DISTÂNCIA AMPLIANDO SEUS HORIZONTES

RICARDO CERQUEIRA DE ABREU
ABEL RODOLFO GARCIA LOZANO

RICARDO CERQUEIRA DE ABREU

ABEL RODOLFO GARCIA LOZANO

DISTÂNCIA AMPLIANDO SEUS HORIZONTES: Uma alternativa didática voltada aos Professores de Matemática no Ensino da Matemática

PRODUTO EDUCACIONAL
1ª Edição
2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UNIGRANRIO – NÚCLEO DE COORDENAÇÃO DE BIBLIOTECAS

A162d Abreu, Ricardo Cerqueira de.

Distância ampliando seus horizontes: uma alternativa didática voltada aos professores de Matemática no ensino da Matemática / Ricardo Cerqueira de Abreu, Abel Rodolfo Garcia Lozano. – Duque de Caxias, RJ: UNIGRANRIO, 2020.
27 p. : il. ; 23 cm.

Referências: p. 27.
ISBN: 978-85-9549-162-5

1. Matemática – Ensino. 2. Geometria Euclidiana. 3. Distância matemática. I. Garcia Lozano, Abel Rodolfo. II. Título.

CDD – 510

Prezado Leitor (a):

O presente material é o Produto Educacional, parte integrante da pesquisa da Dissertação de Mestrado intitulada *DISTÂNCIA – AMPLIANDO SEUS HORIZONTES: Uma proposta de livreto para utilização como alternativa didática para o ensino da matemática por professores de matemática,* apresentada no Programa de Mestrado Profissional em Ensino Das Ciências na Universidade do Grande Rio “Prof. José de Souza Herdy”

O livreto é um material de apoio destinado a professores de matemática, com objetivo de servir como alternativa didática no ensino da matemática, traz exemplo e aplicações sobre Distância Euclidiana, Distância de *Manhattan* e Distância Geodésica, propiciando ao leitor uma experiência de novas abordagens e teorias sobre distância. Pode ser utilizado como material extraclasse no processo de ensino, que de acordo com Dante (1996) em suas discussões fala que, “[...] só a aula do professor não consegue fornecer todos os elementos necessários para a aprendizagem do aluno, uma parte deles como problemas, atividades e exercícios....”

Deixamos claro que os exemplos, aplicações encontradas no presente material podem ter sido retiradas de trabalhos encontrados na pesquisa, em livros, artigos ou periódicos de matemática ou ainda elaborados pelo próprio autor, com suas fontes e referencias citadas.

Desejamos que este material possa vir a servir como um diferencial para o leitor em sua prática docente diária, fazendo assim que a busca de novos assuntos e novas descobertas sejam fatores no diferencial de sua prática.

SUMÁRIO

1. DISTÂNCIA

A palavra distância é utilizada com diversos objetivos, vamos citar alguns. Para exemplificar proximidade de corpos, de conjuntos, para similaridade, entre inúmeras outras aplicações em diversas áreas, tais como Geografia, Medicina, Física, Informática, entre outras ciências.

"Distância é o número que caracteriza a separação entre dois objetos" (LOPES, 2012)

Para ser considerado uma distância, devem ser satisfeitas as propriedades de espaço métrico. Lopes (2012), em seu trabalho, define espaço métrico como:

Dado um conjunto §, uma métrica em § é uma função d: § x § →ℝ que possui as seguintes propriedades:

Sejam a,b,c ∈§

i. *Deve ser não-negativa: d(a,b) ≥ 0*
ii. *Deve ser comutativa: d(a,b)= d(b,a)*
iii. *Deve satisfazer à desiqualdade triangular: d(a,b)+d(b,c)≥d(a,c)*

A distância matemática é definida como uma função, cujos argumentos são pares de números reais, e os resultados são números reais. (GOMIDE; REIS, 2013), ainda segundo Gomide e Reis (2013), espaço métrico é um fundamento matemático para a compreensão de distância de forma intuitiva.

