência limitada. Solicite que os alunos:

vii) Movimentem o controle deslizante para a posição n = 1 e digitem na entrada do programa o seguinte comando:

$$\textbf{Polígono}[\underbrace{\textbf{(0,0), (0,1), (3000,0), (3000,1)}}_{\text{Vértices do polígono}}]$$

viii) Alterem as características do polígono gerado para: preenchimento tracejado e cor amarelo claro (seguir os passos do "**Pequeno Manual de Construções no Geogebra**" presente no final deste trabalho), movimentem o controle deslizante e que observem o gráfico gerado.

ix) Faça os seguintes questionamentos:

d) A sequência dada apresenta algum padrão de comportamento? Justifique sua resposta.

<u>Comentário:</u> Nesta etapa, o aluno deverá perceber que todos os valores da sequência pertencem ao intervalo de]0, 1].

e) Defina sequência limitada.

<u>**Definição**</u>: Uma <u>sequência $(\boldsymbol{x_n})$ é dita limitada</u> quando existem números reais ***a*** e ***b*** tais que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

<u>**Comentário:**</u> Com o auxílio de livros ou através de pesquisas na internet, o aluno deverá definir sequência limitada, uma vez que, intuitivamente, já construiu a ideia na questão anterior.

f) Podemos afirmar que a sequência $\boldsymbol{x_n = \frac{1}{n}}$ é limitada? Justifique sua resposta.

<u>**Comentário:**</u> Nesta fase, o aluno, de posse da definição, deverá ter condições de identificar que a sequência dada é limitada, justificando a sua resposta através da citação da definição de sequência limitada, demonstrando que compreendeu este conceito.

g) Prove que a sequência $\boldsymbol{x_n = \frac{1}{n}}$ é uma sequência limitada?

<u>**Comentário:**</u> Como esta será a primeira prova com manipulação algébrica desenvolvida pelo aluno, devemos orientá-lo, despertando sua atenção para o que se pretende provar:

Sendo a sequência limitada, precisamos provar que <u>para quaisquer que sejam os valores de n</u> (lembrando que n pertence ao conjunto dos números naturais), <u>todos os valores das imagens da sequência pertencem ao intervalo de]0,1]</u>, ou seja, que existem valores reais a e b, tais que $\mathbf{a} < x_{\mathbf{n}} \leq \mathbf{b}$.

Munido da definição de sequência limitada, ele deve perceber que do fato da sequência ser limitada, segue que, $\mathrm{x_n} = \frac{1}{n} \leq 1$. E que assim sendo $\mathrm{n} \geq 1$, para qualquer que seja o valor de n natural. O que é uma proposição verdadeira para todo n pertencente ao conjunto dos números naturais. Portanto, o aluno deverá perceber que sua prova deve iniciar por esta proposição e seguir o caminho inverso do que foi descrito nestas observações.

Prova:

Seja $n \in \mathbb{N}$.

Por propriedades de $\mathbb{N}$, temos que $n \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $n \geq 1$, então, $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo, existe um número $a \in \mathbb{R}$ e existe um número $b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq x_n \leq b$■

Portanto, (x_n) é $limitada$.

x) Complementando a definição de sequência e aprofundando o assunto sobre sequência limitada, escreva no quadro (aponte no livro ou peça para que pesquisem na internet) os seguintes c

Uma sequência é:

- **crescente** – quando $x_n < x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **não-decrescente** – quando $x_n \leq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **decrescente** – quando $x_n > x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **não-crescente** – quando $x_n \geq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

As sequências crescentes, não-decrescentes, decrescentes ou não-crescentes são ditas sequências *monótonas*.

o

s:

xi) Faça os seguintes questionamentos:

h) A sequência dada é uma sequência monótona? Justifique sua resposta.

Comentário: Antes de levantar este questionamento, o professor pode fornecer aos alunos vários exemplos de sequências monótonas ou pode pedir para que eles mesmos pesquisem e formulem seus próprios exemplos. Fazendo com que sejam internalizadas as definições de sequências monótonas crescentes, não-crescente, decrescente e não-decrescentes.

Após a internalização dos conceitos e a observação do gráfico gerado, o aluno deverá ter condições de responder que a sequência dada é uma sequência monótona decrescente, afirmando que seus valores diminuem a medida que os valores de n aumentam ou justificando sua resposta com a citação da definição.

i) Prove que a sequência dada é uma sequência decrescente.

Comentário: Esta será a segunda prova com manipulação algébrica que o aluno deverá desenvolver. Pode ser, que ainda seja necessário, despertar sua atenção para o que se pretende provar e como fazê-lo adequadamente, faça-o perceber que:

Como a sequência é monótona decrescente, que precisa provar que: à medida que os valores de n aumentam os valores da imagem da sequência diminuem, ou seja, $\mathrm{x_n} > \mathrm{x_{n+1}}$, para todo $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$.

Após ter afirmado que a sequência é monótona decrescente, o aluno deve perceber, através da definição que se $\mathrm{x_n} > \mathrm{x_{n+1}}$, para todo $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ então $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$. Donde segue que, n < n + 1 e que como n é um número natural, $1 \leq \mathrm{n} < n + 1$. Assim, o aluno deve perceber que utilizando a proposição $n \geq 1$, para todo $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$, para iniciar e seguindo o caminho inverso do que foi descrito nestas observações, ele conseguirá realizar a prova da afirmação feita.

Prova:

Para todo $n \in \mathbb{N}, temos\ que\ n \geq 1$.

Como n é um número natural, podemos afirmar que $n + 1 > n \geq 1$.

Sendo n + 1 > n, temos que $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$.

Logo, $x_n > x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\blacksquare$.

Portanto, a sequência dada é uma sequência monótona decrescente.

Conexão entre as etapas: Nesta terceira etapa, o aluno, além de ter desenvolvido o conhecimento das definições de sequência, sequência limitada e sequência monótona, deve ter compreendido os primeiros passos para a elaboração de demonstrações com manipulações algébricas. Ou pelo menos, deve ter desenvolvido algumas ferramentas básicas para descrever com mais rigor, seus pensamentos intuitivos matemáticos sobre o assunto. O próximo passo é exercitar as demonstrações e fixar as definições aprendidas, sanando possíveis dúvidas e enriquecendo o aprendizado.

Etapa Final: Finalizando a aula sobre sequências, o professor deve oferecer aos alunos as atividades listadas abaixo, em folhas impressas (ou escrevendo-as no quadro branco). A orientação é que os alunos, organizados individualmente ou em grupo, realizem as atividades propostas, discutindo as construções no software Geogebra e as afirmações feitas. Caso desejarem, as atividades podem ser realizadas como atividades extraclasse.

xii) Proponha as seguintes atividades para os alunos:

ATIVIDADES PROPOSTAS – AULA 1

1) Seja a sequência $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, determine seus 10 primeiros termos e esboce seu gráfico com o auxílio do Geogebra.

2) Sendo $x_n = \frac{2n+3}{5n+1}$. Verifique, provando todas as afirmações feitas, se:

a) a sequência é limitada superiormente, inferiormente ou se é limitada.

b) a sequência é monótona crescente, não-crescente, decrescente, não-decrescente ou se não é monótona. Provando toda as afirmações feitas.

3) Verifique se a sequência $\mathrm{b_n} = \sqrt[5]{n}$ é uma sequência monótona limitada. Prove suas afirmações. (Dica: Utilize o Geogebra para visualizar o gráfico da sequência).

4) Sendo $\mathrm{x_n} = \frac{7n^2-15}{n^2+20}$. Verifique, provando todas as afirmações feitas, se:

a) a sequência é limitada superiormente, inferiormente ou se é limitada.

b) a sequência é monótona crescente, não-crescente, decrescente, não-decrescente ou não é monótona.

5) Dada a sequência $\mathrm{y_n} = \{10, 1, 8, 3, 6, 5, 4, 7, 2, 9, 0, 11, ...\}$. Utilize o Geogebra para visualizar a representação gráfica da sequência e a seguir, responda:

a) A sequência é limitada? Justifique sua resposta.

b) A sequência é monótona crescente, não-crescente, decrescente, não-decrescente ou não é monótona? Justifique sua resposta.

Observação: Todas as construções propostas podem ser acessadas através do CD em anexo.

AULA 2 – LIMITE DE UMA SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

- **Objetivo Geral:**
  Compreender a definição de limite de uma sequência de números reais, partindo de ideias intuitivas sobre o assunto e chegando a definição de limite e provas com manipulações algébricas.

- **Conteúdo:**
  Construção intuitiva do conceito de limite de sequência números reais e formalização deste conceito em linguagem matemática.

- **Objetivos específicos:**

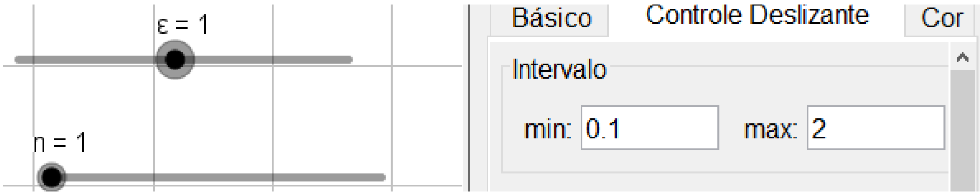
a) Construir com o auxílio do software Geogebra a representação de um conjunto A de números naturais.
b) Representar no software Geogebra o conjunto dos valores de uma sequência de números reais determinados através de seu temos geral x_n e a sua limitação através de retas auxiliares.
c) Descrever, intuitivamente, a ideia de limite de uma sequência de números reais após analisar as representações feitas no software Geogebra.
d) Definir matematicamente limite de uma sequência de números reais.
e) Relembrar as definições de sequência estudadas em aulas anteriores.
f) Demonstrar, através de manipulações algébricas, o limite, caso existam de algumas sequências de números reais.

Desenvolvimento

<u>1ª etapa</u>: Iniciando esta etapa, aluno desenvolverá a ideia intuitiva de limite de uma sequência de números reais, relembrando a manipulação do software Geogebra e as definições estudadas na aula anterior. Oriente os alunos a:

i) Abrirem o software e construírem um controle deslizante com as características descritas no “**Pequeno Manual de Construções no Geogebra**” presente no final deste trabalho.

ii) Construa outro controle deslizante, dê o nome de Ɛ e defina seu intervalo, como por exemplo, min: 0,1 e max: 2. Observe a imagem:



iii) A seguir, construírem no software a representação do conjunto A de números naturais digitando na entrada do programa os seguintes comandos:

$$A = Sequência[i, i, 1, n]$$

iv) Representarem graficamente a sequência $z_n = \frac{-5n-3}{n+1}$, posicionando o controle deslizante em n = 1 e digitarem na caixa de entrada o seguinte comando:

$$z\_n = Sequência[(i, -(5i\ +\ 3)\ /\ (i\ +\ 1)), i, 1, n]$$

v) Com o controle deslizante na posição n = 1, digitarem na caixa de entrada do programa os seguintes comandos:

$$r = \ Reta[(n, -((5i\ +\ 3)\ /\ (i\ +\ 1))), EixoX]$$
$$s = \ Reta[(0, -5), EixoX]$$

vi) Alterarem os estilos (para tracejado) e as cores das retas r (para verde escuro) e s (para vermelha), movimentarem o controle deslizante e observarem o gráfico da sequência e das retas r e s, descrevendo seus comportamentos.

vii) Faça o seguinte questionamento:

a) Descreva o comportamento da sequência (z_n).

Comentário: O objetivo desta questão é fazer com que o aluno perceba que a medida que os valores de n aumentam, os valores dos termos da sequência dada (destacados pela reta r) se aproximam do valor (-5) (destacado pela reta s), descrevendo intuitivamente a ideia de limite de uma sequência de números reais.

Conexão entre as etapas: A etapa inicial tem como objetivo introduzir superficialmente a noção de limite de uma sequência de números reais. Após essa noção intuitiva, introduzir-se-á a ideia de que se uma sequência possui um limite a todos os valores dessa sequência, a partir de um valor de n suficientemente grande, pertencem a um intervalo aberto de raio $\mathcal{E}$.

2ª etapa: Nesta etapa, aluno aprofundará a ideia intuitiva de limite de uma sequência de números reais, entendendo que, quando uma sequência possui um limite a, para valores de n suficientemente grandes, todos os seus termos pertencem ao intervalo $(a - \mathcal{E},\ a + \mathcal{E})$. Solicite que o aluno:

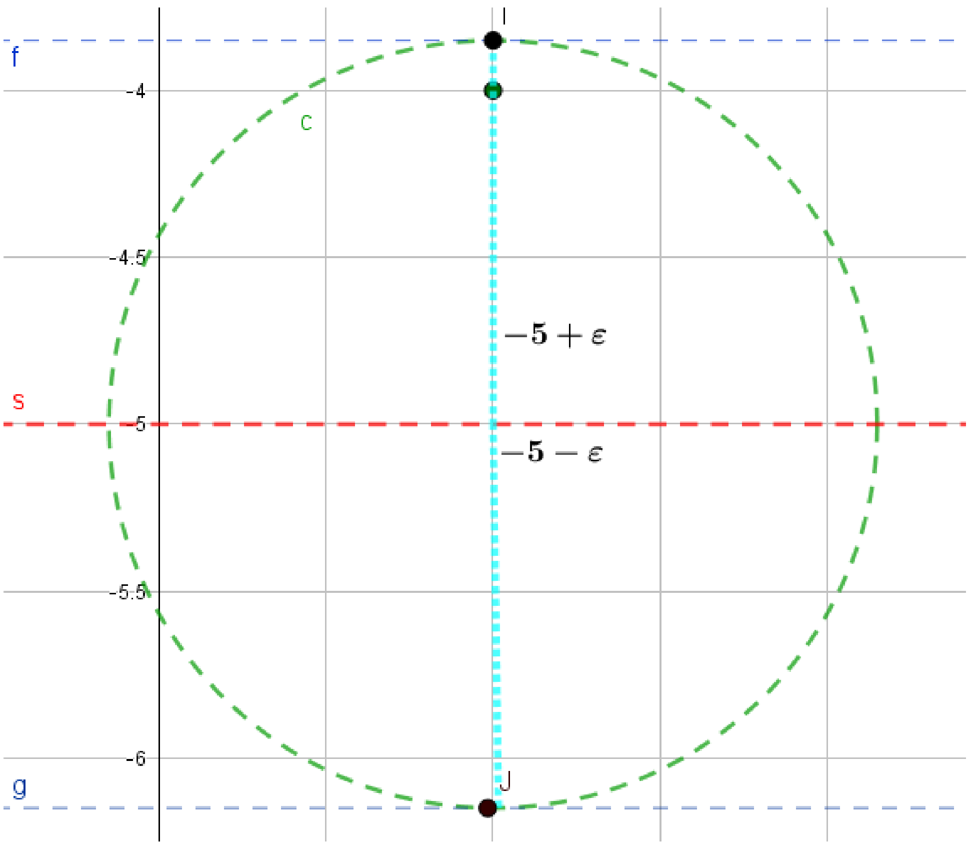
viii) Movimente o controle deslizante para n = 1, esconda a reta r (consultar o "**Pequeno Manual de Construções no Geogebra**" presente no final deste trabalho) e digite na entrada do programa os seguintes comandos:

$$C = Círculo[\underbrace{(1,-5)}_{centro},\ \underbrace{\varepsilon}_{raio}\ ]$$

$h = Reta[(1,-5), EixoY]$ (Reta paralela ao eixo Y passando pelo centro da circunferência)

ix) Marque nas interseções da circunferência com a reta h, os pontos I e J (consulta manual) e o ponto C (intersecção entre centro da circunferência e a reta h). A seguir, esconda a reta h e a circunferência (consultar o manual). Trace os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ (consultar o manual), alterando suas cores, estilos e renomeie para $-5 - \varepsilon$ e $-5 + \varepsilon$. Depois, escondam a reta h e os pontos I, J e C.

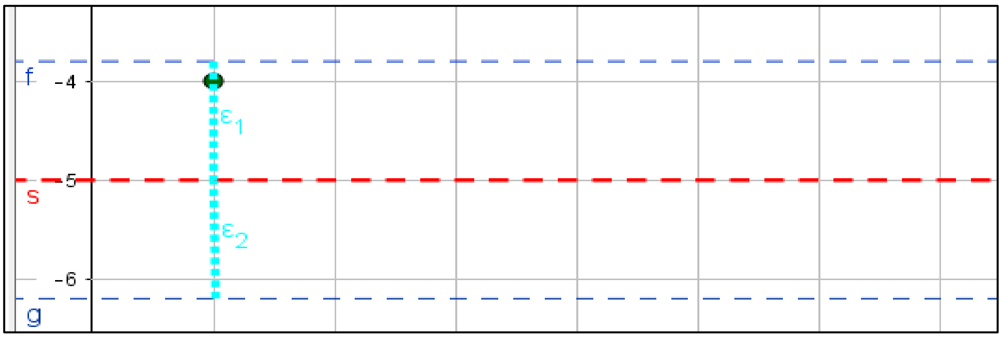
Observe o gráfico gerado após a entrada dos comandos, antes de esconder os pontos, a reta e a circunferência:



x) Solicite que os alunos construam as retas f e g, alterando suas cores e estilos (ambas devem ser azuis com estilo tracejado), digitando na entrada do programa os seguintes comandos:

$$f = Reta[I, s] \quad \text{e} \quad g = Reta[J, s]$$

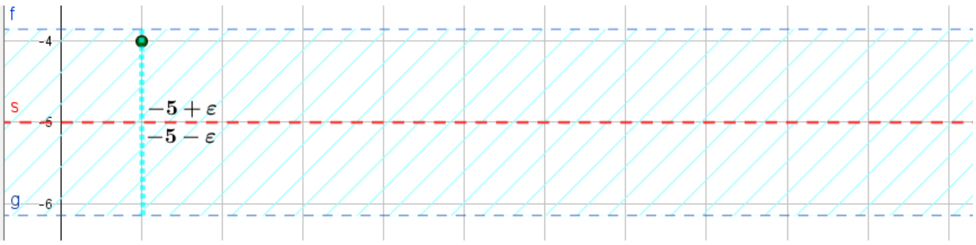
Após a realização das construções sugeridas, teremos o seguinte gráfico:



xi) Insira o seguinte comando da entrada do programa:

IntegralEntre(f, g, -1000, 1000)

Altere as características de cor e preenchimento, e observe o gráfico gerado:



xii) Movimente os controles deslizantes e observe o comportamento da sequência, da faixa gerada e dos segmentos.

xiii) Faça os seguintes questionamentos:

b) Movimente o controle deslizante ε e descreva o que ocorre com os pontos do gráfico para faixas com amplitude $\varepsilon > 1$.

Comentário: Ao movimentarmos o controle deslizante ε para faixas geradas quando $\varepsilon > 1$ podemos perceber que todos os pontos do gráfico estão contidos dentro da dela, ou seja, a imagem da sequência (representada pelos pontos do gráfico) pertence ao intervalo (-5 - ε , -5 + ε).

c) Movimente o controle deslizante ε até obter uma faixa de amplitude $\varepsilon = 1$ e descreva o que ocorre com os pontos do gráfico nesta faixa.

Comentário: Ao movimentarmos o controle deslizante ε para faixas geradas quando $\varepsilon = 1$ podemos perceber que todos os pontos do gráfico estão contidos dentro da faixa, ou seja, a imagem da sequência (os pontos do gráfico) pertence ao intervalo (-5 - ε , -5 + ε) = (-6, -4).

d) Movimente o controle deslizante ε e descreva o que ocorre com os pontos do gráfico para faixas com amplitude $\varepsilon < 1$.

Comentário: Ao movimentarmos o controle deslizante ε para faixas de amplitude $\varepsilon < 1$ podemos perceber que existe uma quantidade de pontos que ficam fora da faixa e que uma quantidade de pontos contidos dentro da faixa, ou seja, a maior parte da imagem da sequência (os pontos do gráfico) pertence ao intervalo (-5 - ε , -5 + ε).

e) Após as observações do gráfico, podemos afirmar que para faixas de diferentes amplitudes, a partir de um determinado valor de n (dependendo de ε), existe uma quantidade infinita de pontos dentro da faixa? Ilustre sua afirmação com um exemplo.

Possíveis comentários: Podemos observar por exemplo que:

- para uma faixa de amplitude $\varepsilon = 0.5$ todos pontos do gráfico com índices maiores que n = 3 pertencem ao intervalo (-5 - ε , -5 + ε) = **(-5,5 , -4,5).**

- para uma faixa de amplitude $\varepsilon = 0.3$ todos pontos do gráfico com índices maiores que n = 6 pertencem ao intervalo (-5 - ε , -5 + ε) = **(-5,3 , -4,7).**

- para uma faixa de amplitude $\mathcal{E} = 0.2$ todos pontos do gráfico com índices maiores que n = 9 pertencem ao intervalo (-5 - $\mathcal{E}$, -5 + $\mathcal{E}$) = **(-5,2 , -4,8).**

f) Pesquise e defina limite de uma sequência de números reais.

<u>Definição:</u> dizemos $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, se para qualquer valor de $\mathcal{E} > 0$, existe um índice n_0 natural, tal que, para todo índice n $> n_0$, a distância entre e o termo z_n e o limite a é menor que o raio $\mathcal{E}$.

Simbolicamente:

$\lim_{n\to\infty} z_n = a \iff \forall \mathcal{E} \in \mathbb{R},\ \mathcal{E} > 0\ ,\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ n > n_0 \Rightarrow |z_n - a| < E.$

<u>Comentário:</u> Pesquisando em livros ou na internet, os alunos devem chegar a definição de limite de uma sequência de números reais descrita acima. Ou ainda, Por definição, dizemos que $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, se para qualquer raio $\mathcal{E} > 0$, dado arbitrariamente, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, todos os termos z_n da sequência com índices n > n_0 pertencem ao intervalo $(a - \mathcal{E}, a + \mathcal{E})$.

g) Podemos afirmar que o limite da sequência $(\boldsymbol{z_n})$ é -5? Prove sua afirmação.

<u>Comentário:</u> Neste momento, o aluno deverá provar que o limite da sequência dada é igual a -5. De posse da definição de limite de uma sequência, o aluno deverá através de manipulações algébricas realizar a prova, percebendo que deve tomar um índice n_0 dependente de um $\mathcal{E} > 0$ arbitrário para iniciar sua demonstração. Para orientá-lo na procura do índice n_0, o professor pode fazer as seguintes observações:

Procuramos um número natural (índice) n_0 dependente de um $\mathcal{E}$, tal que, para se n > n_0 então $\left|-\frac{5n+3}{n+1}-(-5)\right| < E$. Temos que $\left|-\frac{5n+3}{n+1}-(-5)\right| = \left|\frac{-5n - 3 + 5n + 1}{n+1}\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n} < E$. Daí, $\frac{2}{n} < E \Leftrightarrow n\mathcal{E} > 2 \Leftrightarrow n > \frac{2}{\mathcal{E}}$. Assim sendo, o n_0 procurado é um número natural tal que $n_0 > \frac{2}{\mathcal{E}}$.

Prova:

Seja $\mathcal{E} \in \mathbb{R}\, tal\ que\ \ \mathcal{E} > 0$.

Pela Propriedade Arquimediana existe um número natural $n_0 > \frac{2}{\mathcal{E}}$.

Suponhamos que $n\ \in \mathbb{N}$ satisfaça $n >\ n_0$.

Então, $\left|-\frac{5n+3}{n+1} - 5\right) = \left|\frac{-5n - 3 + 5n + 1}{n+1}\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}$.

Como $n >\ n_0 > \frac{2}{\mathcal{E}}$ então $\frac{2}{n} < E$.

Logo, concluímos que $\forall \mathcal{E} > 0, \exists n_0\ \in\ \mathbb{N};\, n >\ n_0$ tal que $\left|-\frac{5n+3}{n+1} - (-5)\right| =<\ \mathcal{E}$.

Portanto, pela definição, temos que $lim\, z_n = -5$.