> A noção de espaço métrico é o fundamento matemático sobre o qual se apoia a ideia intuitiva de "distância". De fato, uma distância qualquer entre dois pontos é compreendida intuitivamente como um caminho (em geral, um segmento de reta) que liga tais pontos; a expressão matemática deste caminho, deste "pedaço de espaço retilíneo", é um número real maior ou igual a zero. Mas a intuição de distância não precisa, necessariamente, estar presa à ideia de um segmento de reta finito e expresso por um número real. (GOMIDE, REIS; p.197; 2013)

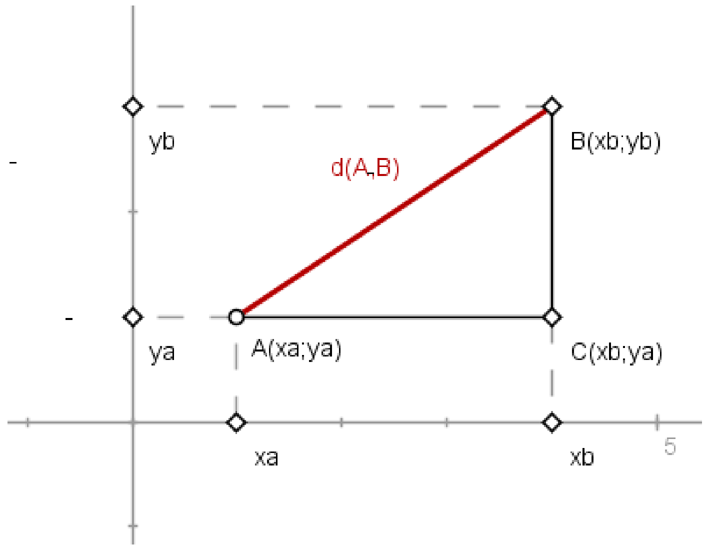
Para continuidade, faremos a abordagem de algumas distâncias, atividades e aplicações sobre as mesmas.

2. DISTÂNCIA EUCLIDIANA

A priori, algumas condições para a definição de distância euclidiana. Seja o plano em $\mathbb{R}^2$, onde é formado por duas retas perpendiculares, sendo uma horizontal e outra vertical, uma denominada Eixo das Abscissas e outra Eixo das Ordenadas, respectivamente. Os pares ordenados no plano, são indicados por $A(x_a, y_a)$, onde x_a é abscissa do ponto A e y_a é a ordenada do ponto A.

Sendo assim, a distância entre os pontos A e B é obtida através das projeções destes pontos nos eixos coordenados. Com isso, encontramos o ponto $C\ (x_c, y_c)$, onde $(x_c, y_c) = (x_b, y_a)$, como consequência, no triângulo ABC na Figura 1 e realizando a aplicação do Teorema de Pitágoras, temos:

FIGURA 1 - DISTÂNCIA ENTRE OS PONTOS A E B



Fonte: Construído pelo autor

Desenvolvimento:

$$[d(A,B)]^2 = [d(A,C)]^2 + [d(C,B)]^2$$

$$[d(A,B)]^2 = [|x_b - x_a|^2 + \ |y_a - y_a|^2] \\ + \ [|x_b - x_b|^2 \ + \ |y_b - y_a|^2]$$

$$[d(A,B)]^2 = \ |x_b - x_a|^2 + \ |y_b - y_a|^2$$

$$[d(A,B)]^2 = \ (x_b - x_a)^2 \ + \ (y_b - y_a)^2$$

$$d(A,B) = \ \sqrt{(x_b - x_a)^2 \ + \ (y_b - y_a)^2}$$

Portanto, $d(A,B) = \sqrt{d(A,C)^2 + d(C,B)^2}$

DISTÂNCIA EUCLIDIANA

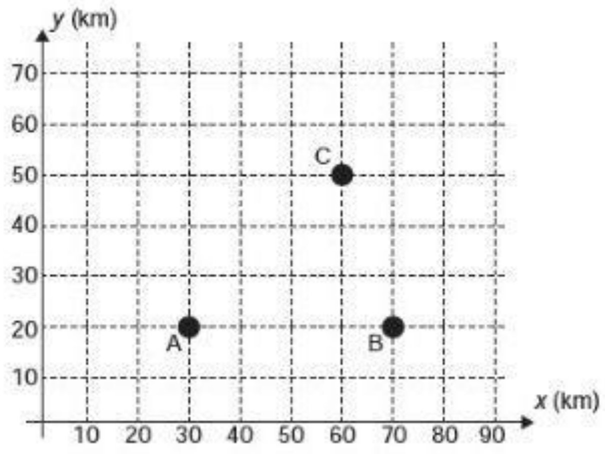
$$\boldsymbol{d(A,B) = \sqrt{d(A,C)^2 + d(C,B)^2}}$$

Podemos observar que o segmento *AB* é a hipotenusa do triângulo retângulo *ABC,* por consequência *AB =* $d(A,B)$, *AC = d (A, C) e CB = d (C.B),* portanto, válido o teorema de Pitágoras.

2.1 Atividades

2.1.1 Questão ENEM- 2013

Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas. O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas

a) (65;35)
b) (53;30)
c) (45;35)
d) (50;20)
e) (50;30)

A solução da questão fica a cargo do leitor, lembrando que para solução da questão, é interessante relembrar os conceitos de ponto médio [1], e mediatriz [2] .

2.1.2 Questão elaborada pelo autor

Um florista deseja criar um projeto com uma estufa de flores, parar fazer tal criação foi utilizado um programa de computador, utiliza as dimensões do terreno de formato retangular como eixos coordenados. Ele visa colocar regadores em dois pontos distintos desse terreno, e coloca seus regadores nas seguintes coordenadas: A (3,3), B (12,9) respectivamente. Calcule a distância entre os regadores da estufa.

[1] **Ponto médio** é o **ponto** que divide o **segmento** de reta exatamente no meio tendo dois segmentos iguais.

[2] **Mediatriz** é o Lugar Geométrico dos pontos do Plano que equidistam de dois pontos distintos

2.1.3 Questão (UEMA)

Buscando incentivar a inserção das pessoas com deficiência no mercado de trabalho, uma filial dos Correios da cidade de São Luís contratou um cadeirante como encarregado da separação de correspondências. Para executar este trabalho, o novo funcionário foi designado para uma sala que dispunha de três mesas. Suponha que os centros dessas mesas sejam representados pelos pontos A, B e C de coordenadas (5, 4), (3, 7) e (1, 2), respectivamente, tomando como origem o canto da sala. Nessas condições:

a) esboce a figura que representa a disposição das mesas na sala em questão.
b) quais as distâncias que cada mesa mantém entre si, em metros?
c) qual a área do espaço compreendido entre as mesas?

Dica: Faça a construção da figura do terreno

3. DISTÂNCIA DE *MANHATTAN*

A Distância de *Manhattan*, também conhecida como Geometria do Táxi, ou Geometria das cidades. Ela recebe esse nome devido a sua trajetória, que é descrita como de um táxi na cidade, de modo que utilize quarteirões no seu trajeto, até chegar ao seu destino.

A Distância de *Manhattan* é definida para dois pontos num espaço euclidiano com um sistema cartesiano de coordenadas fixo, como a soma dos comprimentos das projeções da linha que une os pontos sobre os eixos das coordenadas. A definição da função Distância de *Manhattan* é:

Sejam P (p_1, p_2, …, p_n) e Q (q_1, q_2, ..., q_n) pontos no espaço euclidiano, a Distância de Manhattan é dada por:

$$\boxed{d(P,Q) = |p1 - q1| + |p2 - q2| + \cdots + |pn - qn| = \sum_{i=1}^{n}(pi - qi)}$$

$Dados\ os\ pontos\ P(x_p, y_p)\ e\ Q(x_q, y_q), temos\ que:$

DISTÂNCIA DE *MANHATTAN*

$$\boldsymbol{d(P,Q) = |x_p - x_q| + |y_p - y_q|}$$

A função d, satisfaz as seguintes propriedades:

$i.\, d(P,P) = 0$

$ii.\, Se\ P \neq Q, então\ d(P,Q) \neq 0$

$iii.\, d(P,Q) = d(Q,P)$

$iv.\, d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q), para\ quaisquer\ pontos\ P, Q\ e\ R$

Como satisfaz as propriedades de uma métrica, temos que função Distância de *Manhattan*, é uma métrica.

Utilizando a fórmula de combinação podemos determinar o número total de caminhos possíveis a serem percorridos entre os pontos P e Q.