Conexão entre as etapas: A proposta desta etapa é incentivar a demonstração através da definição e de manipulações algébricas de um limite de sequência. Ainda nesta fase, podem ser trabalhados outros exemplos de sequências, como $y_n = \frac{1}{n^2}$, $z_n = \sqrt[3]{n}\ e\ p_n = \frac{n}{n^2 - 38}$, incentivando os alunos a realizarem a prova dos limites (caso existam) através da definição. Na próxima etapa seguir-se-á um aprofundamento do conteúdo por meio de atividades que exigirão manipulações algébricas para a prova de afirmações e teoremas relacionados ao assunto.

<u>**Etapa Final**</u>: Nas etapas anteriores os alunos construíram a ideia intuitiva de limite de uma sequência e realizaram a formalização destes conceitos com a descrição e manipulação da definição para a prova de limites. Agora, a proposta é exercitar o conteúdo estudado através de atividades que

exigirão o conhecimento da definição e o desenvolvimento de habilidades para a demonstração de propriedade e teoremas.

Finalizando a aula sobre limite de uma sequência, o professor deverá oferecer aos alunos as atividades listadas abaixo, em folhas impressas (ou escrevendo-as no quadro branco). A orientação é que os alunos, organizados individualmente ou em grupo, realizem as atividades propostas, discutindo as construções no software Geogebra e as afirmações feitas. Caso desejarem, a atividade pode ser realizada como atividade extraclasse.

xiv) Proponha as seguintes atividades para os alunos:

ATIVIDADES PROPOSTAS – AULA 2

1) **Definição**: Uma sequência que possui um limite é dita **convergente** e indicamos sua convergência por $z_n \rightarrow a,$ lemos "z_n tende para a". As seguintes sequências são convergentes. Utilize o programa Geogebra para estimar o valor do limite das sequências e demonstre-o através da definição de limite.

a) $x_n = \frac{4n}{n+5}$

b) $y_n = -2 + \frac{7n!}{(n+1)!}$

2) Prove que: **(Teorema)** Toda sequência convergente é limitada.

3) Prove que se a $\in \mathbb{R}$ e lim $x_n = b$ então lim $ax_n = ab$. Dê um exemplo e visualize-o no software Geogebra.

4) Prove que se lim $x_n = 0$ e (y_n) é limitada então lim $x_n y_n = 0$. Dê um exemplo e visualize-o no software Geogebra.

5) **(Teorema da unicidade do limite)** Demonstre que se lim $x_n = a$ e lim $x_n = b,$ então a = b.

6) Mostre que se lim $x_n = a$ então lim $(x_n - a) = 0.$

7) **(Teorema)** Demonstre que se lim $x_n = a$ e lim $y_n = b,$ então:

i) $\lim(x_n + y_n) = a + b;$ ii) $\lim(x_n - y_n) = a - b;$

iii) $\lim(x_n . y_n) = a . b;$ iv) $\lim \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}\ se\ b \neq 0.$

8) Dê um exemplo para cada item do exercício 7, represente-os graficamente no GeoGebra e calcule seus limites.

Observação: Todas as construções propostas podem ser acessadas através do CD em anexo.

AULA 3 – SUBSEQUÊNCIA DE UMA SEQUÊNCIA DE NÚMEROS REAIS

- **Objetivo Geral:**
  Compreender a definição de subsequência de números reais, partindo de ideias intuitivas sobre o assunto e chegando a definição, utilizando-se de manipulações algébricas para a realização de demonstrações.

- **Conteúdo:**
  Construção do conceito de subsequência de uma sequência números reais e formalização deste conceito em linguagem matemática.

- **Objetivos específicos:**

  a) Representar no software Geogebra o conjunto dos valores de uma sequência de números reais determinados através de seu temos geral x_n.
  b) Representar no software Geogebra o conjunto dos valores das subsequências de: índices pares e de índices impares de uma sequência de números reais.
  c) Descrever, intuitivamente, a ideia de subsequência de números reais após analisar as representações feitas no software Geogebra.
  d) Definir subsequência de uma sequência de números reais.
  e) Relembrar as definições de sequência e limite de uma sequência estudadas em aulas anteriores.
  g) Demonstrar, através de manipulações algébricas, alguns teoremas e o limite, caso existam, de algumas subsequências de números reais.

Desenvolvimento

<u>1ª etapa</u>: Nesta aula, o aluno desenvolverá a ideia intuitiva de subsequência de uma sequência de números reais, relembrando a manipulação do software Geogebra e as definições estudadas na aula anterior. Requisite que os alunos:

i) Abram o software e que construam um controle deslizante com as características descritas no "**Pequeno Manual de Construções no Geogebra**" presente no final deste trabalho.

ii) A seguir, construam no software a representação do conjunto A de números naturais, o conjunto B dos números naturais pares e o conjunto C dos números naturais impares, digitando na caixa de entrada os seguintes comandos:

$$A = Sequência[i, i, 1, n]$$

$$B = Sequência[i, i, 2, n, 2]$$

$$C = Sequência[i, i, 1, n, 2]$$

iii) Movimentem o controle deslizante e observem os conjuntos A, B e C na janela de Álgebra do software Geogebra.

iv) Representem graficamente as sequências $x_n = \frac{-5}{n+1}$, x_{2n} e x_{2n-1}, posicionando o controle deslizante em n = 1 e digitando na caixa de entrada os seguintes comandos:

$$x\_n = Sequência[(A, -5 \,/\, (A\ +\ 1)), A, 1, n]$$

$$x\_\{2n\} = Sequência[(B, -5 \,/\, (B\ +\ 1)), B, 2, n, 2]$$

$$x\_\{2n-1\} = Sequência[(C, -5 \,/\, (C\ +\ 1)), B, 1, n, 2]$$

v) Alterem as cores e os estilos dos gráficos das sequências (consultar o manual): a sequência (x_n) é verde com estilo pontos cheios, a sequência (x_{2n}) é vermelha com estilo de pontos vazados e a sequência (x_{2n-1}) é azul, também com pontos vazados.

Observe o gráfico das sequências, já com as alterações de cor e estilo:

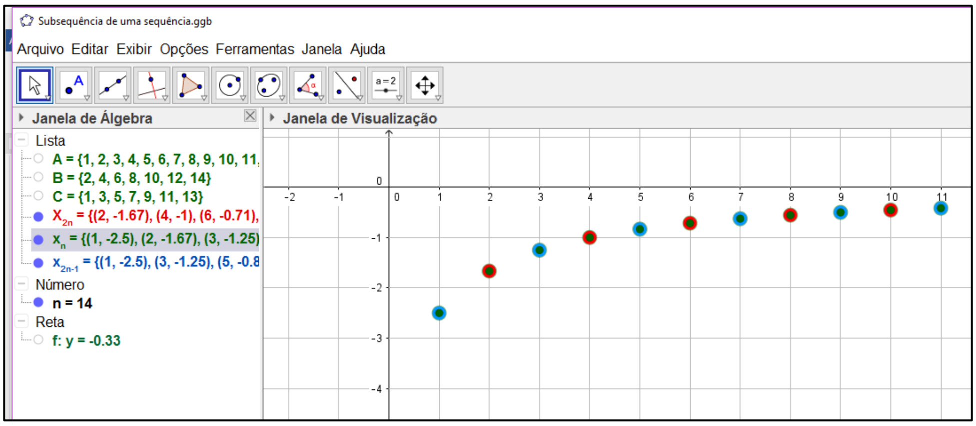


Gráfico 1 – Sequência e Subsequências

vi) Movimentem o controle deslizante e observe o comportamento das sequências. A seguir, escondam a sequência (x_n), e observem as sequências (x_{2n}) e (x_{2n-1}).

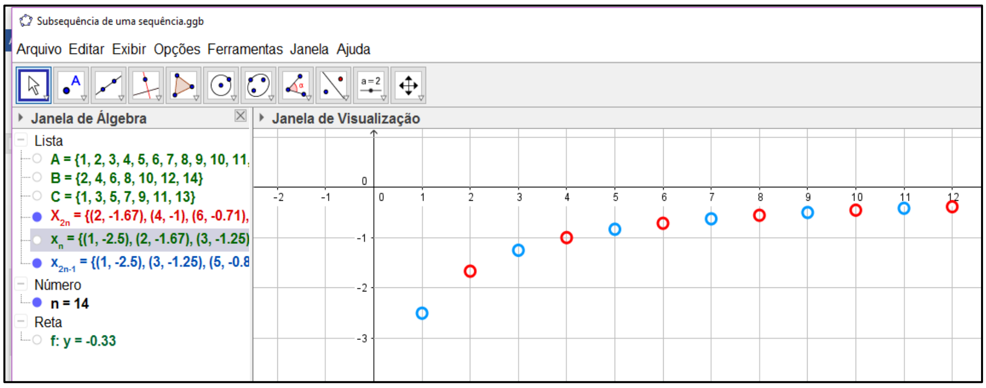


Gráfico 2 - Subsequências

vii) Faça os seguintes questionamentos:

a) Determine o conjunto dos valores das sequências (x_n), (x_{2n}) e (x_{2n-1}).

Comentário: Após a manipulação da representação gráfica das sequencias $(\boldsymbol{x_n})$, $(\boldsymbol{x_{2n}})$ **e** $(\boldsymbol{x_{2n-1}})$, o aluno deverá perceber a relação entre os termos, descrevendo os conjuntos de forma semelhante a apresentada abaixo:

Valores de x_n	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{4}$	-1	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{5}{9}$	...
Valores de x_{2n}		$-\frac{5}{3}$		-1		$-\frac{5}{7}$		$-\frac{5}{9}$	...
Valores de x_{2n-1}	$-\frac{5}{2}$		$-\frac{5}{4}$		$-\frac{5}{6}$		$-\frac{5}{8}$		...
Termos x_n	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	...

b) Descreva a relação existente entre as sequências $(\boldsymbol{x_n})$, $(\boldsymbol{x_{2n}})$ e $(\boldsymbol{x_{2n-1}})$.

Comentário: O aluno deverá perceber que o conjunto dos valores da sequência $(\boldsymbol{x_{2n}})$ é formado pelos valores dos temos de índice par e que o conjunto dos valores da sequência $(\boldsymbol{x_{2n-1}})$ é formado pelos valores dos termos de índice impar pertencentes a sequência $(\boldsymbol{x_n})$.

c) Defina subsequência de uma sequência de números reais.

Definição: uma subsequência de uma sequência de números reais é uma função $x: \mathbb{N}' \to \mathbb{R}$, onde o domínio $\mathbb{N}'$ é um subconjunto do conjunto dos números naturais e o conjunto imagem x(n) pertence ao conjunto dos números reais.

Comentário: Com o auxílio de livros ou pesquisas, o aluno deve entender que uma subsequência de uma sequência é, por definição, uma função $x: \mathbb{N}' \to \mathbb{R}$, onde o domínio $\mathbb{N}'$ é um subconjunto do conjunto dos números naturais.

d) As sequências (x_{2n}) e (x_{2n-1}) são subsequências da sequência (x_n)? Justifique sua resposta.

Comentário: Utilizando-se da definição, o aluno deve afirmar que as sequências (x_{2n}) e (x_{2n-1}) são subsequências da sequência (x_n), pois representam funções cujo domínio são subconjuntos do conjunto de números naturais. No caso da subsequência (x_{2n}), o domínio é o conjunto formado pelos números pares e, no caso da subsequência (x_{2n-1}), o domínio é conjunto dos números ímpares, que são subconjuntos de $\mathbb{N}$.

Conexão entre as etapas: A etapa inicial tem como objetivo introduzir superficialmente a noção de subsequência de uma sequência de números reais. Após essa noção intuitiva, introduzir-se-á a ideia de que o limite de uma sequência é igual ao limite da sequência (caso exista), fornecendo ferramentas para a prova de alguns teoremas.

2ª etapa: Nesta etapa, o aluno aprofundará o conceito de subsequência e relembrará a definição de limite de uma sequência de números reais, fixando conteúdos e exercitando a realização de demonstrações.

viii) Os alunos deverão movimentar o controle deslizante para a posição n = 1 e digitar na entrada do programa os seguintes comandos:

$$r = Reta[(n, -5 \,/\, (n + 1)), EixoX]$$

ix) Oriente-os a alterar o estilo (para tracejado) e a cor da reta r (para verde escuro); sugira que movimentem o controle deslizante e observem o gráfico das subsequências e da reta r, descrevendo seus comportamentos.

x) Faça o seguinte questionamento:

e) Prove que o limite da sequência (x_n) é igual a zero.

Comentário: Neste momento, o aluno já deve ter ferramentas necessárias para realizar esta prova facilmente, identificando que dado um $\mathcal{E}$ qualquer, deve encontrar um número natural n_0 dependente de $\mathcal{E}$, tal que $n > n_0$ implique que $|x_n - a| < E$.

Observando que para lim $x_n = 0$ devemos ter:

$$|x_n - a| = \left|-\frac{5}{n+1} - 0\right| = \left|-\frac{5}{n+1}\right| = |-5|\left|\frac{1}{n+1}\right| = 5\left|\frac{1}{n+1}\right| < E$$

Como $n \geq 1, podemos\ afirmar\ que\ \left|\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{\mathcal{E}}{5}$

Segue que $\frac{1}{n+1} < \frac{\mathcal{E}}{5} \Rightarrow n + 1 > \frac{5}{\mathcal{E}} \Rightarrow n > \frac{5}{\mathcal{E}} - 1 = \frac{5-\mathcal{E}}{\mathcal{E}}$.

Logo, para iniciar a prova do limite basta tomar um $n_0 \geq \frac{5-\mathcal{E}}{\mathcal{E}}$.

Prova:

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, tomemos um número natural $\mathrm{n}_0 \geq \frac{5-\varepsilon}{\varepsilon}$.

Daí, $n > n_0 \geq \frac{5-\varepsilon}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{5-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{5}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow n > \frac{5}{\varepsilon} - 1$

Segue que $n + 1 > \frac{5}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow \frac{5}{n+1} < \varepsilon$.

Como $n > 0$, temos de $\frac{5}{n+1} > 0$, logo $\left|\frac{5}{n+1}\right| = \frac{5}{n+1} = |-1| . \left|\frac{5}{n+1}\right| = \left|\frac{-5}{n+1}\right|$.

Assim, $\left|\frac{-5}{n+1} - 0\right| < \varepsilon$.

Concluímos que $|x_n - 0| < \varepsilon$.

Logo, $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0$ tal que $|x_n - 0| < \varepsilon$.

Portanto, $lim\, x_n = 0$.

f) (Teorema) Prove que se lim x_n = a então toda subsequência de x_n converge para o limite a.

Comentário: Para realizar a prova deste teorema, o aluno deve perceber que precisa representar o conjunto dos valores de uma subsequência de (x_n) como $(\boldsymbol{x_{n_1}}, \boldsymbol{x_{n_2}}, \boldsymbol{x_{n_3}}, \dots, \boldsymbol{x_{n_k}}, \dots)$, onde os índices n_k representam os índices dos termos da subsequência.

Como o conjunto dos valores da subsequência está contido no conjunto dos valores da sequência (x_n), conclui-se que os índices n_k representam alguns termos da sequência. A hipótese inicial do teorema afirma que a sequência possui um limite, ou seja, que seus termos de índice n > n_0 pertencem ao intervalo $(a - \mathcal{E}, a + \mathcal{E})$.

Sendo assim, os termos de índice n_k também pertencem a esse intervalo. Logo, em posse destas informações e da definição de limite, para iniciar a prova, o aluno deverá tomar um número natural n_0, tal que para todos os termos de índice $n_k > n_0$, os termos $\boldsymbol{x_{n_k}}$ da subsequência pertençam ao intervalo $(a - \mathcal{E}, a + \mathcal{E})$.

Prova:

Seja $(\mathrm{x}_{\mathrm{n}_1}, \mathrm{x}_{\mathrm{n}_2}, \mathrm{x}_{\mathrm{n}_3}, \dots, \mathrm{x}_{\mathrm{n}_\mathrm{k}}, \dots)$ uma subsequência de uma sequência (x_n). Por hipótese, $x_n \to a$, ou seja, dado qualquer $\mathcal{E} > 0$, existe um número natural n_0 tal que todos os termos de índice n > n_0 pertencem ao intervalo $I = (a - \mathcal{E}, a + \mathcal{E})$.
Como $(\mathrm{x}_{\mathrm{n}_1}, \mathrm{x}_{\mathrm{n}_2}, \mathrm{x}_{\mathrm{n}_3}, \dots, \mathrm{x}_{\mathrm{n}_\mathrm{k}}, \dots)$ é uma subsequência da sequência (x_n), todos os termos x_{n_k} da subsequência pertencem ao conjunto dos valores da sequência.
Donde segue que, todos termos x_{n_k} da subsequência, cujo índice $n_k > n_0$, também pertencem ao intervalo I.

Daí, segue que, dado qualquer $\mathcal{E} > 0$, existe um número natural n_0, tal que para todos os índices $n_k > n_0$, todos os termos x_{n_k} pertencem ao intervalo I.

Logo, concluímos que lim x_{n_k} = a, ou seja, $x_{n_k} \rightarrow a$. Portanto, se lim x_n = a então toda subsequência de (x_n) converge para o limite a.

Conexão entre as etapas: A proposta desta etapa foi favorecer a compreensão da definição de subsequência de uma sequência de números reais através da visualização e manipulação do software Geogebra e da busca do conceito em livros ou na internet, utilizando o conhecimento adquirido para a demonstração de teoremas e resultados importantes. Na próxima etapa seguir-se-á um aprofundamento do conteúdo por meio de atividades que exigirão manipulações algébricas para a prova de afirmações e teoremas relacionados ao assunto.

Etapa Final: Nas etapas anteriores os alunos construíram a ideia intuitiva de subsequência de uma sequência e realizaram a formalização destes conceitos com a descrição e manipulação da definição para a prova de teoremas. Agora, a proposta é exercitar o conteúdo estudado através de atividades que exigirão o conhecimento da definição e o desenvolvimento de habilidades para a demonstração de propriedade e teoremas. Finalizando a aula, o professor deverá oferecer aos alunos as atividades listadas abaixo, em folhas impressas (ou escrevendo-as no quadro branco).

xi) Proponha as seguintes atividades para os alunos:

ATIVIDADES PROPOSTAS – AULA 3

1) Dadas as sequências abaixo, utilize o software Geogebra para representar graficamente a sequência e a subsequência pedida e enumere os seus 7 primeiros termos:

a) $x_{3n-2} = ?$, sendo $x_n = \frac{4n}{n+5}$

b) $y_{n+3} = ?$, sendo $y_n = \frac{4\sqrt{n+5}}{n}$

2) **(Teorema)** Prove que se uma sequência monótona tem uma subsequência convergente então, a sequência é, ela própria, convergente.

3) Com o auxílio do software Geogebra, determine um exemplo de sequência que ilustre o teorema acima.

4) Se $\lim x_{2n} = a$ e $\lim x_{2n-1} = a$, prove que $\lim x_n = a$.

5) (**Teorema do Sanduíche**) Prove que se $\lim x_n = \lim y_n = a$ e se $x_n \leq z_n \leq y_n$ para todo n suficientemente grande então $\lim z_n = a$.

6) Com o auxílio do software Geogebra, dê um exemplo de sequências que ilustrem o Teorema do Sanduíche descrito.

Observação: Todas as construções propostas podem ser acessadas através do CD em anexo.

AULA 4 – LIMITES INFINITOS

- **Objetivo Geral:**

  Compreender a definição de limites infinitos, associando-a ao conceito de sequência divergente e utilizando-a para realiza demonstrações de resultados e teoremas.

- **Conteúdo:**

  Construção intuitiva do conceito de limite infinito, associando este conceito a ideia de sequência divergente e a formalização deste conceito em linguagem matemática.

- **Objetivos específicos:**

a) Construir com o auxílio do software Geogebra a representação de um conjunto A de números naturais.
b) Representar no software Geogebra o conjunto dos valores de uma sequência divergente de números reais determinados através de seu temos geral x_n.
c) Descrever, intuitivamente, a ideia de limite infinito após analisar as representações feitas no software Geogebra.
d) Definir formalmente limite infinito.
e) Definir formalmente sequência limitada.
f) Demonstrar, através de manipulações algébricas, os limites de algumas sequencias divergentes.

Desenvolvimento

<u>1ª etapa</u>: Iniciando esta etapa, o aluno vai relembrar algumas construções no software Geogebra, fazendo a representação do conjunto dos valores de uma sequência divergente. Partindo da definição de limite de uma sequência, o aluno deverá compreender a definição de limites infinitos, desenvolvendo conhecimento necessário para realizar demonstrações de teoremas e resultados.

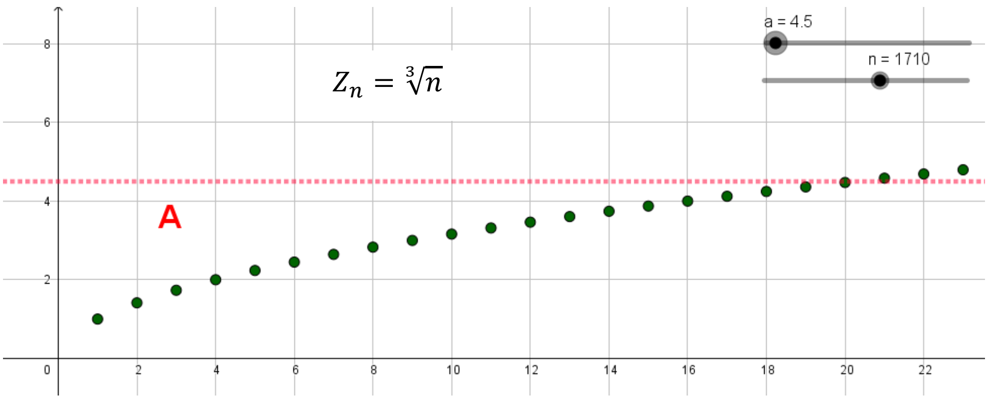
i) Os alunos deverão abrir o software Geogebra, construir dois controles deslizantes: n e a. Para o controle a, determine o intervalo min = 0,1 e máx = 20 (por exemplo) e representar graficamente a sequência $z_n = \sqrt[3]{n}$, digitando na caixa de entrada os seguintes comandos:

$$A = Sequência[i, i, 1, n]$$

$$z\_n = Sequência[(A, A\^{}(1 / 3)), A, 1, n]$$

$$r = Reta[(1, a), EixoX]$$

ii) Oriente os alunos a alterem as características da reta r (para vermelha e pontilhada), movimentem o controle deslizante, observem gráfico gerado e descreverem o que ocorre.



iii) Faça os seguintes questionamentos:

a) A sequência dada é limitada inferiormente? Prove.

<u>Comentário:</u> Com esse questionamento pretende-se relembrar a definição de sequência limitada inferiormente.

Relembrando:

Uma sequência é dita limitada inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq z_n$ (ou seja, $z_n \in [a, +\infty)$) para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova:

Sabemos que $n \geq 1,\ para\ todo\ n \in \mathbb{N}$.

Dai, $\sqrt[3]{n} \geq \sqrt[3]{1}$.

Donde segue que $1 \leq \sqrt[3]{n}$, ou seja, $1 \leq z_n,\ para\ todo\ n \in \mathbb{N}$.

Logo, $\exists a \in \mathbb{R}$ tal que $z_n \geq a$, ou seja, $z_n \in [a, +\infty)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, a sequência é limitada inferiormente.

b) Observando o gráfico é possível afirmar que a sequência dada é limitada superiormente? Prove.

Comentário: Aqui o aluno deverá perceber que a sequência dada não é limitada superiormente. Devemos chamar sua atenção para a prova desta afirmação. A prova será realizada por absurdo, que consiste em supor por absurdo que uma proposição falsa é verdadeira e através de manipulações algébricas chegar em uma contradição.

Relembrando:

Uma sequência é dita limitada superiormente quando existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $z_n \leq b$ (ou seja, $z_n \in (-\infty, b]$) para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova:

Suponhamos por absurdo que a sequência z_né limitada superiormente. Isso significa que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $z_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Daí, $z_n \leq b \Rightarrow \sqrt[3]{n} \leq b \Rightarrow n \leq b^3, para\ todo\ n \in \mathbb{N}$.

Ou seja, o conjunto dos números naturais é limitado superiormente. (Contradição!)

Portanto, a sequência (z_n) não é limitada superiormente.

iv) Agora, solicite que os alunos calculem o limite da sequência dada digitando o seguinte comando:

$$LIMITE = Limite[x^\wedge(1\ /\ 3), infinity]$$

v) Faça os seguintes questionamentos:

c) Movimente o controle deslizante a = 2 e descreva o que ocorre com os pontos do gráfico abaixo da reta A e acima da reta A.

Comentário: Para A = 2, por exemplo, os pontos do gráfico da sequência com índice a partir de n = 4, possuem valores maiores que A.

d) Movimente o controle deslizante a = 4 descreva o que ocorre com os pontos do gráfico abaixo da reta A e acima da reta A.

Comentário: Para A = 4, os pontos do gráfico da sequência com índice a partir de n = 16, possuem valores maiores que A.

e) Após as observações do gráfico, o que pode ser afirmado sobre o comportamento da sequência dada. Ilustre sua afirmação com um exemplo.

Comentário: Observe que todos os valores da sequência (representados pelos pontos verdes no gráfico), a partir de um determinado índice n (dependente de A) possuem valores maiores que A. Portanto, a sequência $Z_n \to +\infty$.

f) **Uma sequência é dita divergente quando $z_n \to +\infty$ ou $z_n \to -\infty$. Dito isto e após calcular o limite da sequência $z_n = \sqrt[3]{n}$, podemos afirmar que (z_n) é divergente? Justifique sua resposta.**

Comentário: Após ter calculado o limite da sequência no software, o aluno facilmente identificará que a sequência dada é divergente e justificará sua resposta afirmando que o limite da sequência é infinito ou que a sequência "converge para mais infinito"

g) **Defina limite infinito.**

Definição: Seja $(x_n)_n$ uma sequência de números reais, dizemos que:

- $x_n \to +\infty$ quando, para qualquer número real A > 0 dado arbitrariamente, pudermos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n > A$.

- $x_n \to -\infty$ quando, para qualquer número real A > 0 dado arbitrariamente, pudermos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n < -A$. (LIMA, 2013, p. 129)

Comentário: Nesta fase, o aluno é livre para pesquisar a definição de limite infinito.

h) **Prove a afirmação que $z_n \to +\infty$.**

Comentário: Para realizar esta prova, o aluno deverá proceder de maneira análoga às demonstrações de limite de uma sequência; porém, observando que, como a sequência não é limitada superiormente, para valores suficientemente grandes de n, os termos da sequência serão maiores que qualquer valor real positivo A, escolhido aleatoriamente. Por definição, dado um número real positivo qualquer A, devemos exibir um número natural $\mathrm{n}_0$tal que todos os termos da sequência com índice n > n_0, serão maiores que A.

O professor deverá chamar a atenção do aluno para a obtenção do número natural n_0, que necessariamente deverá depende de A, observando que: $z_n > A \Rightarrow \sqrt[3]{n} > A \Rightarrow n > A^3$, logo, basta tomar $n_0 \geq A^3$.

Prova:

Dado $\mathrm{A} \in \mathbb{R}, \mathrm{A} > 0$ arbitrário. Tomemos um número natural $n_0 \geq A^3$ tal que $\mathrm{n} > \mathrm{n}_0$. Daí, $\mathrm{n} > n_0 \geq A^3 \Rightarrow n > A^3 \Rightarrow \sqrt[3]{n} > \sqrt[3]{A^3} = A \Rightarrow z_n > A$.

Logo, $\forall \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \mathrm{A} > 0$ dado arbitrariamente, existe um número natural n_0, tal que $\mathrm{n} > \mathrm{n}_0 \Rightarrow \mathrm{z}_\mathrm{n} > A$.

Portanto, $\boldsymbol{z_n \to +\infty}$.

Conexão entre as etapas: Nesta primeira etapa, o aluno teve a oportunidade de relembrar conteúdos anteriormente estudados, aprofundando e enriquecendo seu conhecimento. A próxima etapa propõe a demonstração de uma operação aritmética com limites infinitos, através de visualizações e manipulações de construções no software Geogebra. A intenção é utilizar a demonstração desta operação como exemplo, auxiliando os alunos demonstração das outras propriedades aritméticas com limites infinitos.

2ª etapa: Nesta etapa, os alunos deverão construir uma representação gráfica da sequência de números reais que será determinada pelo termo geral $y_n = -\sqrt{n} - \frac{5}{n}$. Percebendo que a sequência dada pode ser entendida como a soma de duas sequencias.

Após a construção do controle deslizante e da representação do conjunto A de números naturais, peça que os alunos:

vi) Representem graficamente a sequência $y_n = -\sqrt{n} - \frac{5}{n}$ e uma reta r, alterando as propriedades da sequência para cor vermelha e estilo de pontos vazados e da reta para cor vermelha e estilo tracejado (consultar manual). Digitando os seguintes comandos:

$$y_n = Sequência[(i, -sqrt(i)\ -\ 5\ /\ i), i, 1, n]$$

$$r = Reta[(n, -sqrt(n)\ -\ 5\ /\ n), EixoX]$$

$$a = \ Limite[-sqrt(x)\ -\ 5\ /\ x, infinity]$$

vii) Movimentem o controle deslizante, observem o gráfico gerado e o valor de a.

viii) Faça os seguintes questionamentos:

a) Qual o valor encontrado para a? Podemos afirmar que a sequência dada é divergente? Justifique sua resposta.

Comentário: Este questionamento deve fazer com que o aluno recorde o definição de sequência divergente, sendo de fácil percepção, que a sequência é divergente, visto que seu limite é igual a menos infinito.

b) Relembre a definição de lim $\boldsymbol{y_n = -\infty}$.

Definição:

Seja $(x_n)_n$ uma sequência de números reais, dizemos que $y_n \rightarrow -\infty$ quando, para qualquer número real A > 0 dado arbitrariamente, pudermos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n < -A$. (LIMA, 2013, p. 129)

Comentário: Pesquisando ou deduzindo da definição de limite infinito anteriormente estudada, o aluno deve definir o limite pedido.

c) **Usando a definição de limite infinito e a operação aritmética com limite infinito descrita abaixo, mostre que $\boldsymbol{y_n} \to -\infty$.**

Operação aritmética com limite infinito:

$Se \lim x_n = -\infty \; e \; (z_n) \; é \; limitada \; superiormente, então, \lim \; (x_n + z_n) = -\infty$

Comentário: Para demonstrar que $\boldsymbol{y_n} \to -\infty$, vamos dividir a sequência dada em duas sequencias e observar seus comportamentos no software. Sugira que os alunos realizem as etapas descritas abaixo:

Visualização com o Geogebra:

Vamos decompor a sequência $\boldsymbol{y_n} = \underbrace{\left(-\sqrt{\boldsymbol{n}}\right)}_{\boldsymbol{x_n}} + \underbrace{\left(-\frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{n}}\right)}_{\boldsymbol{z_n}}$ **em duas sequências:** $(x_n) = -\sqrt{n} \;\; e \;\; (z_n) - \frac{5}{n}$.

I) Crie um controle deslizante e digite os seguintes comandos na entrada do programa:

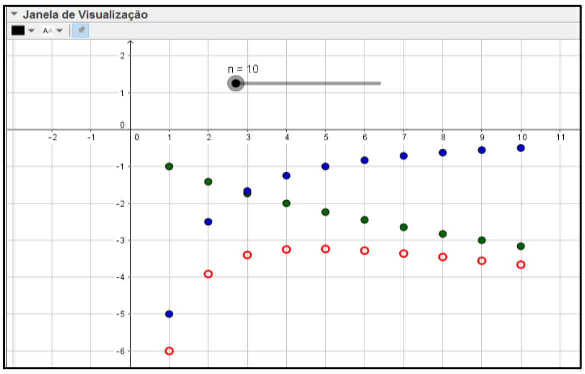
i) A = Sequência[i, i, 1, n]

ii) x_n = Sequência[(i, -sqrt(i)), i, 1, n]

iii) z_n = Sequência[(i, -5 / i), i, 1, n]

iv) y_n = Sequência[(i, -sqrt(i) - 5 / i), i, 1, n]

Altere a cor e o estilo dos pontos (sequência x_n é verde, z_n é azul e y_n é vermelha com pontos vazados), deslize o controle e observe o comportamento das sequências:



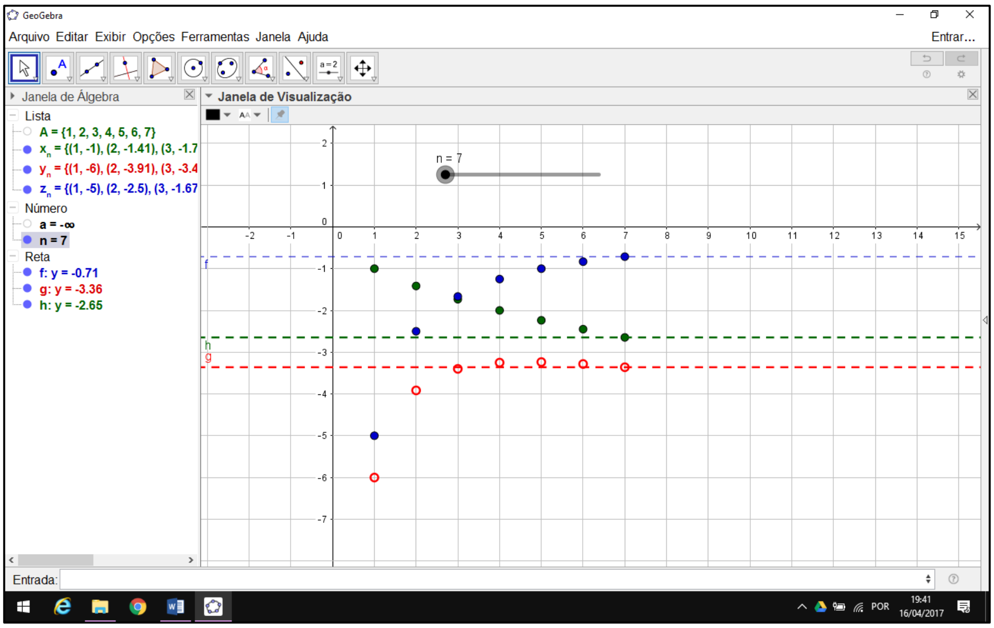
II) Movimente o controle deslizante para n = 1 e digite os seguintes comandos na entrada do programa:

i) f = Reta[(n, -5 / n), EixoX]

ii) g = Reta[(n, -sqrt(n) - 5 / n), EixoX]

iii) h = Reta[(n, -sqrt(n)), EixoX]

Altere a cor e o estilo das linhas (h é verde, f é azul e g é vermelha, todos no estilo tracejado), deslize o controle e observe o comportamento das sequências e das retas:



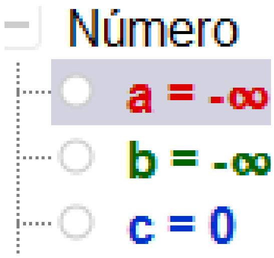
III) Digite os seguintes comandos na entrada do programa:

i) a = Limite[-sqrt(x) - 5 / x, infinity] (Calcula o limite de y_n)

ii) b = Limite[-sqrt(x), infinity] (Calcula o limite de x_n)

iii) c = Limite[-5 / x, infinity] (Calcula o limite de z_n)

Observe os valores encontrados:



(Limite de y_n)

(Limite de x_n)

(Limite de z_n)

Operação aritmética com limite infinito:

$$Se\ \lim x_n = -\infty\ e\ (z_n)\ é\ limitada\ superiormente, então, \lim (x_n + z_n) = -\infty\ .$$

Demonstração:

Dado $A \in \mathbb{R}$, $A > 0$ arbitrário.

Como (z_n) é *limitada superiormente*, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $z_n < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\lim x_n = -\infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n < -A - c$.

Segue que $n > n_0 \Rightarrow x_n + z_n < (-A - c) + c \Rightarrow y_n < -A$.

Logo, $\forall A \in \mathbb{R}, A > 0$ dado arbitrariamente, existe um inteiro n_0, tal que $n > n_0 \Rightarrow y_n = x_n + z_n < -A$.

Portanto, $\boldsymbol{y_n \to -\infty}$.

Observe que para esta prova, como $z_n < c$, realizamos o seguinte cálculo:

$y_n < -A \Rightarrow y_n < -A + (-c + c) \Rightarrow y_n = x_n + z_n < (-A - c) + c$.

Desfazendo a soma das desigualdades, podemos concluir que: $x_n < (-A - c)\ e\ z_n < c$.

Conexão entre as etapas: Nesta etapa, o aluno, além de ter desenvolvido o conhecimento das definições de limite infinito e de sequência divergente, pode exercitar demonstrações na prova de limites infinitos operações sobre o assunto. O próximo passo é exercitar as demonstrações e fixar as definições aprendidas, sanando possíveis dúvidas e enriquecendo o aprendizado

Etapa Final: Finalizando a aula sobre limites infinitos e sequências divergentes, o professor deve oferecer aos alunos as atividades listadas abaixo, em folhas impressas (ou escrevendo-as no quadro branco). Caso desejarem, as atividades podem ser realizadas como atividades extraclasse.

ix) Proponha as seguintes atividades para os alunos:

ATIVIDADES PROPOSTAS – AULA 4

1) **(Teorema)** Se $x_n > 0$ para todo n. Prove $\lim \boldsymbol{x_n} = 0 \Leftrightarrow \lim \frac{1}{\boldsymbol{x_n}} = +\infty$.

2) Utilize o Geogebra com ferramenta auxiliar para determinar exemplos de sequências tais que:

   a) $\boldsymbol{x_n} \rightarrow +\infty$ e existe c > 0 $tal\ que\ y_n > c\ para\ todo\ n \in \mathbb{N}$.
   a.1) $Calcule \lim(\boldsymbol{x_n}.\boldsymbol{y_n})$
   a.2) Prove que sempre que tais condições são satisfeitas o limite encontrado se repete.

   b) $(\boldsymbol{x_n})$ é limitada e $\lim y_n = +\infty$.
   b.1) $Calcule \lim \left(\frac{\boldsymbol{x_n}}{\boldsymbol{y_n}}\right)$.
   b.2) Prove que sempre que tais condições são satisfeitas o limite encontrado se repete.

3) Prove que, sendo $\boldsymbol{a \neq 0}$, se $\lim \frac{z_n}{a} = 1\ então\ \ lim\, z_n = a$. Dê um exemplo e visualize-o no Geogebra.

Observação: Todas as construções propostas podem ser acessadas através do CD em anexo.

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

As atividades propostas durante as aulas devem fornecer ao aluno ferramentas para a construção de conhecimentos matemáticos formais, como teoremas, corolários e desenvolver novas competências que os auxiliem no raciocínio, escrita e elaboração das provas e demonstrações, a partir da intuição.

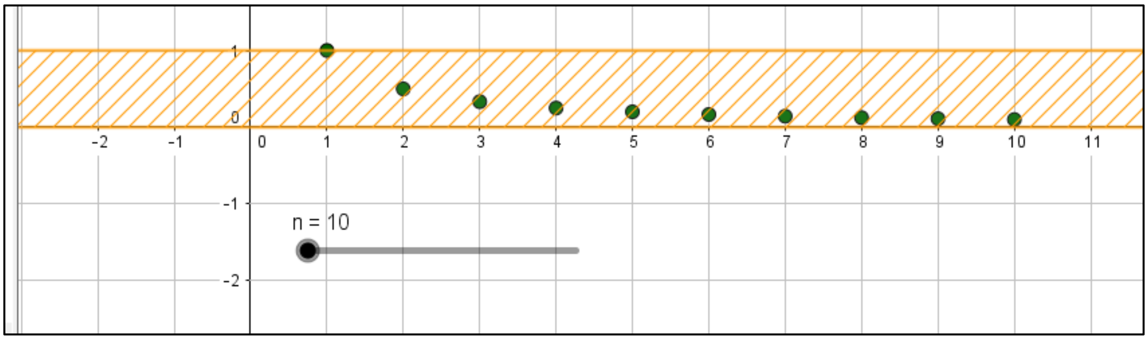
Os questionamentos feitos ao longo das quatro aulas e as atividades finais presentes em cada uma delas, aliados a visualização no softwares e as manipulações do mesmo deve proporcionar ao aluno o desenvolvimento de novas habilidades que favoreçam a representação matemática do pensamento intuitivo e as manipulações algébricas necessárias as demonstrações de conceito sobre sequência de números reais, limite de uma sequência de números reais, limites infinitos e subsequência de uma sequência de números reais.

Nas aulas, o professor deve orientar o aluno de forma a estimular sua autonomia e seu espirito investigativo, motivando-os a manipular as ferramentas do software, orientando-os nas construções necessárias, quando necessário, apresentando as figuras geradas no software e as provas propostas dos exercícios (as figuras e demonstrações encontrar-se-ão ao final desde trabalho), permitindo-lhe pesquisar conceitos e exercitar as provas, avaliando seu aprendizado.

Espera-se que, com este trabalho, o professor e seus alunos (futuros docentes) estejam equipados de uma ferramenta que lhes auxiliem no desenvolvimento de seu conhecimento matemático formal através de conhecimentos previamente adquiridos, pensamentos intuitivos, formalização de conceitos e de um (re)pensar matemático, possibilitando a construção de novas práticas educativas no Ensino Superior e, consequentemente, uma melhoria na qualidade do ensino na Educação Básica.

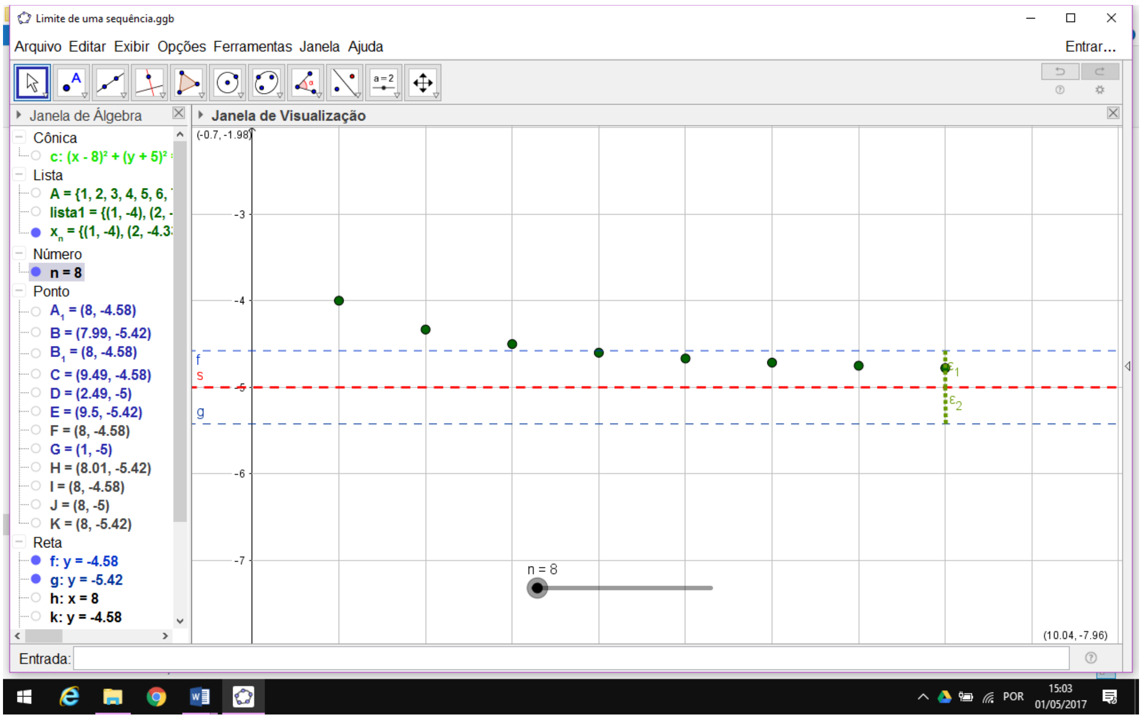
IMAGENS DAS SEQUÊNCIAS GERADAS NO GEOGEBRA

1) Imagem da Aula 1:



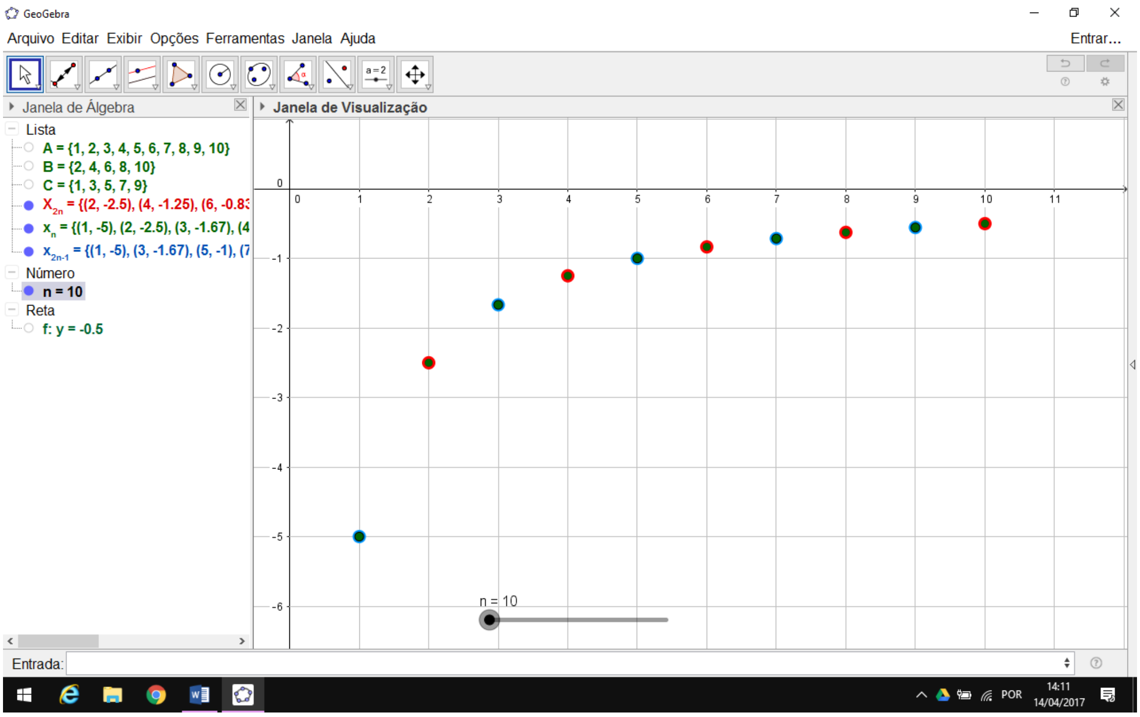
Sequência $x_n = \frac{1}{n}$

2) Imagem da Aula 2:

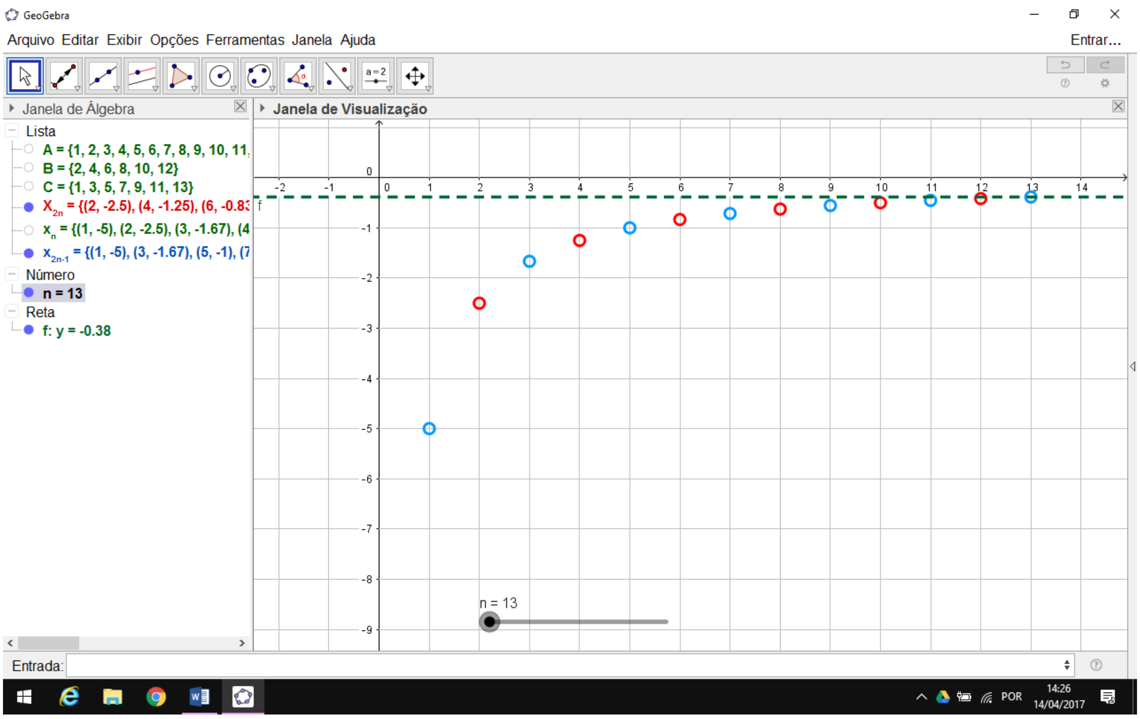


Sequência $z_n = \frac{-5n-3}{n+1}$

3) Imagens da Aula 3:

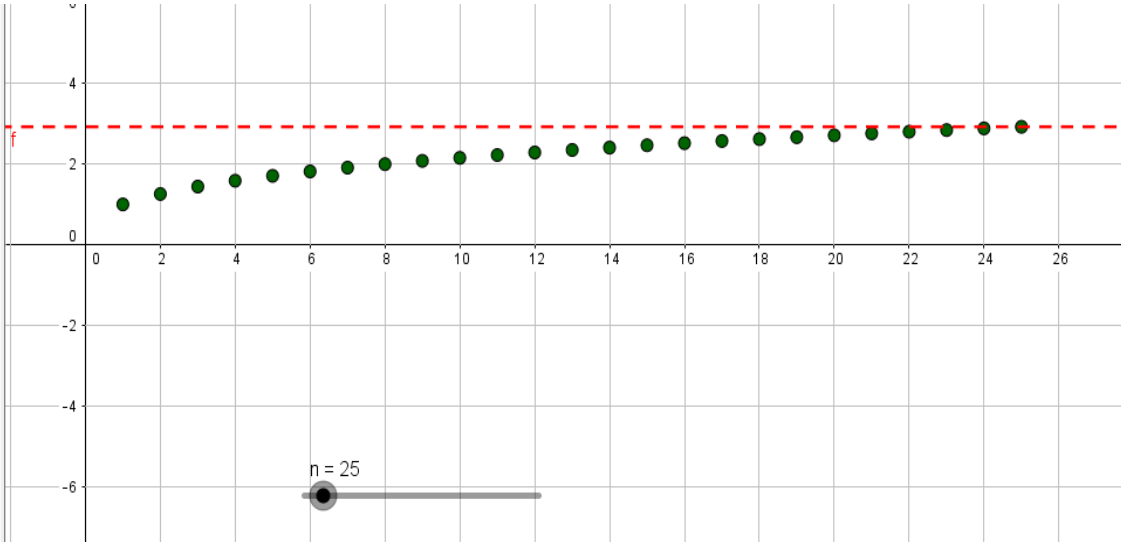


Sequência $z_n = \frac{-5}{n+1}$ e suas subsequências (z_{2n}) e (z_{2n-1}).

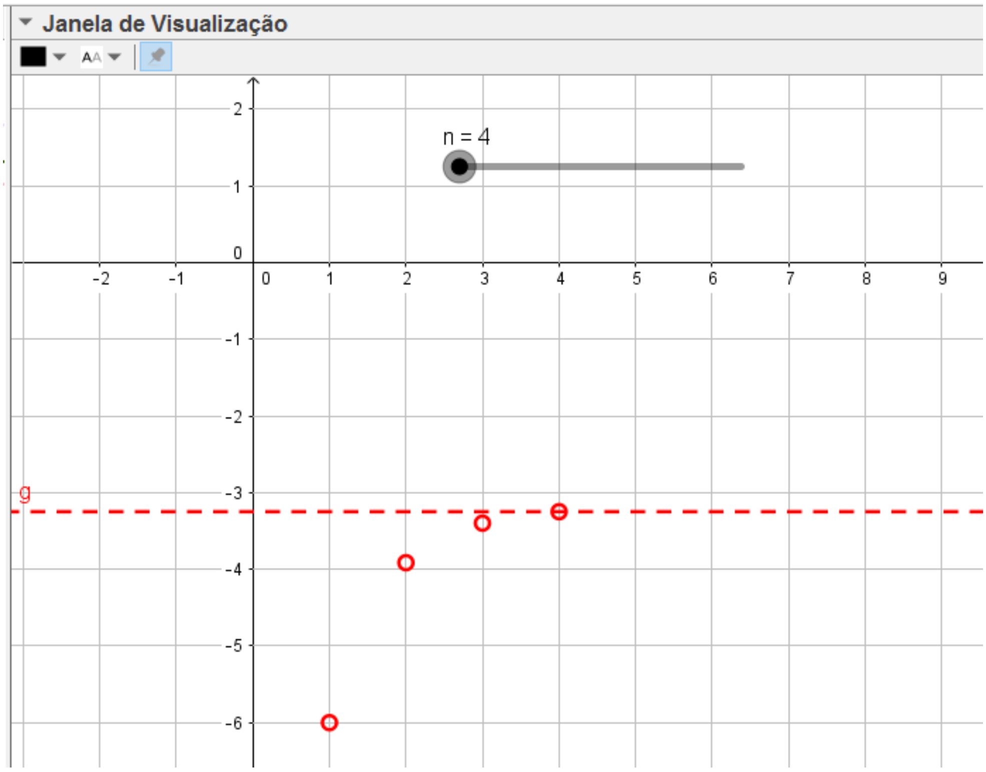


Subsequências (z_{2n}) e (z_{2n-1}).

4) Imagem da Aula 4:



Sequência $z_n = \sqrt[3]{n}$



Sequência $z_n = -\sqrt[3]{n} - \frac{-5}{n}$

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

I) EXERCÍCIOS PROPOSTOS NA AULA 1

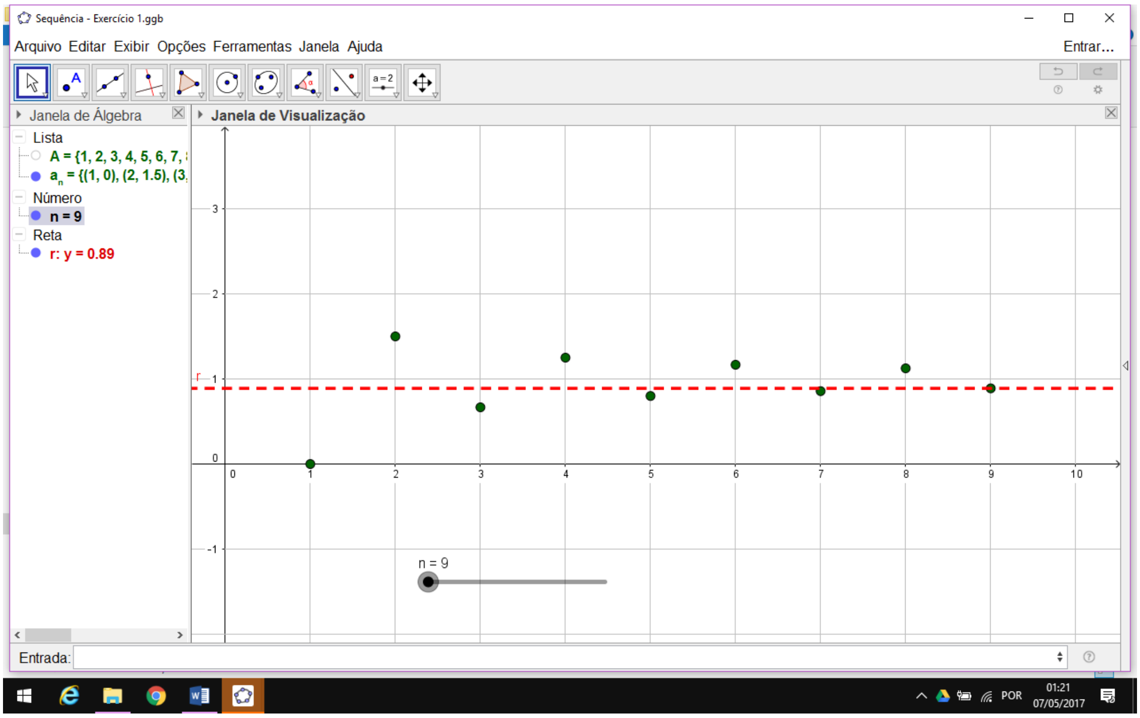
Questão 1:

Representação no Geogebra: A = Sequência[i, i, 1, n],

a_n = Sequência[(A, 1 + (-1)^A / A), A, 1, n]

r = Reta[(n, 1 + (-1)^n / n), EixoX].

Imagem gerada:



Os 10 primeiros termos da sequência:

Valores de a_n	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{11}{10}$	...
Termos	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	...

Questão 2:

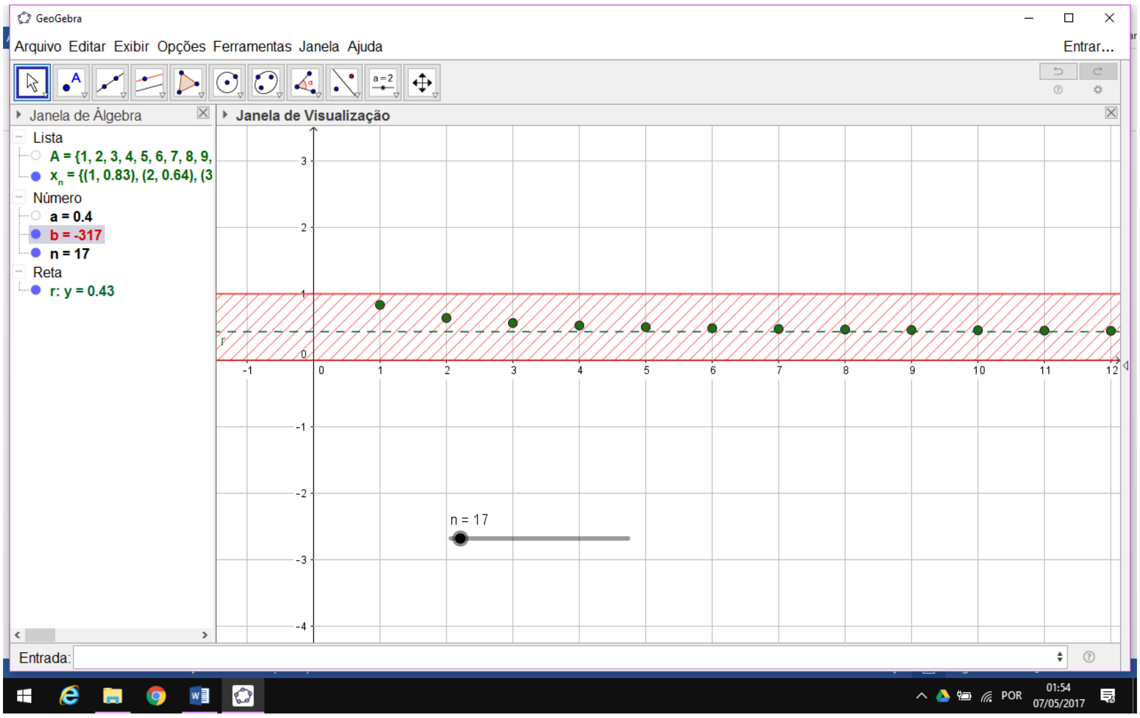
No Geogebra: A = Sequência[i, i, 1, n],

x_n = Sequência[(A, (2A + 3) / (5A + 1)), A, 1, n]

r = Reta[(n, (2n + 3) / (5n + 1)), EixoX]

Polígono[(-300,0), (-300,1), (300,1),(300,0)]

Imagem gerada:



Resposta 1: A sequência dada é limitada superiormente por 1 e inferiormente por 0 e, portanto, é uma sequência limitada.

<u>Prova:</u>

Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que 2(n +1) < 5n.

Daí, 2n + 2 = 2n + 3 – 1 < 5n ⇒ 2n + 3 < 5n + 1⇒ $\frac{2n+3}{5n+1} < 1$.

Como n > 0, temos que: 2n + 3 > 0 e 5n + 1 > 0.

Segue que $0 < \frac{2n+3}{5n+1} < 1$, ou seja, $0 < a_n < 1$.

Logo, existem números reais a e b tais que $a \leq a_n \leq b$.

Portanto, a sequência (a_n) é limitada.

Resposta 2: A sequência dada é monótona decrescente, pois os valores dos seus termos diminuem a medida que se aumenta os valores de n.

Prova:

Temos que 27n + 18 > 27n + 5, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $10n^2 > 0$, podemos afirmar que $10n^2 + 27n + 18 > 10n^2 + 27n + 5$.

Fatorando as expressões, temos que: (2n + 3)(5n + 6) > (2n + 5)(5n + 1).

Donde segue que: $\frac{2n+3}{5n+1} > \frac{2n+5}{5n+6} = \frac{(2n+2)+3}{(5n+5)+1} = \frac{2(n+1)+3}{5(n+1)+1}$.

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n > x_{n+1}$.

Portanto, a sequência é monótona decrescente.

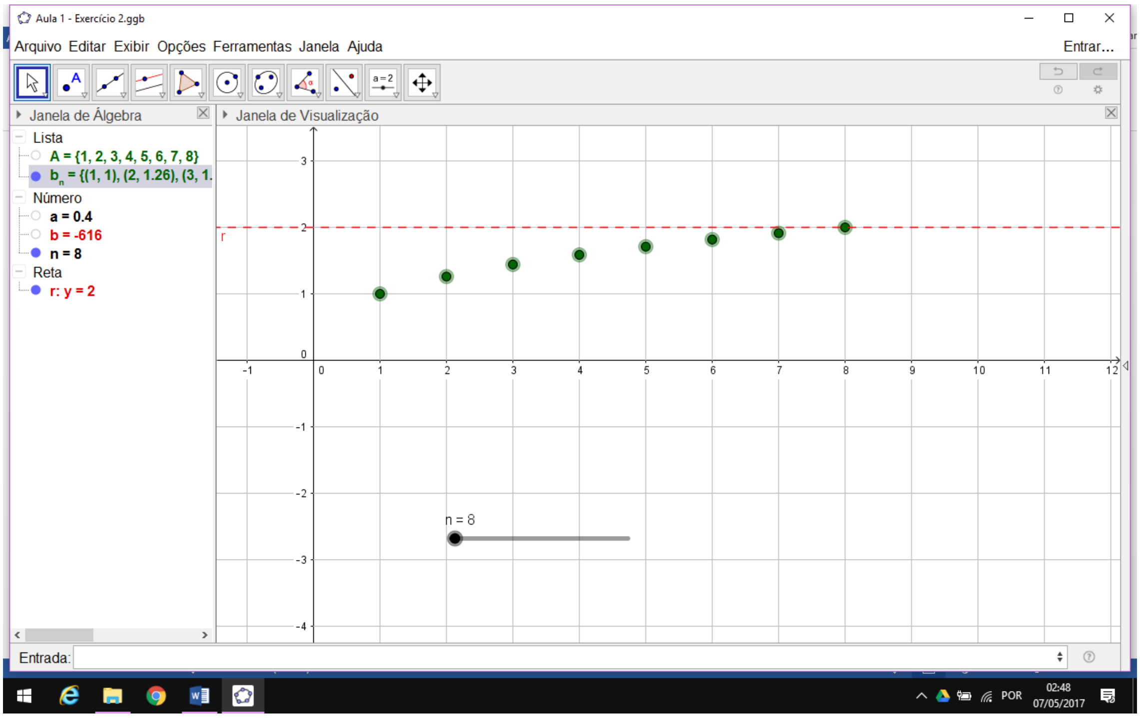
Questão 3:

Representação no Geogebra: A = Sequência[i, i, 1, n],

b_n = Sequência[(A, A^(1/5)), A, 1, n]

r = Reta[(n, n^(1/5), EixoX]

Imagem gerada:



Resposta 1: A sequência dada é limitada inferiormente por 1, mas não é limitada superiormente e, portanto, não é uma sequência limitada.

<u>Prova:</u>

Suponhamos por absurdo que (b_n) é limitada superiormente, assim sendo, existe um número real b tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $a_n \leq b$. Donde segue que $a_n = \sqrt[5]{n} \leq b \Rightarrow n \leq b^5$. Ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leq b^5$. Logo, $\mathbb{N}$ é limitado superiormente. (Contradição!)

Portanto, (b_n) não é limitada superiormente e, consequentemente, não é limitada.

Resposta 2: A sequência dada é monótona crescente, pois os valores dos seus termos aumentam a medida que se aumenta os valores de n.

<u>Prova:</u>

Temos que 1 ≤ n < n + 1, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $n < n + 1 \Rightarrow \sqrt[5]{n} < \sqrt[5]{n+1} \Rightarrow b_n < b_{n+1}$.

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, $b_n < b_{n+1}$.

Portanto, a sequência é monótona crescente.

Questão 4:

No Geogebra: A = Sequência[i, i, 1, n]

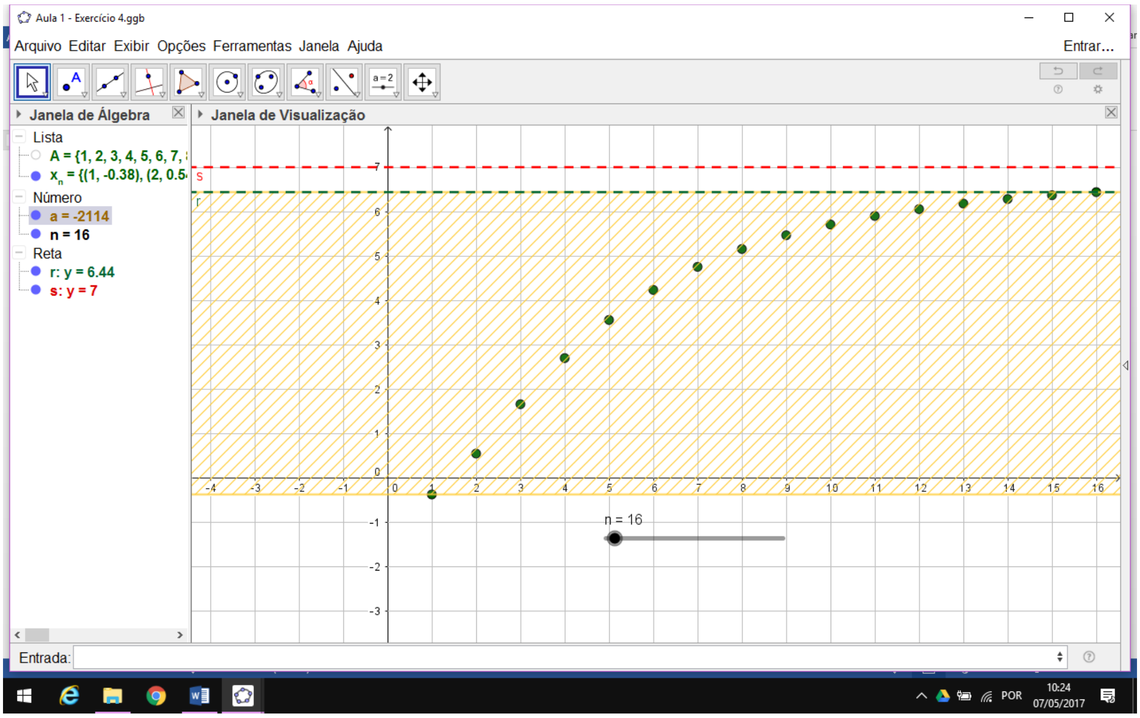
x_n = Sequência[(A, (7A^2 - 15)/(A^2 + 20)), A, 1, n]

s = Reta[(0, 7), EixoX]

r = Reta[(n, (7n^2 - 15)/(n^2 + 20), EixoX]

Para gerar a área tracejada digite na caixa de entrada e altere as características do objeto: IntegralEntre[-0.38095, -(x(r) / y(r)) x - z(r) / y(r), -10, 300]

Imagem gerada:



Resposta 1: A sequência dada é limitada inferiormente por -8/21 e é limitada superiormente por 7, logo é uma sequência limitada.

<u>Prova:</u>

Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que n = 1 representa o menor índice dos termos da sequência. Donde segue que $x_1 = \frac{7(1)^2-15}{(1)^2+20} = \frac{-8}{21}$, é o menor valor da sequência.

Logo, $\frac{-8}{21} \leq x_n$.

Temos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $7n^2 < 7n^2 + 155 \Rightarrow 7n^2 - 15 < 7n^2 + 140 \Rightarrow 7n^2 - 15 < 7(n^2 + 20)$. Segue que $\frac{7n^2 - 15}{n^2+20} < 7$. Ou seja, $x_n < 7$.

Daí, $\frac{-8}{21} \leq x_n < 7$.

Logo, $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq x_n \leq b$.

Portanto, a sequência (x_n) é limitada.

Resposta 2: A sequência dada é monótona crescente, pois os valores dos seus termos aumentam a medida que se aumenta os valores de n.

<u>Prova:</u>

Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que –155 < 310n.

Daí, –155 < 310n ⇒ 160 – 315 < 280n + 30n ⇒ –30n –315 < 280n –160.

Como $\mathrm{n} \geq 1$ podemos afirmar que: $7\mathrm{n}^4 + 14\mathrm{n}^3 + 147\mathrm{n}^2 > 0$.

Assim, $7n^4 + 14n^3 + 147n^2 - 30n - 315 < 7n^4 + 14n^3 + 147n^2 + 280n - 160$.

Fatorando as expressões: $(7n^2 - 15)(n^2 + 2n + 21) < (n^2 + 20)(7n^2 + 14n - 8)$.

Segue que: $\frac{7n^2-15}{n^2+20} < \frac{7n^2+14n-8}{n^2+2n+21} = \frac{7n^2+14n+(-15+7)}{(n^2+2n+1)+20} = \frac{7(n^2+2n+1)-15}{(n^2+2n+1)+20} = \frac{7(n+1)^2-15}{(n+1)^2+20}$.

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n < x_{n+1}$.

Portanto, a sequência é monótona crescente.

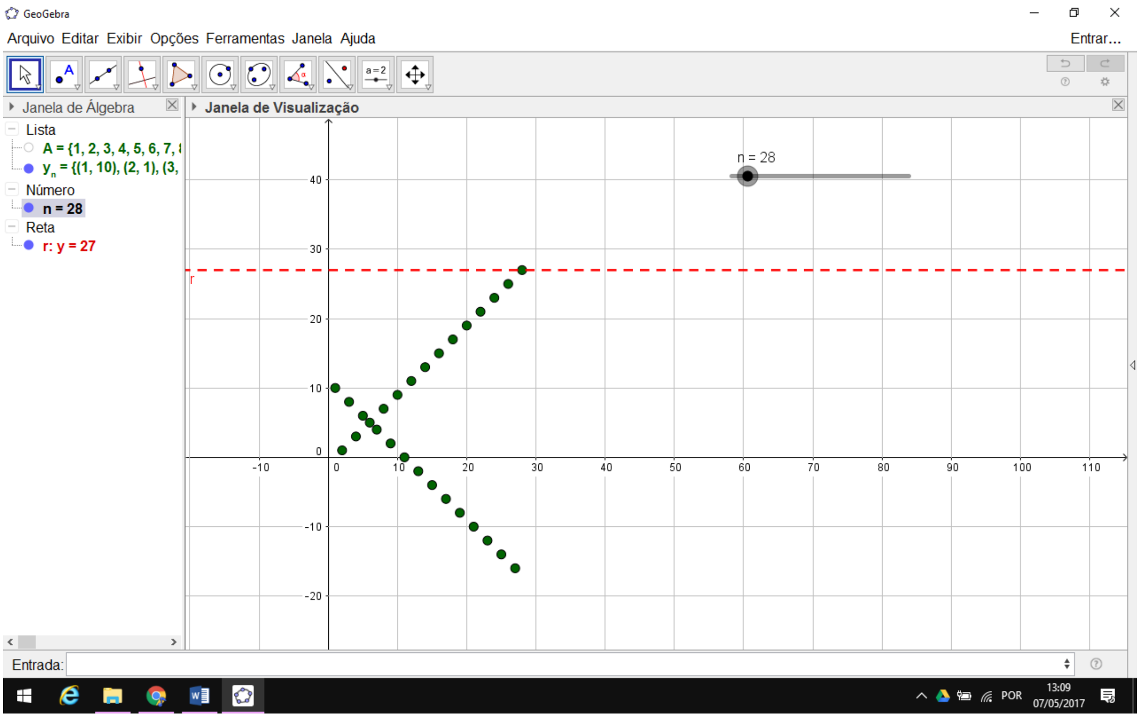
Questão 5:

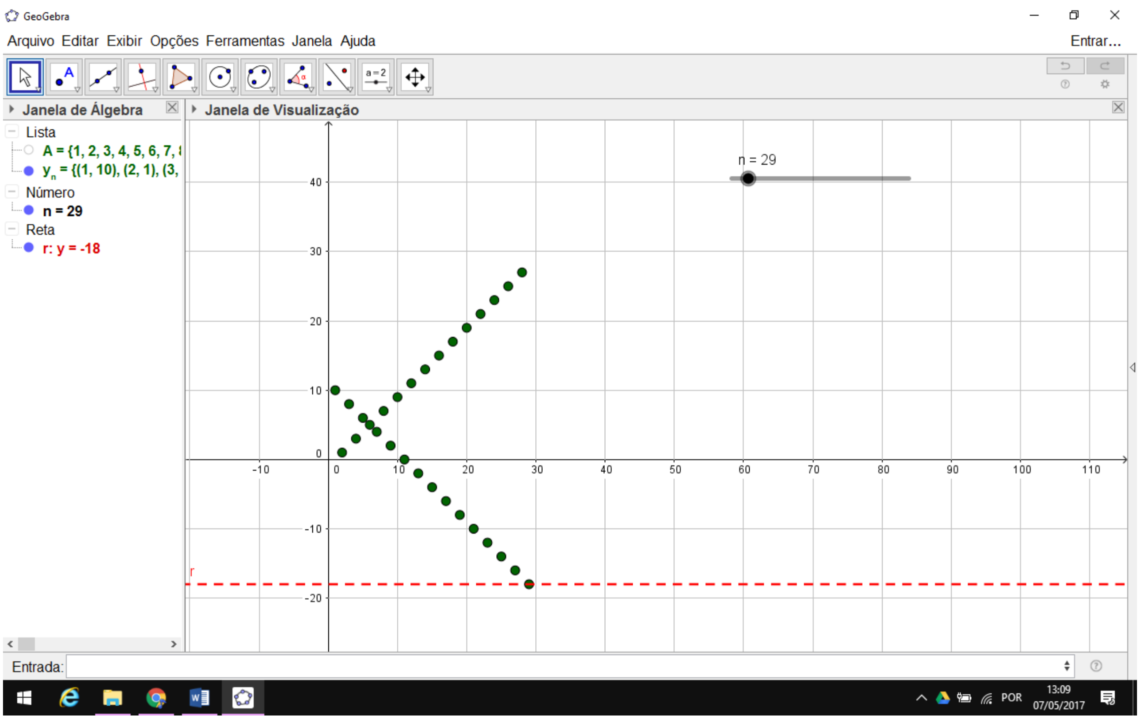
No Geogebra: A = Sequência[i, i, 1, n]

y_n = Sequência[(A, Se[Resto[A, 2] ≟ 1, 11 - A, A - 1]), A, 1, n]

r = Reta[(n, Se[Resto[n, 2] ≟ 1, 11 - n, n - 1]), EixoX]

Imagens geradas:





Resposta 1: A sequência dada não é limitada, porque para quaisquer valores reais existem termos da sequência maiores ou menores que eles.

Resposta 2: A sequência dada não é monótona, porque não é crescente, nem decrescente, nem não-crescente e nem não-decrescente.

II) <u>EXERCÍCIOS PROPOSTOS NA AULA 2</u>

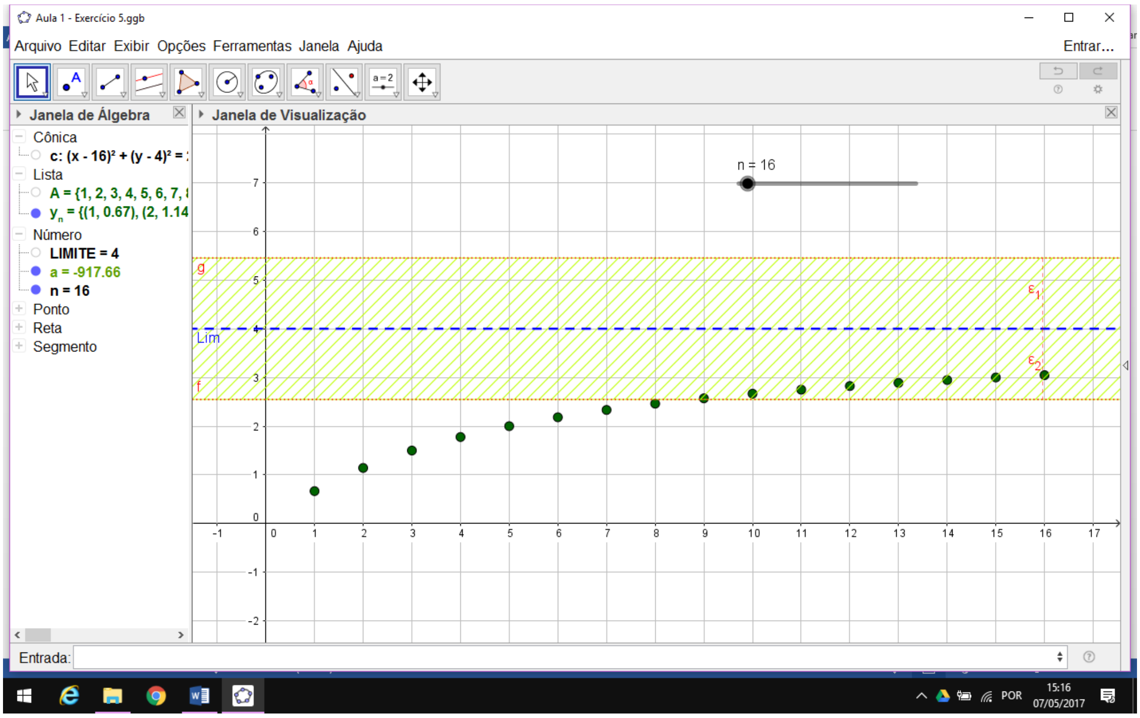
Questão 1:

a) Representação no Geogebra: A = Sequência[i, i, 1, n]

x_n = Sequência[(A, 4A / (A + 5)), A, 1, n]

LIMITE = Limite[4x / (x + 5), infinity]

Imagem gerada:



Utilizando o software Geogebra verificamos que o limite da sequência é igual a 4.

<u>Demonstração:</u>

Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, tomemos $n_0 \geq \frac{|-20|-5\varepsilon}{\varepsilon}$.

Existe $n_0 \in \mathbb{N},\ n > n_0 \geq \frac{|-20|-5\varepsilon}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{|-20|-5\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{|-20|}{\varepsilon} - 5$.

Daí, $n + 5 > \frac{|-20|}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n+5} < \frac{\varepsilon}{|-20|}$.

Como $n > 0, temos\ que\ n + 5 > 0\ e\ \frac{1}{n+5} > 0, logo\ \frac{1}{n+5} = \left|\frac{1}{n+5}\right|$.

$$|-20|\left|\frac{1}{n+5}\right| < \frac{\varepsilon}{|-20|}|-20| \Rightarrow \left|\frac{-20}{n+5}\right| = \left|\frac{(4n-4n)-20}{n+5}\right| = \left|\frac{4n-4(n+5)}{n+5}\right| = \left|\frac{4n}{n+5} - 20\right| < \varepsilon$$

Logo, $|x_n - 20| < \varepsilon$.

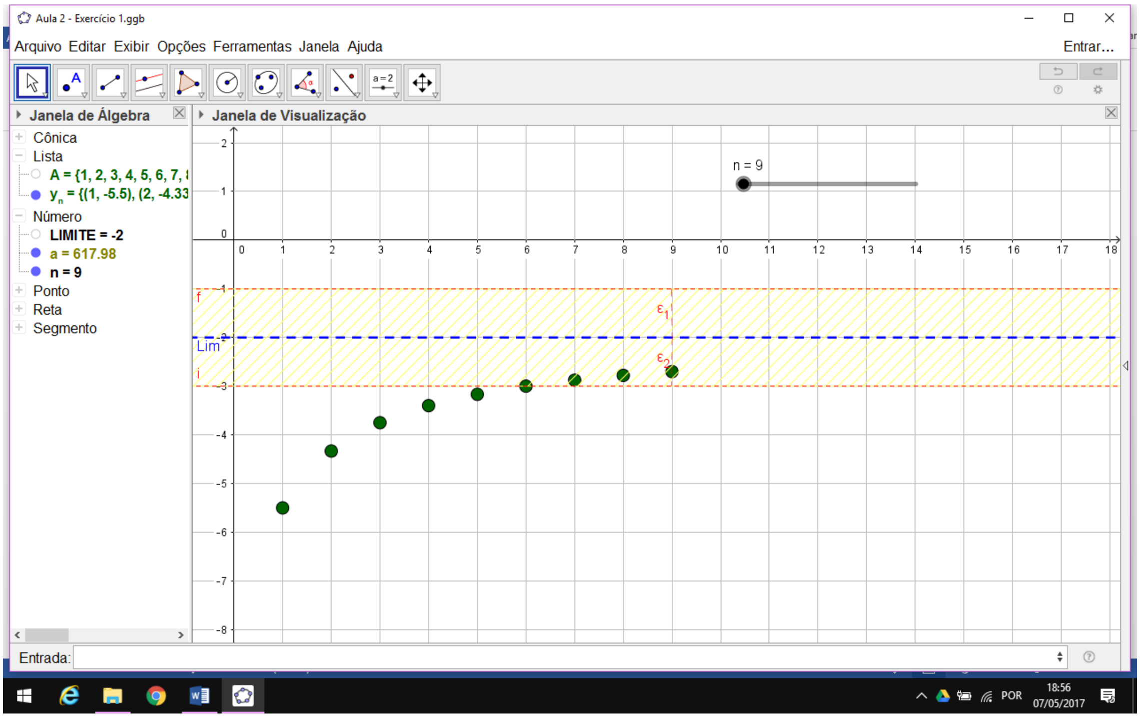
Portanto, lim $x_n = 4$.

b) Representação no GeoGebra: A = Sequência[i, i, 1, n]

y_n = Sequência[(A, -2 - 7A! / (A + 1)!), A, 1, n]

LIMITE = Limite[-2 – 7x! / (x + 1)!), infinity]

Imagem gerada:



Utilizando o software Geogebra verificamos que o limite da sequência é igual a -2.

Demonstração:

Dado $\mathcal{E} > 0$ qualquer, tomemos $n_0 \geq \frac{7}{\mathcal{E}} - 1$.

Existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n > n_0 \geq \frac{7}{\mathcal{E}} - 1 \Rightarrow n > \frac{7}{\mathcal{E}} - 1$.

Daí, $n + 1 > \frac{7}{\mathcal{E}} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{\mathcal{E}}{7} \Rightarrow \frac{7}{n+1} < \mathcal{E}$.

Como $n + 1 > 0$ $temos\ que$ $\frac{7}{n+1} > 0$ $e\ logo$ $\frac{7}{n+1} = \left|\frac{7}{n+1}\right|$.

$\left|\frac{7}{n+1}\right| = \left|\frac{7n!}{(n+1)n!}\right| = \left|(-2+2) + \frac{7n!}{(n+1)!}\right| = \left|-2 + \frac{7n!}{(n+1)!} - (-2)\right| < \mathcal{E}$.

Logo, $|y_n - (-2)| < \mathcal{E}$.

Portanto, lim y_n = -2.

Questão 2:

<u>Demonstração:</u>

Seja (z_n) uma sequência convergente. Daí, lim z_n = a.

Isso significa que para qualquer $\mathcal{E} > 0$, existe um número natural n_0 tal que n > n_0 implica que $z_n \in (a - \mathcal{E}, a + \mathcal{E})$.

Tomemos a = min{$z_1, z_2, z_3, \ldots, a - \mathcal{E}, a + \mathcal{E}$}e b = máx{$z_1, z_2, z_3, \ldots, a - \mathcal{E}, a + \mathcal{E}$}.

Logo, existem números reais a e b tais que $z_n \in [a, b]$.

Conclui-se que a sequência (z_n) é limitada.

Portanto, como (z_n) é uma sequência convergente qualquer, podemos afirmar que toda sequência convergente é limitada.

Questão 3:

a) <u>Demonstração:</u>

Sejam $a \in \mathbb{R}$ e lim x_n = b.

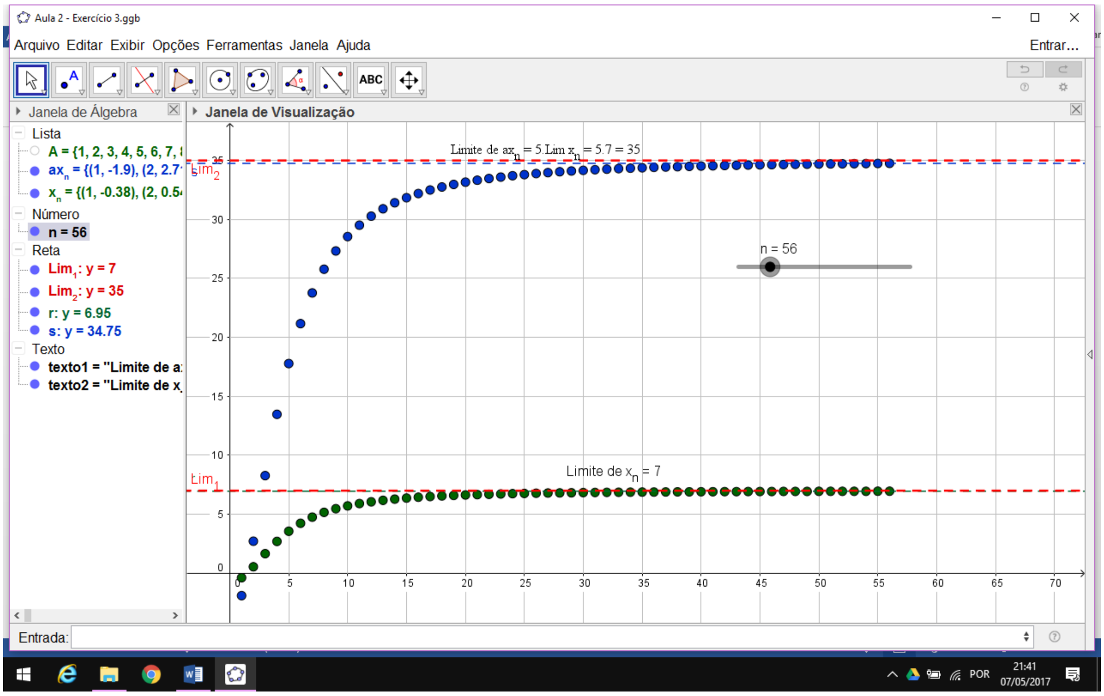
Como lim x_n = b, para qualquer $\mathcal{E} > 0$, existe um número natural n_0 tal que n > n_0 implica que $x_n \in \left(b - \frac{\mathcal{E}}{a}, b + \frac{\mathcal{E}}{a}\right)$. Ou seja, $b - \frac{\mathcal{E}}{a} < x_n < b + \frac{\mathcal{E}}{a}$. Multiplicando os membros das desigualdades por a temos: $ab - \mathcal{E} < ax_n < ab + \mathcal{E}$. Logo, $ab - \mathcal{E} < ax_n \in (ab - \mathcal{E}, ab + \mathcal{E})$.

Portanto, se $a \in \mathbb{R}$ e lim x_n = b então lim ax_n = ab.

b) <u>Exemplo:</u>

Seja a = 5 e $x_n = \frac{7n^2 - 15}{n^2+20}$. Como lim x_n = 7, pelo item a, temos lim $5x_n$ = 5.7 = 35.

Imagem gerada:



Comando para a caixa de entrada:

A = Sequência[i, i, 1, n]

x_n = Sequência[(A, (7A² - 15) / (A² + 20)), A, 1, n]

r = Reta[(n, (7n² - 15) / (n² + 20)), EixoX]

Lim_1 = Reta[(0, 7), EixoX]

ax_n = Sequência[(A, 5(7A² - 15) / (A² + 20)), A, 1, n]

s = Reta[(n, 5(7n² - 15) / (n² + 20)), EixoX]

Lim_2 = Reta[(0, 35), EixoX]

Questão 4:

a) <u>Demonstração:</u>

Sejam (y_n) uma sequência limitada e seja lim x_n = 0.

Dado $\varepsilon > 0$ qualquer.

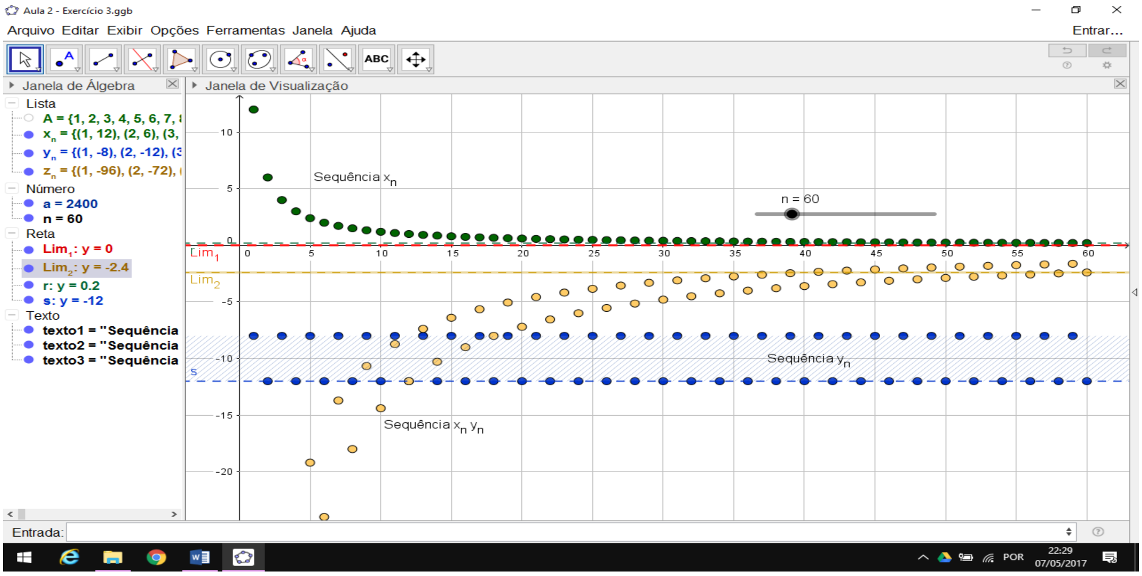
Como (y_n) é limitada, existe um número real c tal que $y_n < c$, para todo n natural.

Sendo lim $x_n = 0$, existe um número natural n_0, tal que n > n_0 implica que $x_n < \frac{\varepsilon}{c}$. Logo, $x_n . y_n < \frac{\varepsilon}{c} . c = \varepsilon$.

Portanto, se (y_n) é uma sequência limitada e seja lim $x_n = 0$ então lim $x_n . y_n =$ 0.

b) Exemplo:

Seja $y_n = -10 - (-1)^n$, $x_n = \frac{12}{n}$ e o lim $x_n = 0$, pelo item a, temos lim $x_n . y_n =$ 0.



Comando para a caixa de entrada:

A = Sequência[i, i, 1, n]

x_n = Sequência[(A, 12 / A), A, 1, n]

y_n = Sequência[(A, -10 - 2(-1)^A), A, 1, n]

z_n = x_n . y_n = Sequência[(A, (12 (-10 - 2(-1)^A)) / A), A, 1, n]

r = Reta[(n, 12 / n), EixoX]

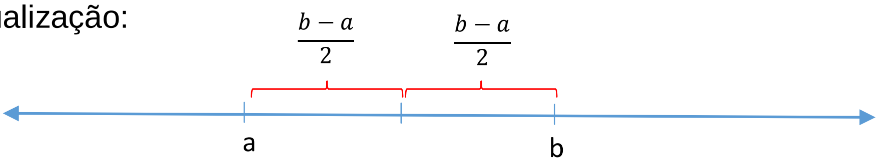
s = Reta[(n, -10 - 2(-1)^n), EixoX]

Lim_1 = Reta[(0, 0), EixoX]

Lim_2 = Reta[(n, 12(-10 - 2(-1)^n) / n), EixoX]

Questão 5:

Visualização:



<u>Demonstração:</u>

Seja lim x_n = a e lim x_n = b.

Dado a ≠ b, tomemos $\mathcal{E} = \frac{b-a}{2}$.

Logo, A = (a - Ɛ, a + Ɛ) e B = (b - $\mathcal{E}, b + \mathcal{E}$) são intervalos disjuntos.

Como lim x_n = a, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que n > n_0 implica que $x_n \in A$.

Donde segue que $x_n \notin B$.

Portanto, se a ≠ b então o limite de x_n não é b.

Questão 6:

<u>Demonstração:</u>

Seja lim x_n = a.

Dado $\mathcal{E} > 0$ qualquer, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que n > n_0 implica que $x_n \in (a - \mathcal{E}, a + \mathcal{E})$.

Ou seja, $a - \mathcal{E} < x_n < a + \mathcal{E}$. Subtraindo a dos membros da desigualdade temos: $-\mathcal{E} < x_n - a < \mathcal{E}$. Logo, $x_n - a \in (-\mathcal{E}, +\mathcal{E})$.

Portanto, se lim x_n = a então lim $(x_n - a) = 0$.

Questão 7:

i) <u>Demonstração:</u>

Sejam lim x_n = a e lim y_n = b.

Dado $\mathcal{E} > 0$ qualquer.

Como lim x_n = a, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que n > n_1 implica que $|x_n - a| < \frac{\mathcal{E}}{2}$.

Como lim y_n = b, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que n > n_1 implica que $|y_n - b| < \frac{\mathcal{E}}{2}$.

Tomemos $n_0 = máx\{n_1, n_2\}$.

Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que n > n_1 implica que $|x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\mathcal{E}}{2} + \frac{\mathcal{E}}{2} = \mathcal{E}$.

Segue que: $|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \mathcal{E}$

Portanto, lim $(x_n + y_n)$ = a + b.

ii) Demonstração:

Sejam lim x_n = a e lim y_n = b.

Dado $\varepsilon > 0$ qualquer.

Como lim x_n = a, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que n > n_1 implica que $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Como lim y_n = b, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que n > n_1 implica que $|-(y_n + b)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tomemos $n_0 = max\{n_1, n_2\}$.

Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que n > n_1 implica que $|x_n - a| + |-(y_n + b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Segue: $|(x_n - y_n) - (a - b)| = |(x_n - a) - (y_n + b)| \leq |x_n - a| + |-(y_n + b)| < \varepsilon$. Portanto, lim $(x_n - y_n) = a - b$.

iii) Demonstração:

Sejam lim x_n = a e lim y_n = b.

Observe que:

$\lim(x_n\, y_n - ab) = \lim(x_n\, y_n - bx_n + bx_n - ab) = \lim(x_n\,(y_n - b) + b(x_n - a))$

Pelo item i, segue que:

$\lim(x_n\,(y_n - b) + b(x_n - a)) = \lim\, x_n\,(y_n - b) + \lim\, b(x_n - a)$

Como lim x_n = a e lim y_n = b , pelo exercício 6, temos que: lim $(x_n - a\,)$ = 0 e lim $(y_n - b)$ = 0. Donde segue, pelo exercício 3, que: $\lim\, b(x_n - a) = 0$ e $\lim\, x_n\,(y_n - b) = 0$

Logo, $\lim(x_n\, y_n - ab) = \lim\, x_n\,(y_n - b) + \lim\, b(x_n - a) = 0$.

Sendo $\lim(x_n\, y_n - ab) = 0$, deduz-se, pelo exercício 6, que $\lim(x_n\, y_n) = ab$.

iv) Demonstração:

Sejam lim x_n = a e lim y_n = b.

Observe que:

$$\lim\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = \lim\left(\frac{bx_n - ay_n}{by_n}\right) = \lim\left((bx_n - ay_n).\frac{1}{by_n}\right)$$

Como lim x_n = a e lim y_n = b , pelo exercício 3, temos que: lim bx_n = ab e lim ay_n = ab, logo, lim $(bx_n - ay_n)$ = ab – ab = 0.

Observe ainda que: $\left(\frac{1}{by_n}\right)$ é uma sequência limitada.

Assim, pelo exercício 4, temos: $\lim\left((bx_n - ay_n).\frac{1}{by_n}\right) = 0$, donde, $\lim\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = 0$. Como $\lim\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = 0$, deduz-se, pelo exercício 6, que $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$.

Questão 8:

i) Seja $x_n = \frac{-3n+12}{n}$, $y_n = \frac{6n-10}{n}$.

O lim $x_n = -3$, o lim $y_n = 6$ e o lim $(x_n + y_n)$ = lim x_n + lim y_n = −3 + 6 = 3.

Representação no Geogebra:

A = Sequência[i, i, 1, n]

x_n = Sequência[(A, -5 + 12 / A), A, 1, n]

y_n = Sequência[(A, 6 - 10 / A), A, 1, n]

z_n = Sequência[(A, 3 + 2 / A), A, 1, n]

Lim_1 = Reta[(n, -5 + 12 / n), EixoX]

Lim_2 = Reta[(n, 6 - 10 / n), EixoX]

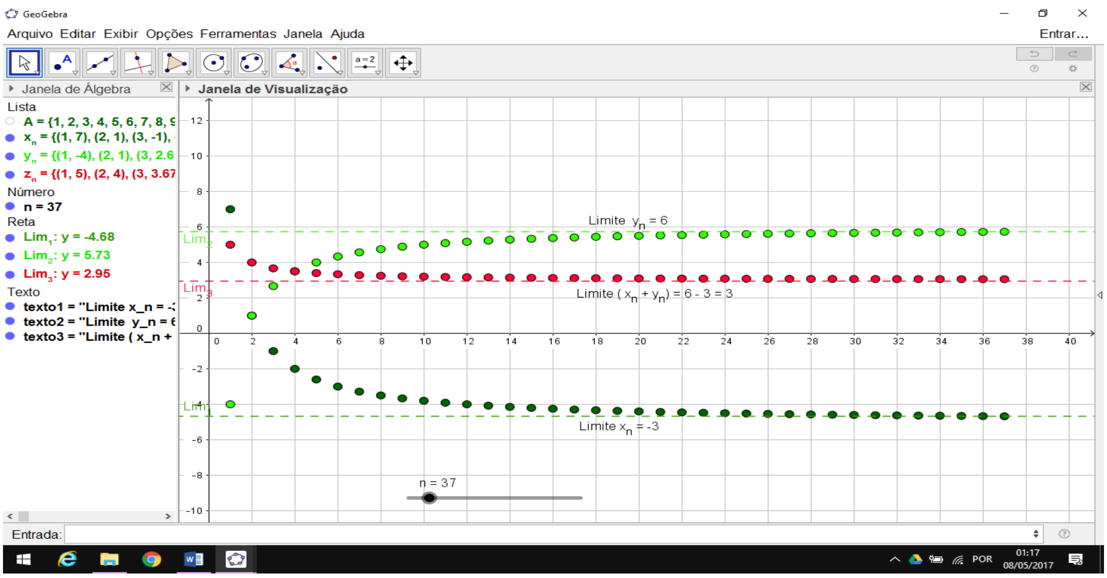
Lim_3 = Reta[(n, 3 - 2 / n), EixoX]

a = Limite[(-3x + 12)/x, ∞]

b = Limite[(6x - 10)/x, ∞]

c = a + b ou c = Limite[(3x + 2) / x, ∞]

Imagem gerada:



ii) Seja $x_n = \frac{n+2\sqrt[3]{n}}{n}$, $y_n = \frac{-2n^4+10}{n^4}$.

O lim $x_n = 1$, o lim $y_n = -2$ e o lim $(x_n - y_n)$ = lim $x_n -$ lim y_n = $1 - (-2)$ = 3.

Representação no Geogebra:

A = Sequência[i, i, 1, n]

x_n = Sequência[(A, (A + 2A^(1 / 3)) / A), A, 1, n]

y_n = Sequência[(A, (-2A⁴ + 10) / A⁴), A, 1, n]

z_n = Sequência[(A, (A + 2A^(1 / 3)) / A - (-2A⁴ + 10) / A⁴), A, 1, n]

Lim_1 = Reta[(n, (n + 2n^(1 / 3)) / n), EixoX]

Lim_2 = Reta[(n, (-2n⁴ + 10) / n⁴), EixoX]

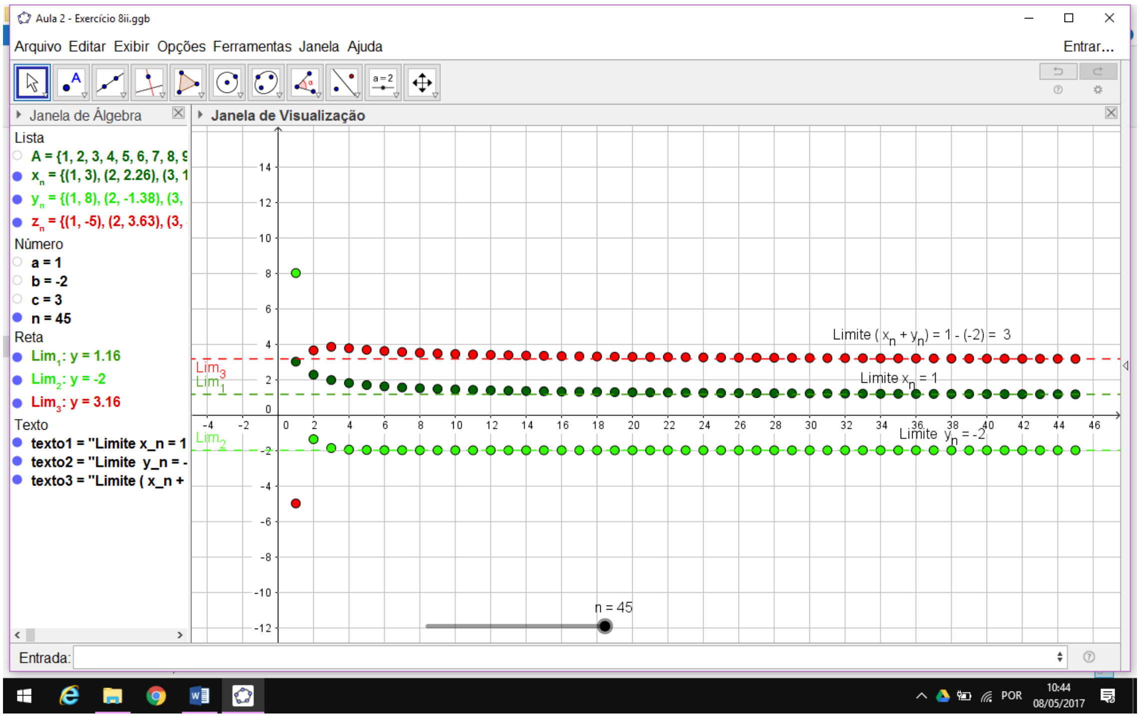
Lim_3 = Reta[(n, (n + 2n^(1 / 3)) / n) - (-2n⁴ + 10) / n⁴ , EixoX]

a = Limite[(x + 2x^(1 / 3)) / x, ∞]

b = Limite[(-2x⁴ + 10) / x⁴ , ∞]

c = a - b

Imagem gerada:



iii) Seja $x_n = \frac{7n^2-15}{n^2+20}$, $y_n = \frac{5n^3-1}{n^3}$.

O lim $x_n = 7$, o lim $y_n = 5$ e o lim $(x_n \,.\, y_n)$ = lim x_n . lim y_n = 7 . 5 = 35.

Representação no Geogebra:

A = Sequência[i, i, 1, n]

x_n = Sequência[(A, (7A² - 15) / (A² + 20)), A, 1, n]

y_n = Sequência[(A, 5 - 1 / A³), A, 1, n]

z_n = Sequência[(A, (5 - 1 / A³) (7A² - 15) / (A² + 20)), A, 1, n]

Lim_1 = Reta[(n, (7n² - 15) / (n² + 20)), EixoX]

Lim_2 = Reta[(n, 5 - 1 / n³), EixoX]

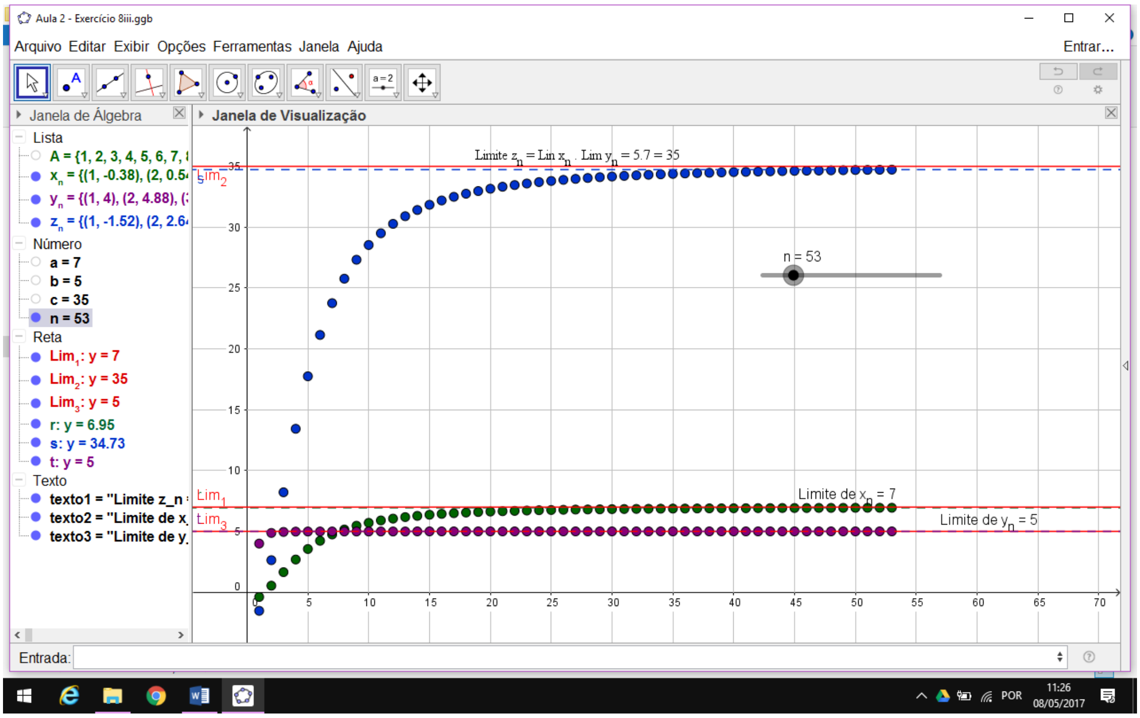
Lim_3 = Reta[(n, (5 - 1 / n³) (7n² - 15) / (n² + 20)), EixoX]

a = Limite[(7x² - 15) / (x² + 20), ∞]

b = Limite[5 - 1 / x³, ∞]

c = a.b

Imagem gerada:



iv) Seja $x_n = \frac{6(n-7sen\, n)}{n}$, $y_n = \frac{3n^3-1}{12n^3-7}$.

O lim $x_n = 6$, o lim $y_n = \frac{1}{4}$ e o lim $\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim x_n}{\lim y_n} = \frac{6}{\frac{1}{4}} = 6 \, . \, 4 = 24$.

Representação no Geogebra:

A = Sequência[i, i, 1, n]

x_n = Sequência[(A, 6(A - 7sen(A)) / A), A, 1, n]

y_n = Sequência[(A, (3A³ - 1) / (12A³ - 7)), A, 1, n]

z_n = Sequência[(A, (6(A - 7sen(A)) / A) / ((3A³ - 1) / (12A³ - 7))), A, 1, n]

Lim_1 = Reta[(n, 6(n - 7sen(n)) / n), EixoX]

Lim_2 = Reta[(n, (3n³ - 1) / (12n³ - 7)), EixoX]

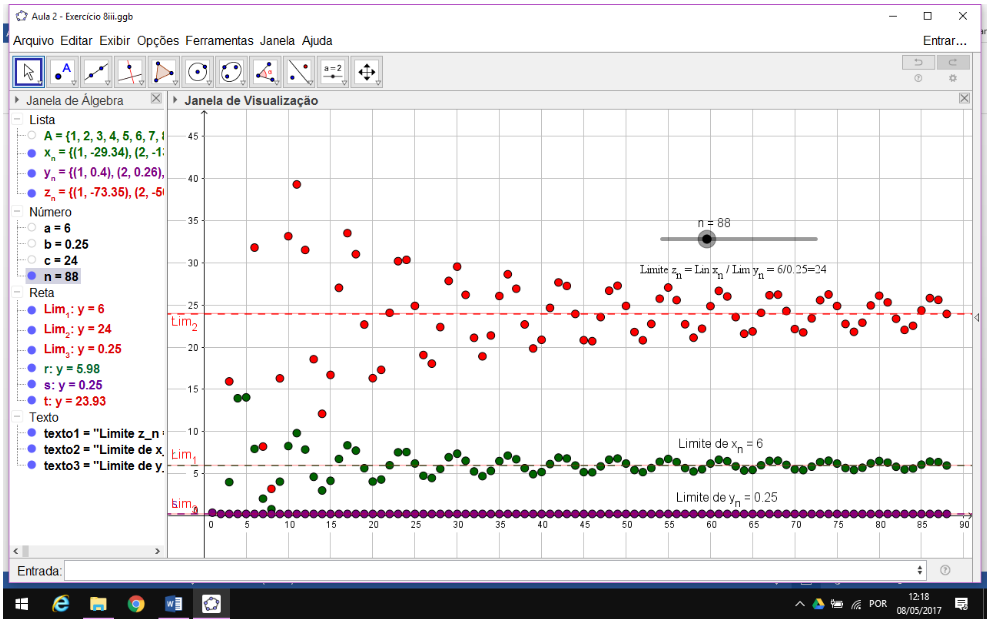
Lim_3 = Reta[(n, (6(n - 7sen(n)) / n) / ((3n³ - 1) / (12n³ - 7))), EixoX]

a = Limite[6(x - 7sen(x)) / x, ∞]

b = Limite[(3x³ - 1) / (12x³ - 7), ∞]

c = a/b

Imagem gerada:



III) EXERCÍCIOS PROPOSTOS NA AULA 3

Questão 1:

a) Representação no Geogebra:

A = Sequência[i, i, 1, n]

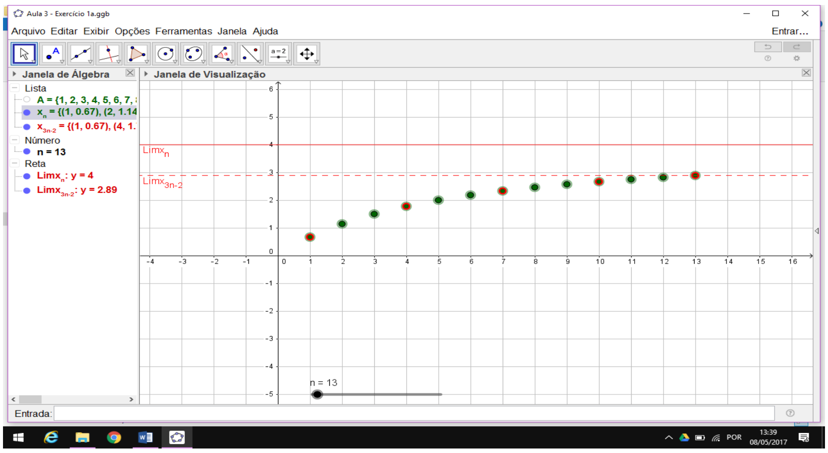
x_n = Sequência[(A, (4A) / (A + 5)), A, 1, n]

x_{3n-2} = Sequência[(A, (4A)/(A + 5)), A, 1, n, 3]

Limx_n = Reta[(0, 4), EixoX]

Limx_{3n-2} = Reta[(n, (4n) / (n + 5)), EixoX]

Imagem gerada:



Valores da sequência e de sua subsequência:

x_n	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{16}{9}$	2	$\frac{24}{11}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{32}{13}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{48}{17}$	$\frac{26}{9}$	$\frac{56}{19}$	3	$\frac{64}{21}$	$\frac{72}{23}$	$\frac{19}{6}$	$\frac{16}{5}$	...
x_{3n-2}	$\frac{2}{3}$			$\frac{16}{9}$			$\frac{7}{3}$			$\frac{8}{3}$			$\frac{26}{9}$			$\frac{64}{21}$			$\frac{16}{5}$	...
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	...

b) No Geogebra: A = Sequência[i, i, 1, n]

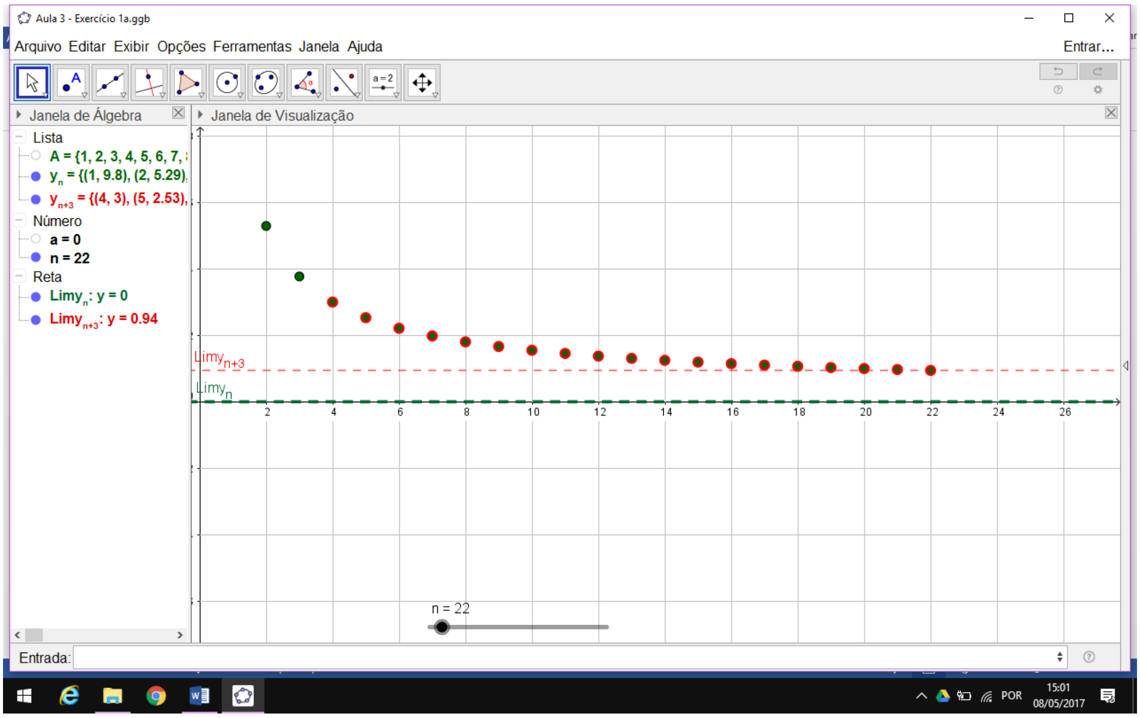
y_n = Sequência[(A, 4sqrt(A + 5) / A), A, 1, n]

y_{n + 3} = Sequência[(A, 4sqrt(A + 5)/A), A, 4, n]

Limy_n = Reta[(0, 0), EixoX]

Limy_{n + 3} = Reta[(n, 4sqrt(n + 5) / n), EixoX]

Imagem gerada:

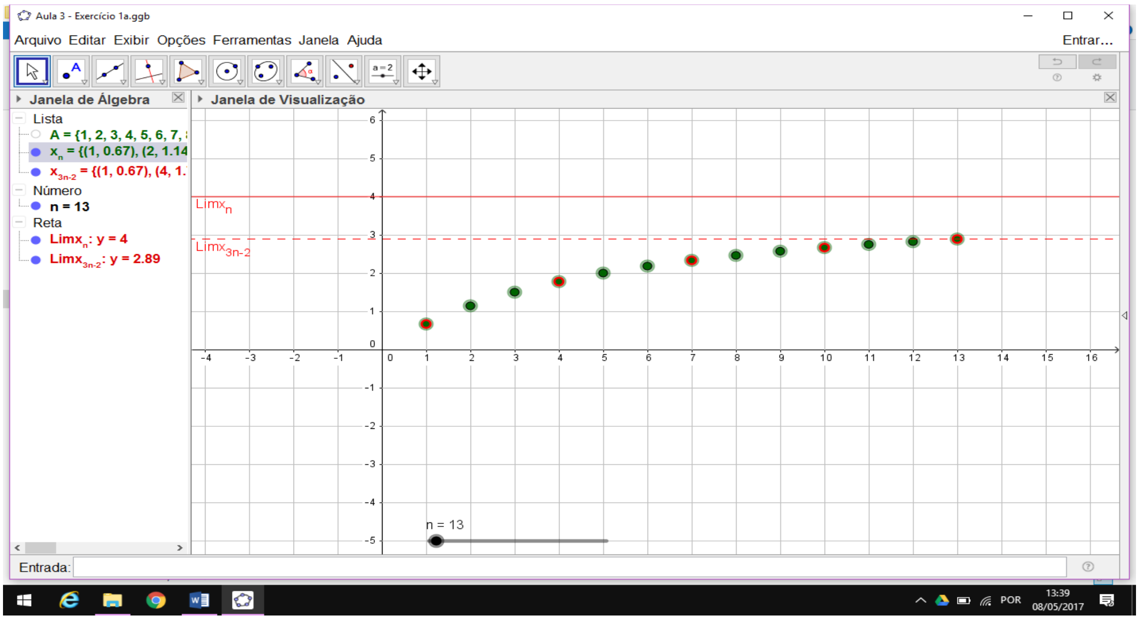


Valores da sequência e de sua subsequência:

x_n	$4\sqrt{6}$	$2\sqrt{7}$	$\frac{8\sqrt{2}}{3}$	3	$\frac{4\sqrt{10}}{5}$	$\frac{4\sqrt{11}}{6}$	$\frac{8\sqrt{2}}{7}$	$\frac{\sqrt{13}}{2}$	$\frac{4\sqrt{14}}{5}$	...
x_{n+3}				3	$\frac{4\sqrt{10}}{5}$	$\frac{4\sqrt{11}}{6}$	$\frac{8\sqrt{2}}{7}$	$\frac{\sqrt{13}}{2}$	$\frac{4\sqrt{14}}{5}$	...
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

Questão 2:

Vamos utilizar a sequência dada no item a do exercício anterior, como exemplo. Observe que a sequência é monótona decrescente e que sua subsequência é convergente.



<u>Demonstração:</u>

Seja (x_n) uma sequência monótona crescente que possui uma subsequência (x_{n_k}) convergindo para a.

Como (x_{n_k}) é uma subsequência de (x_n) e $x_{n_k} \to a$, temos que: dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > n_0$ implica que todos os termos de (x_n) com índice $n \geq n_k$ pertencem ao intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Sendo (x_n) uma sequência monótona crescente, para todo índice n natural, neste caso, $n > n_k$ temos que $x_n < x_{n+1} \leq x_{n_k}$.

Logo, existe n > $n_k > n_0$ tal que todo $x_n < x_{n_k} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Portanto, se (x_n) uma sequência monótona que possui uma subsequência convergente, a sequência é, ela própria, convergente.

Questão 3:

Resposta: Podemos utilizar como exemplo a sequências dadas no exercício 1 desta aula.

Questão 4:

<u>Demonstração:</u>

Sejam $x_{2n} \to a$ e $x_{2n-1} \to a$ subsequências de (x_n).

Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existem n_1 e $n_2 \in \mathbb{N}$, tais que: $n > n_1$ implica que $x_{2n} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e $n > n_2$ implica que $x_{2n-1} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Tomemos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

Logo, existe um número natural n_0 tal que $n > n_0$, implica que todos os termos de índice par e todos os termos de índice ímpar da sequência pertencem ao intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Como $(x_{2n})\ e\ (x_{2n-1})$ são subsequências de (x_n), concluímos que todos os termos de $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Portanto, se $x_{2n} \to a$ e $x_{2n-1} \to a$ então $x_n \to a$.

Questão 5:

<u>Demonstração:</u>

Sejam lim $x_n =$ lim $y_n = a$ e $x_n \leq z_n \leq y_n$.

Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tais que: $n > n_1$ implica que $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e $n > n_2$ implica que $y_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Tomemos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

Como por hipótese, $x_n \leq z_n \leq y_n$, temos que existe um número natural n_0 tal que $n > n_0$ implica que $a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon$. Donde, $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$.

Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$, implica que $z_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Portanto, lim $x_n =$ lim $y_n = a$ e $x_n \leq z_n \leq y_n$ então $z_n \to a$.

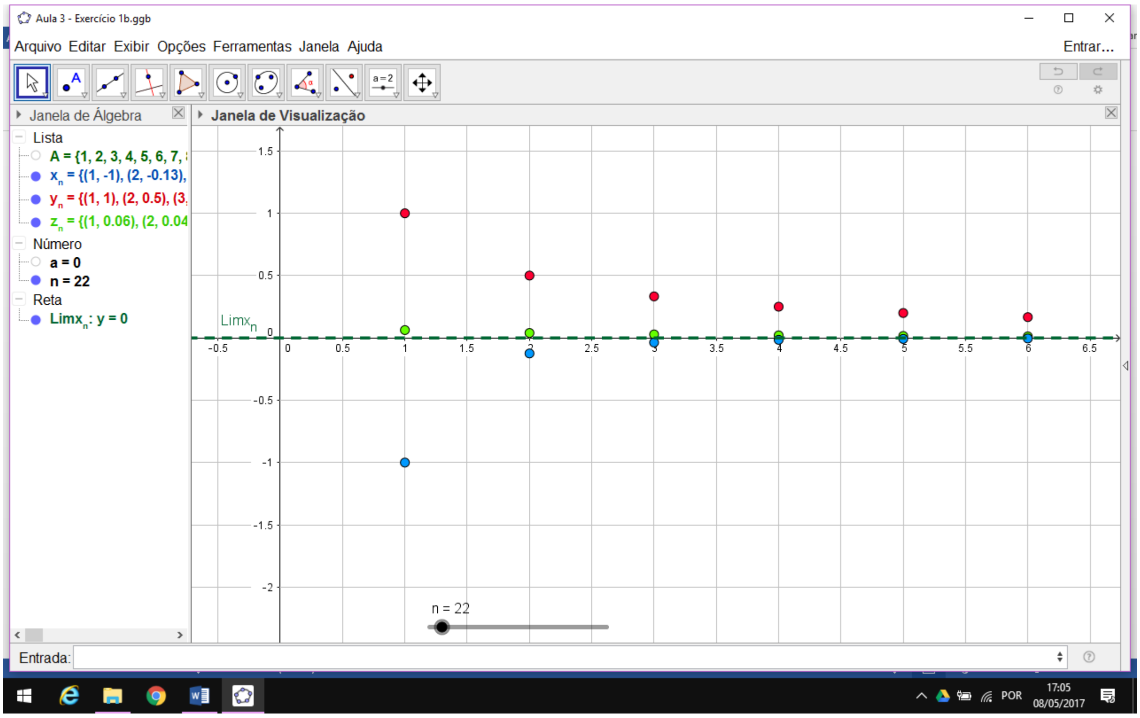
Questão 6:

<u>Demonstração:</u>

Sejam $x_n = -\frac{1}{n^3}$, $y_n = \frac{1}{n}$ e $z_n = \frac{1}{n^2}$.

Observe que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $n \leq n^2 \leq n^3$, donde segue que $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n^2} \geq -\frac{1}{n^3}$. Logo, $x_n \leq z_n \leq y_n$. Observe ainda que, $\lim x_n = \lim y_n = 0$.

Visualização:

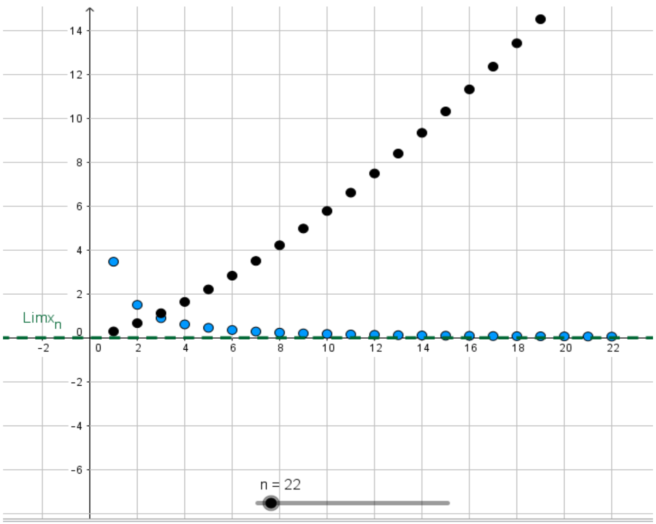


IV) <u>EXERCÍCIOS PROPOSTOS NA AULA 4</u>

Questão 1:

Visualizando:

Tomemos $x_n = \frac{6}{n\sqrt{n+2}}$. Observe que $\lim x_n = 0$. Dai, $\frac{1}{x_n} = \frac{n\sqrt{n+2}}{6}$ e $\lim \frac{1}{x_n} = +\infty$.



Prova:

(⇒) Sejam $x_n > 0$, para todo n e $\lim x_n = 0$.

Assim, temos que dado $\varepsilon > 0$, qualquer, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $|x_n| < \varepsilon$. Como para todo n, $x_n > 0$, temos $|x_n| = x_n < \varepsilon$.

Daí, dado A > 0 qualquer, tome $\varepsilon = \frac{1}{A}$.

Segue que $x_n < \varepsilon = \frac{1}{A}$, donde segue que: $\frac{1}{x_n} > A$.

Logo, se $x_n > 0$, para todo n e $\lim x_n = 0$ então $\lim \frac{1}{x_n} = +\infty$. (I)

(⇐) Sejam $x_n > 0$, para todo n e $\lim \frac{1}{x_n} = +\infty$.

Dado A > 0, qualquer, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $\frac{1}{x_n} > A$.

Assim, $x_n < \frac{1}{A}$. Como para todo n, $x_n > 0$, temos $|x_n| = x_n < \frac{1}{A}$.

Daí, dado ε > 0 qualquer, tome $A = \frac{1}{\varepsilon}$. Segue que $|x_n| = x_n < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$, donde segue que: $|x_n| < \varepsilon$.

Logo, se $x_n > 0$, para todo n e $\lim \frac{1}{x_n} = +\infty$ então $\lim x_n = 0$. (II)

Portanto, de (I) e (II), conclui-se que se para todo n, $x_n > 0$, $\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \lim \frac{1}{x_n} = +\infty$.

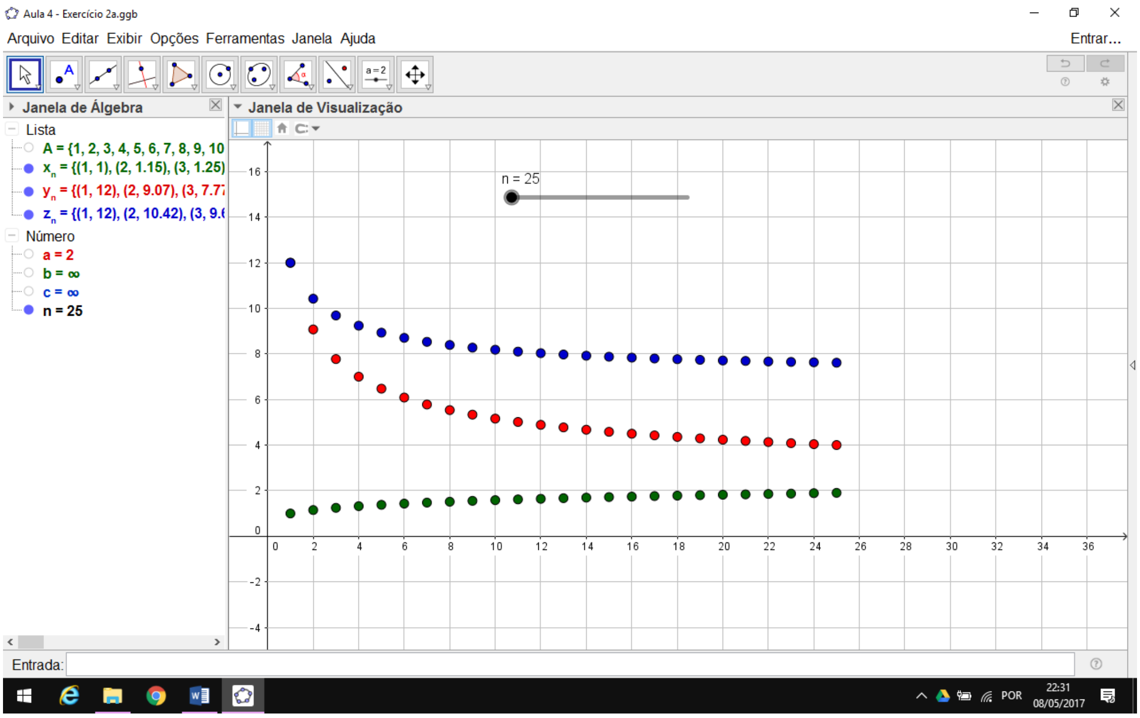
Questão 2:

a) Sejam as sequências: $x_n = \sqrt[5]{n}$ e $y_n = 2 + \frac{10}{\sqrt{n}}$. Observe que: $\lim x_n = +\infty$ e que $y_n > 2$, para todo n natural.

No Geogebra:

```
A = Sequência[i, i, 1, n]
x_n = Sequência[(A, A^(1 / 5)), A, 1, n]
y_n = Sequência[(A, 2 + 10 / sqrt(A)), A, 1, n]
z_n = Sequência[(A, A^(1/5)(2 + 10/sqrt(A))), A, 1, n]
a = Limite[x^(1 / 5), ∞]
b = Limite[2 + 1 / sqrt(x), ∞]
c = Limite[x^(1 / 5) (2 + 10 / sqrt(x)), ∞]
```

Imagem gerada:



a.1) Sendo $x_n = \sqrt[5]{n}$ e $y_n = 2 + \frac{10}{\sqrt{n}}$. Temos que: $\lim x_n = +\infty$ e que $y_n > 2$, para todo n natural. Daí, $\lim x_n \,.\, y_n = \lim x_n \,.\, \lim\ y_n = +\infty \,.\, 2 = +\infty$.

a.2) **Demonstração:**

Sejam $\lim x_n = +\infty$ e suponhamos que exista c > 0 tal que $y_n > c\,, para\ todo\ n\ \in \mathbb{N}$.

Como $\lim x_n = +\infty$, dado A > 0 qualquer, existe um número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $x_n > \frac{A}{c}$.

Sendo $y_n > c\,, para\ todo\ n\ \in \mathbb{N}$ segue que $x_n \,.\, y_n > \frac{A}{c} \,.\, c = A$.

Logo, $\lim x_n \,.\, y_n = +\infty$.

Portanto, se $\lim x_n = +\infty$ e existe c > 0 tal que $y_n > c\,, para\ todo\ n\ \in \mathbb{N}$ então $\lim x_n \,.\, y_n = +\infty$.

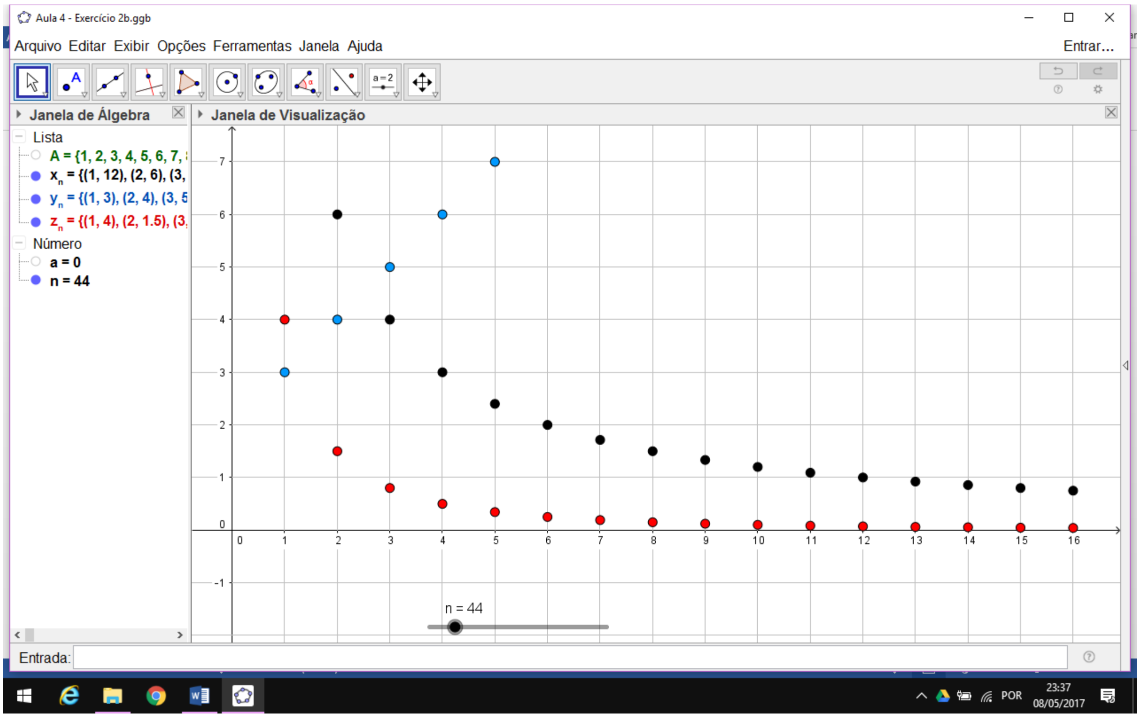
b) Sejam as sequências: $x_n = \frac{12}{n}$ e $y_n = A + 2$. Observe que: (x_n) é limitada e que $\lim y_n = +\infty$.

Representação no Geogebra: A = Sequência[i, i, 1, n] x_n = Sequência[(A, 12/A)), A, 1, n]

y_n = Sequência[(A, A + 2), A, 1, n]

z_n = Sequência[(A, 12/(A*(A + 2))), A, 1, n]

Imagem gerada:



b.1) Sendo $x_n = \frac{12}{n}$ e $y_n = A + 2$. Observe que: (x_n) é limitada e que $\lim y_n = +\infty$. Daí, $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim\, y_n} = \frac{0}{+\infty} = 0.$

a.2) <u>**Demonstração:**</u>

Sejam (x_n) um sequência limitada e $\lim y_n = +\infty$.

Dado dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existem números $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ tais que se (x_n) é uma sequência limitada então $x_n \in (a, b)$, logo, $x_n < b$. Pelo demonstrado no exercício 1, $\lim y_n = +\infty \Leftrightarrow \lim \frac{1}{y_n} = 0$. Se $\lim \frac{1}{y_n} = 0$, segue que, existe um número $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que n > n_0 implica que $\frac{1}{y_n} \in \left(-\frac{\varepsilon}{b}, \frac{\varepsilon}{b}\right)$, ou seja, $\frac{1}{y_n} < \frac{\varepsilon}{b}$. Donde, $\frac{1}{y_n} . x_n < \frac{\varepsilon}{b} . b = \varepsilon$. Logo, $\frac{x_n}{y_n} < \varepsilon$. Concluímos que $\lim \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = 0$. Portanto, se (x_n) é uma sequência limitada e $\lim y_n = +\infty$ então $\lim \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = 0$.

Questão 3:

Demonstração:

Sejam $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ e $\lim\left(\frac{z_n}{a}\right) = 1$.

Dado qualquer $\mathcal{E} > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$implica que $\frac{z_n}{a} \in \left(1 - \frac{\mathcal{E}}{a}, 1 + \frac{\mathcal{E}}{a}\right)$.

Segue que $1 - \frac{\mathcal{E}}{a} < \frac{z_n}{a} < 1 + \frac{\mathcal{E}}{a}$. Multiplicando a desigualdade por a, teremos: $a - \mathcal{E} < z_n < a + \mathcal{E}$, ou seja, $z_n \in (a - \mathcal{E}, a + \mathcal{E})$. Logo, $\lim z_n = a$.

Portanto, conclui-se que se $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ e $\lim\left(\frac{z_n}{a}\right) = 1$ então $\lim z_n = a$.

Exemplo:

Sejam $z_n = \frac{3e^n - 1}{e^n}$.

Observe que $\lim z_n = 3$.

Daí, $\lim \frac{z_n}{3} = \lim \frac{3e^n - 1}{3e^n} = \lim\left(1 - \frac{1}{3e^n}\right) = 1$.

Representação no Geogebra:

A = Sequência[i, i, 1, n]

z_n = Sequência[(A, 3 - 7 / e^A), A, 1, n]

y_n = Sequência[(A, 1 - 7 / 3e^A), A, 1, n]

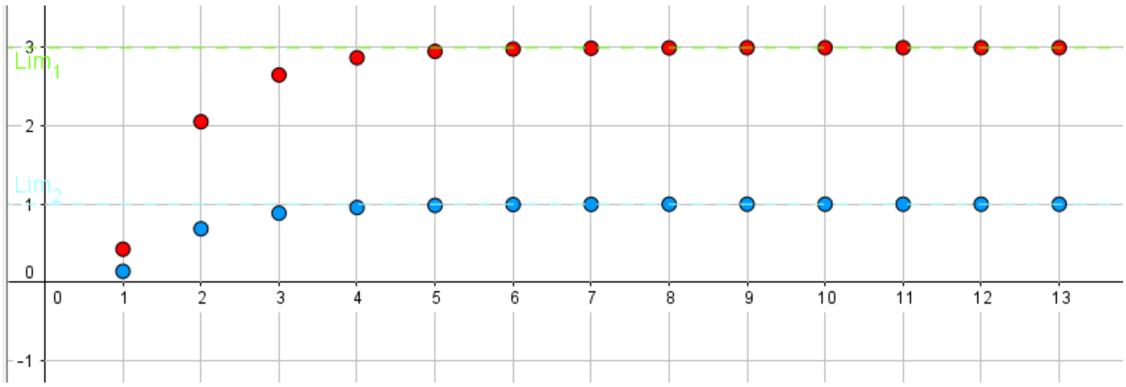
Lim_1 = Reta[(n, 3 - 7 / e^n), EixoX]

Lim_2 = Reta[(n, (3 - 7 / e^n) / 3), EixoX]

a = Limite[(3e^x - 7) / e^x, ∞]

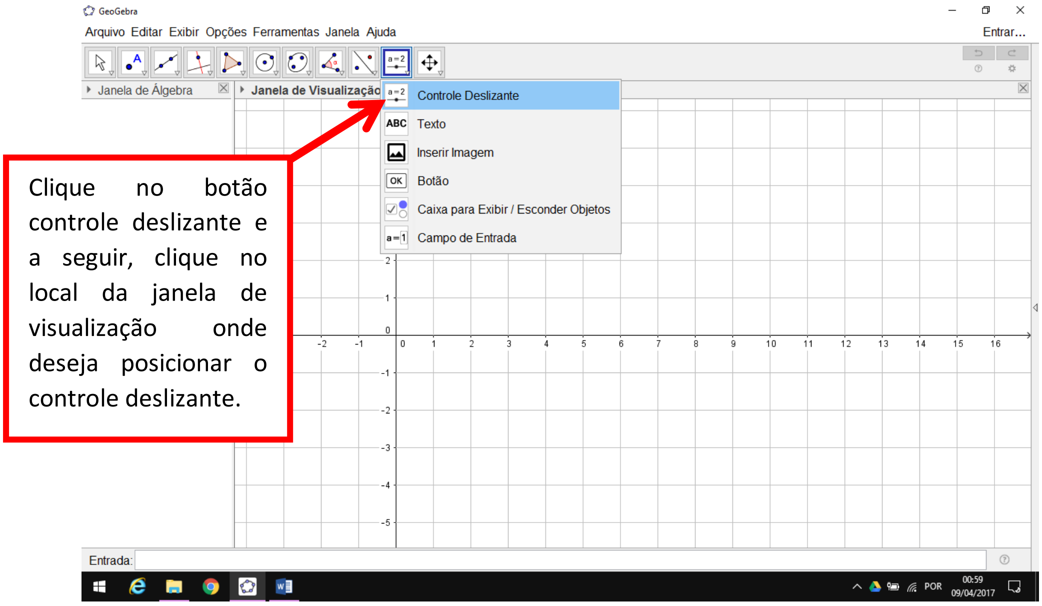
b = a/3

Imagem gerada:

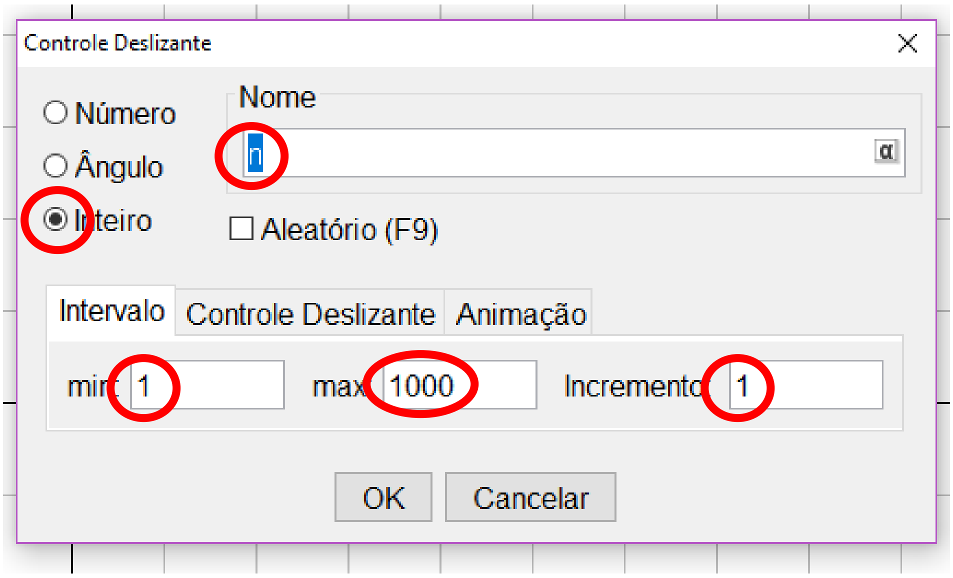


PEQUENO MANUAL DAS CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA

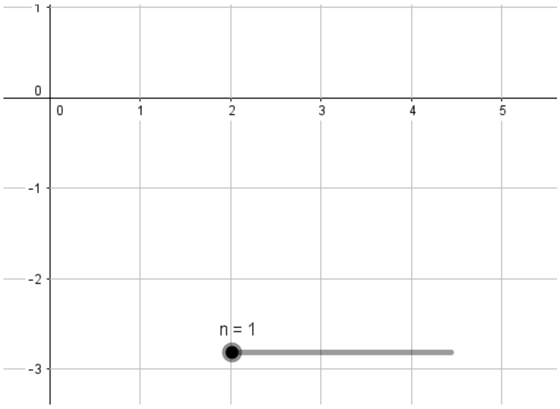
1) Construção de um controle deslizante:



Na **caixa de diálogo do controle deslizante (**que se abrirá), selecione **o botão Inteiro**, troque o nome por **n**, e altere o intervalo **min**, **máx.** e **incremento**, com os valores abaixo e clique em OK.

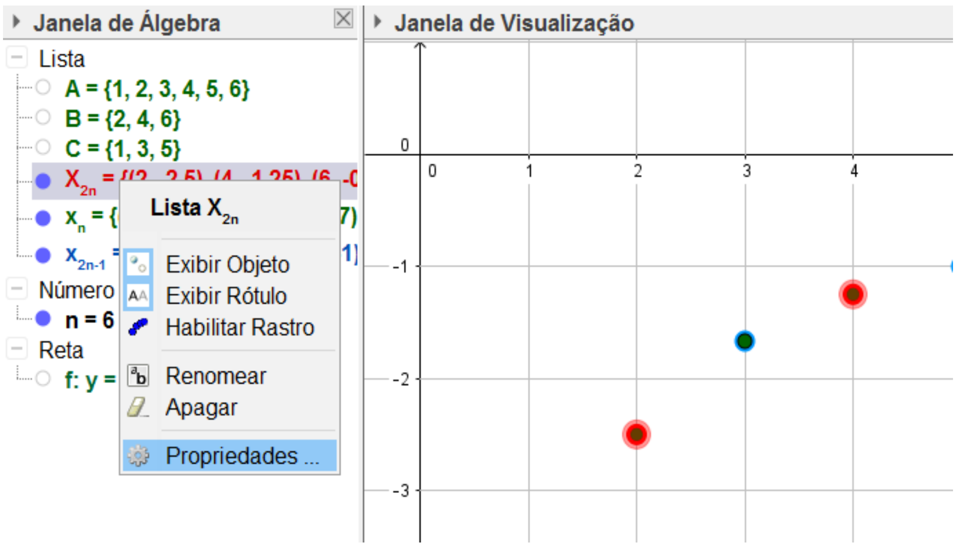


Controle deslizante:

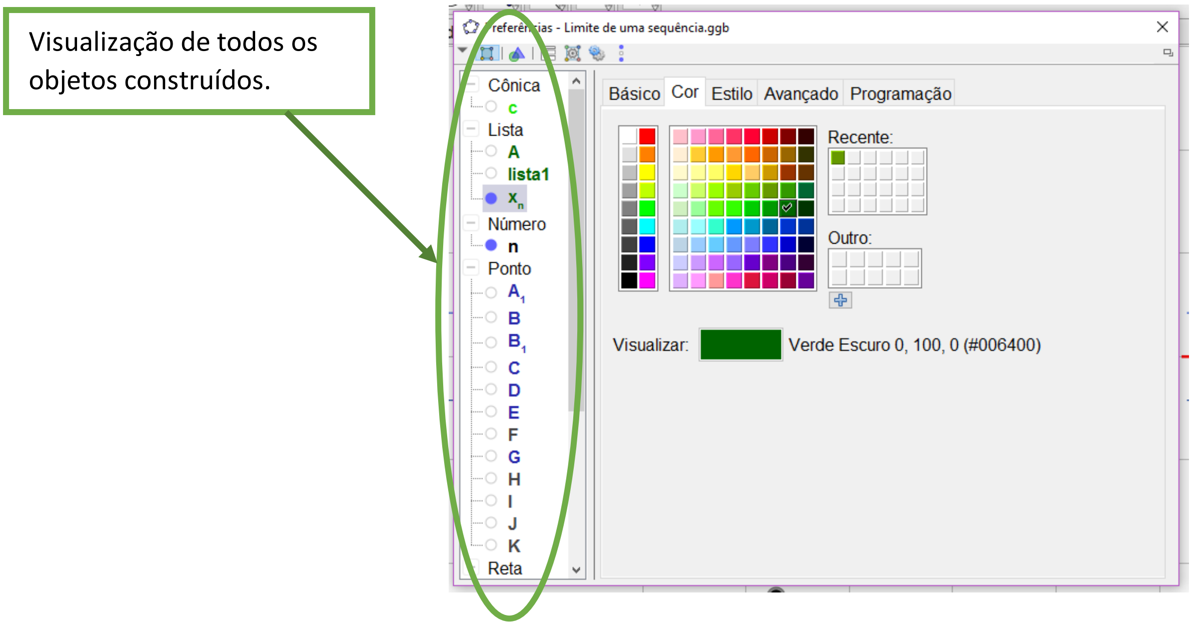


2) Alteração de características dos objetos construídos:

Clique com o botão direito do mouse sobre o objeto que deseja alterar as características e clique em propriedades:



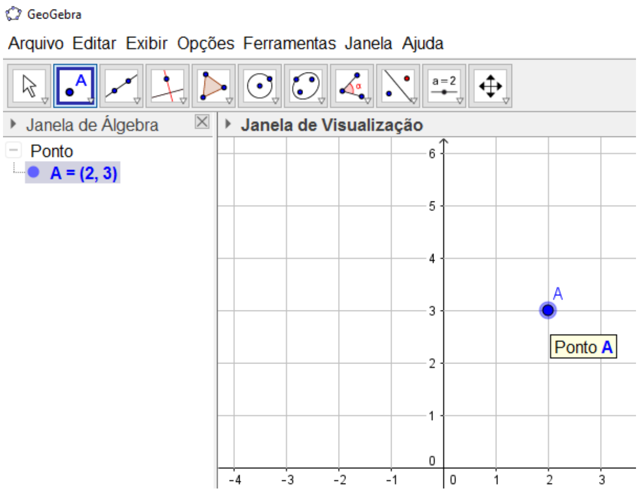
Abrir-se-á uma caixa de dialogo, onde você poderá selecionar cada objeto contruído e alterar suas caracteristica:



Selecione as características que desejar: cor, básico e o estilo e outros:

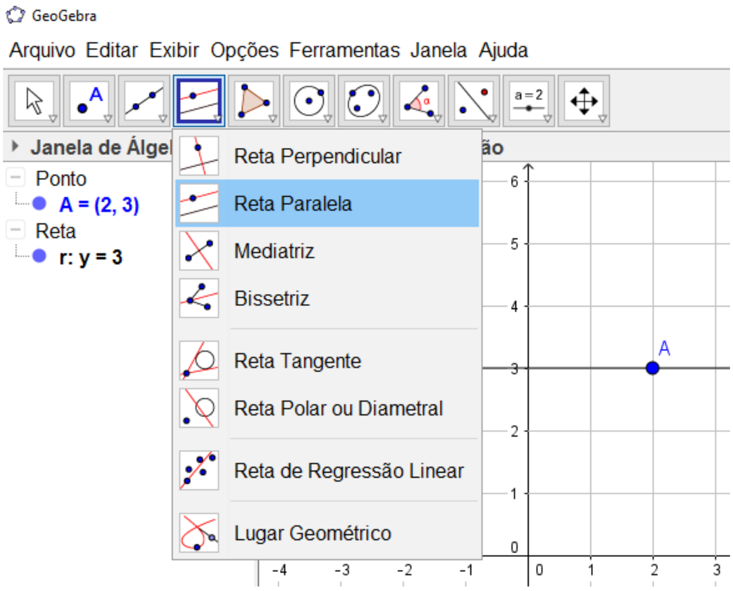
3) Entrando como um ponto:

Digite na caixa de entrada as coordenadas do ponto, por exemplo, A=(2,3) ou seleciona a o botão  e clique na janela de visualização na posição que deseja colocar o ponto:



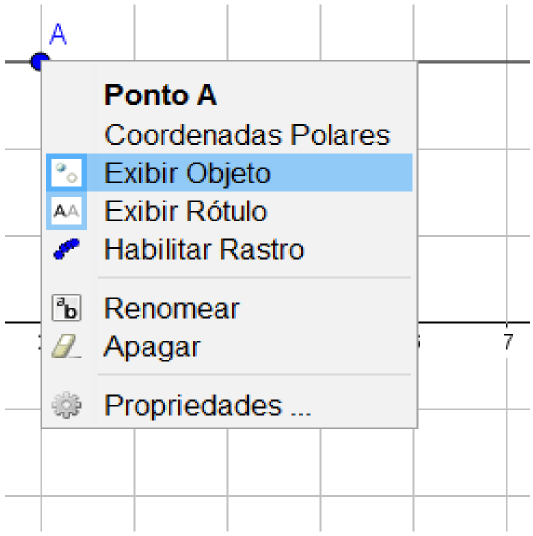
4) Construção de retas paralelas aos eixos X e Y passando por um ponto A:

Digite na caixa de entrada a fórmula da reta, por exemplo, r=Reta[(2,3), EixoX] ou clique no botão Reta Paralela e a seguir, clique como o cursor do mouse no eixo X e no Ponto A:



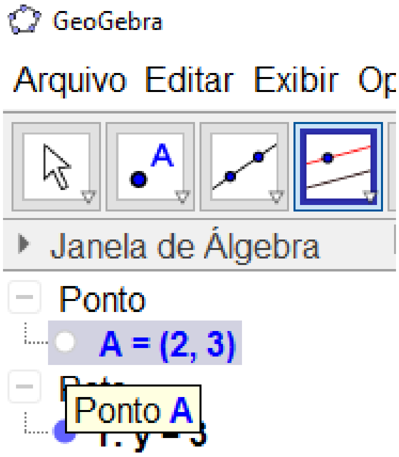
5) Escondendo objetos construídos:

Clique com o botão direto do mouse sobre o objeto que deseja esconder e clique em "Exibir Objeto":



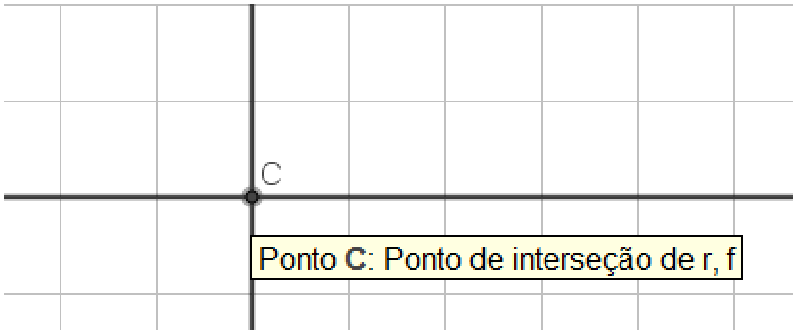
6) Exibindo objetos escondidos:

Na janela de Álgebra, selecione o botão próximo ao objeto que deseja exibir:



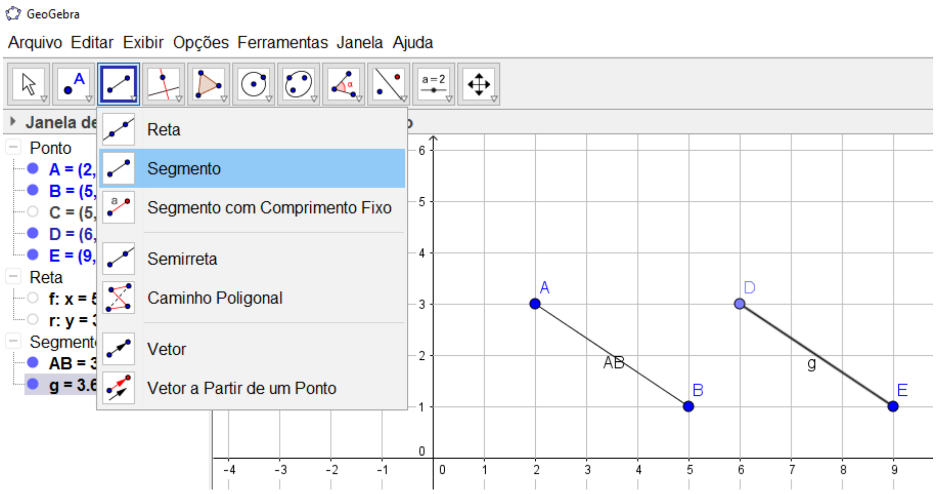
7) Marcando a intersecção de objetos:

Clique no botão Ponto, posicione o cursor do mouse sobre a intersecção até que os dois objetos fiquem destacados e clique na intersecção:



8) Construindo um segmento de reta:

Digite as coordenadas do segmento na caixa de entrada, por exemplo, AB = Segmento [A, B] ou g = Segmento [(6,3), (9,1)]. Ou, clique no botão Segmento e a seguir nos pontos que deseja como extremos do segmento:



9) Construindo uma circunferência:

Digite na caixa de entrada a palavra Círculo e utilize as sugestões de ajuda (figura 1) ou clique no botão  , selecione o centro e um ponto ou um raio (figura 2):

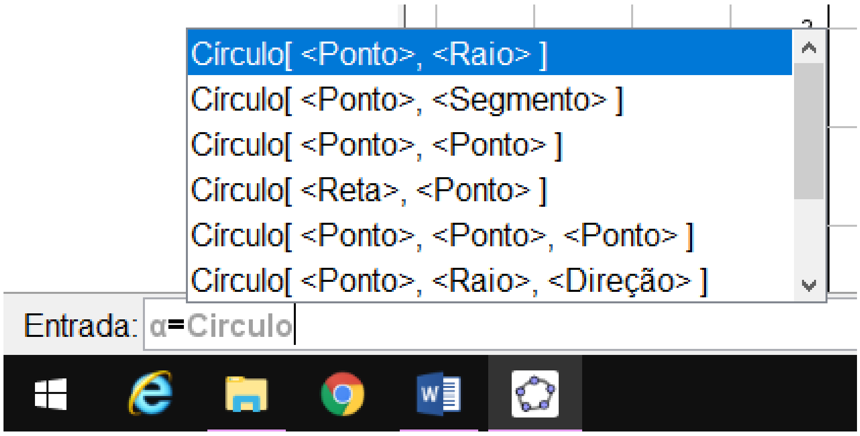


Figura 1

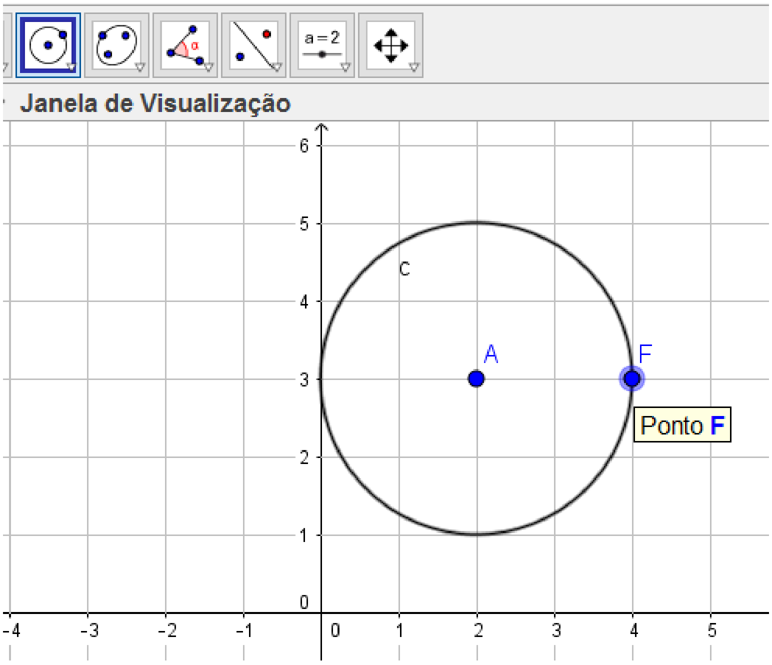
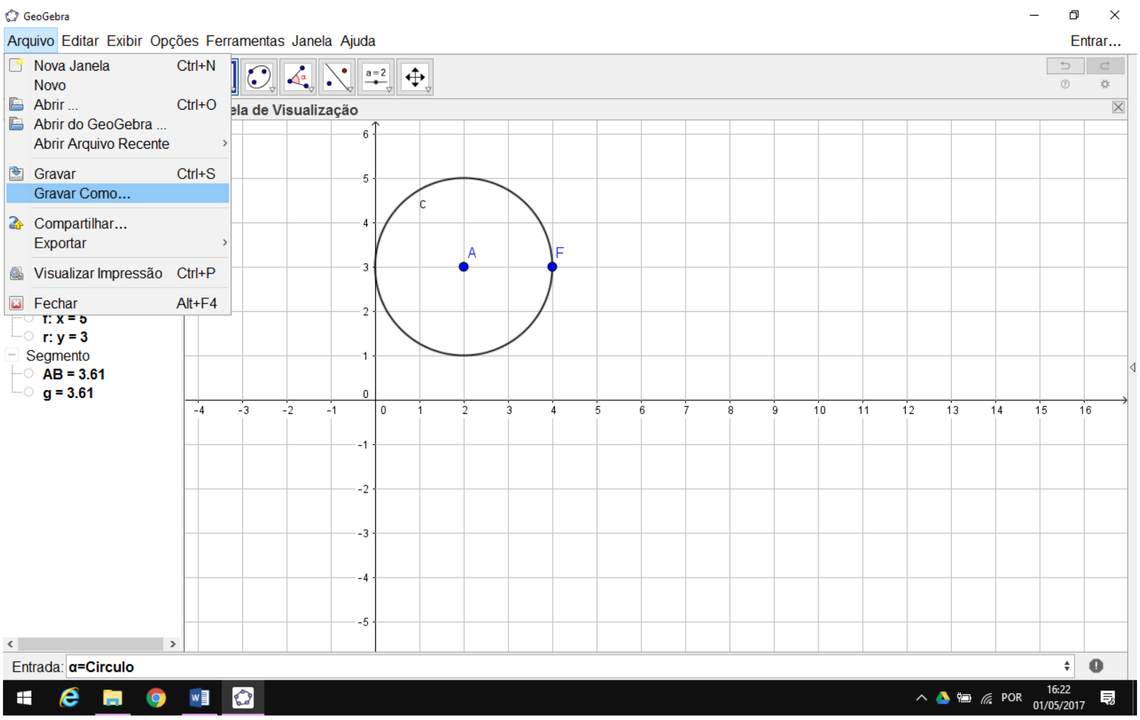


Figura 2

10) Abrindo ou salvando um arquivo:

Clique no menu arquivo, selecione “Abrir” ou “Gravar Como” e selecione o arquivo a ser aberto ou escolha o local e o nome do arquivo a ser salvo:



REFERÊNCIAS

ABAR, C. A. A. P.; ESQUINCALHA, A. C. O Uso de Tecnologias na Formação Matemática de Professores dos Anos Iniciais. **Revista de Educação, Ciência e Matemática**. V.7, n.1, jan-abr, 2017.

BORBA, M. C; CHIARI, A., Organizadores. **Tecnologias Digitais e Educação Matemática.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

BRITO, A. B. **Questionando o Ensino de Conjuntos Numéricos em disciplinas de Fundamentos de Análise Real: Da abordagem dos livros didáticos para a sala de aula em cursos de Licenciatura em Matemática**. Ouro Preto, v. VIII, p. 84 f., 2010.

CIEM. **Apresentações e Autores**. Disponível em: < http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii/schedConf/presentations?searchInitial=L&track=>. Acesso em: 15 nov. 2017.

CIFUENTES, J. C. O Mito da Análise Real: Constribuições para a Formação Conceitual do Professor de Matemática sobre os Números Reais e a Análise Matemática. **EPREM - Encontro Paraense de Educação Matemática**., p. 1–123, 2015.

FERREIRA, M. DOS S.; MUNIZ, T. O. M. O Ensino de Análise: Contribuições e Perspectivas na Formação do Professor de Matemática. **SIMPEMAD - Simpósio Educação Matemática em Debate**, v. 1, n. 0, p. 120–133, 2014.

FRID, H. **Análise Real.** v. 1. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 204p.; 2010.

GOMES, D. O.; OTERO-GARCIA, S. C.; SILVA, L. D.; BARONI, R. L. S. Quatro ou Mais Pontos de Vista sobre o Ensino de Análise Matemática. **Bolema**. Rio Claro (SP), v. 29, n.53, p. 1242-1267, dez. 2015.

INTITUITO GEOGEBRA NO RIO DE JANEIRO. **O que é o GeoGebra?** Disponível em: <http://www.geogebra.im-uff.mat.br/cig.html>. Acesso em: 19 jun. 2018.

LEMKE, R.; SILVEIRA, R. F.; SIPLE, I. Z. GeoGebra: Uma Tendência no Ensino de Matemática. **Anais do II COLBEDUCA - Colóquio Luso-Brasileiro de Educação**, v.1, 2016.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. v.1. 14.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 431 p.; ilust.; (Projeto Euclides), 2013.

MOREIRA, P. C.; VIANNA, C. R. Por que análise real na licenciatura? Um Paralelo entre as Visões de Educadores Matemáticos e de Matemáticos. **Bolema**. Rio Claro (SP), v. 30, n. 55, p. 515-534, ago. 2016.

NETO, J. DE C. S.; BEZERRA, L. M. A. Reflexões sobre os Saberes da Ação para a Formação Docente. **Id on Line Revista De Psicologia**, v. 10, n. 31, p. 241–247, 2016.

OLIVEIRA, E. S. G.; CARVALHO, C. A.; SILVA, F. T. B.; RODRIGUES, G. M. S. M. **Formação docente para o uso das tecnologias digitais: novos saberes do professor**. Seminário Mídias & Educação, v. 0, n. 1, 2015.

OLIVEIRA, J. L. DE. A utilização integrada de softwares dinâmicos no ensino de Análise Real : um estudo da construção do conceito de Integral de Riemann. **RIUFOP - Repositorio Institucional Da Universidade Federal De Ouro Preto**, n. 1995, 2016.

OTERO-GARCIA, S. C. CAMMAROTA, G. Releituras de um Estado do Conhecimento do Ensino de Análise a partir da Noção de Cognição Inventiva. **ALEXANDRIA, Revista de Educação em Ciência e Tecnologia.** n. 1., v. 6, n. 2007, p. 235–260, 2013.

PAULA, S. C. R.; RODRIGUES, C. K.; SILVA, J. C. **Educação Matemática e Tecnologia: Articulando Práticas Geométricas.** 1. ed. 111p.; 21 cm. Curituba: Appris, 2016.

RIBEIRO, T. N.; SOUZA, D. N. A Utilização do Software GeoGebra como Ferramenta Pedagógica na Construção de Uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS). **RevSeM,** n.1, p. 36-5, 2016.

SANCHO, J. M. *et al.* **Tecnologia para transformar a educação**. Tradução de Valério Campos. Porto Alegre: Artmed, 2007.

TARDIF, M. **Saberes Docentes e Formação Profissional**. Petrólis-RJ: Editora Vozes, 2014.