COMBINAÇÃO

$$\boldsymbol{N = C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

Onde:

N → número total de caminhos

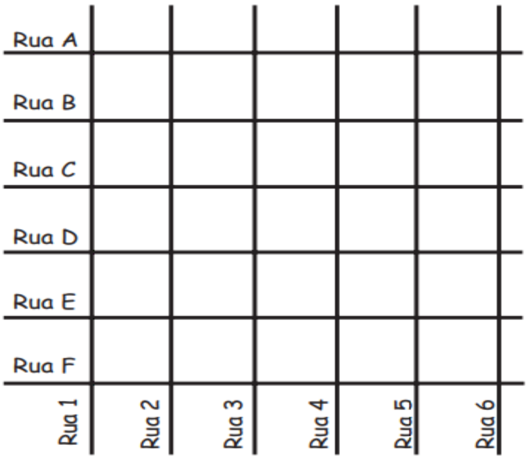
n → soma da distância horizontal com a distância vertical

p→ menor das duas distâncias.

3.1 Atividades

3.1.1 Questão ENEM – 2016

Uma família resolveu comprar um imóvel num bairro cujas ruas estão representadas na figura. As ruas com nomes de letras são paralelas entre si e perpendiculares às ruas identificadas com números. Todos os quarteirões são quadrados, com as mesmas medidas, e todas as ruas têm a mesma largura, permitindo caminhar somente nas direções vertical e horizontal. Desconsidere a largura das ruas.



A família pretende que esse imóvel tenha a mesma distância de percurso até o local de trabalho da mãe, localizado na rua 6 com a rua E, o consultório do pai, na rua 2 com a rua E, e a escola das crianças, na rua 4 com a rua A. Com base nesses dados, o imóvel que atende as pretensões da família deverá ser localizado no encontro das ruas

a) 3 e C
b) 4 e C
c) 4 e D
d) 4 e E
e) 5 e C

3.1.2 Questão retirada de CÉSAR (2010)

Desenhe um referencial cartesiano e, nesse referencial cartesiano marque os pontos A(1,1) e B(2,2).

a) Quantos caminhos diferentes existem para irmos de A B, sempre percorrendo a menor distância táxi?
b) Agora os pontos são A (1,1) e C (3,3).
c) Tente, agora, com os pontos A (1,1) e D (3,2).

d) Calcule a quantidade de caminhos que há entre a casa de Luciana e a de Roberto. (atividade anterior)

4. DISTÂNCIA GEODÉSICA

Para Rabuske (1992), um grafo G é definido como um par ordenado (V(G), E(G)), onde V(G) é um conjunto finito não vazio, e E(G) uma relação binária de elementos sobre V(G). Os elementos que pertencem a V(G) são denominados de vértices ou nós, enquanto os pares não-ordenados de E(G) são chamados de arestas ou arcos. Cada aresta está associada a dois vértices: o primeiro é o ponto inicial da aresta e o segundo é o ponto final da aresta. Vamos nos ater apenas a grafos em que o conjunto de vértices são finitos e V(G) ≠ 0.

Uma representação gráfica padrão para um grafo, é um desenho formado por pontos, onde, esses pontos representam os vértices, e por retas ou arcos ligando os pontos, essas ligações são as arestas ou arcos do grafo. (GROSS; YELLEN, 2006, p. 2).

A distância de um vértice *r* a um vértice *s* é o número k de arestas de um caminho mínimo de *r* a *s*, onde $k \in \aleph$. Por consequência dizer que a distância de *r* a *s* é *k* significa duas coisas:

i) Existe um caminho de r a s com exatamente k arcos.
ii) Não existe caminho de r a s com menos que k arestas.

Lembrete: a distância de r a s pode ser diferente da distância de s a r

De acordo com Loureiro e Goussevskaia (p. 43), um grafo é valorado quando cada aresta possuir um valor associado. ”Formalmente, um grafo valorado G = (V, E) consiste de um conjunto V de vértices, um conjunto E de arestas, e uma função f de E para P, onde P representa o conjunto de valores (pesos) associados às arestas”.

Para exemplificarmos um grafo valorado, apresentaremos o problema do caixeiro Paulo.

Problema: Paulo é um viajante que possui entregas para fazer em cinco cidades, e precisa programar suas visitas de modo que seja a mais eficiente possível. A cidade de Paulo é representada pela letra A e as demais serão indicadas pelas letras B, C, D, e E. Para otimizar o processo de visitas de Paulo, deve-se traçar a menor rota possível entre as cidades, ou seja, a distância de uma cidade a outra, de modo que visite todas as cidades, partindo de A e voltando a ela.

No **Quadro** 1 a seguir, podemos verificar a distâncias de cada cidade a seguinte, as distâncias são informadas em quilômetros.

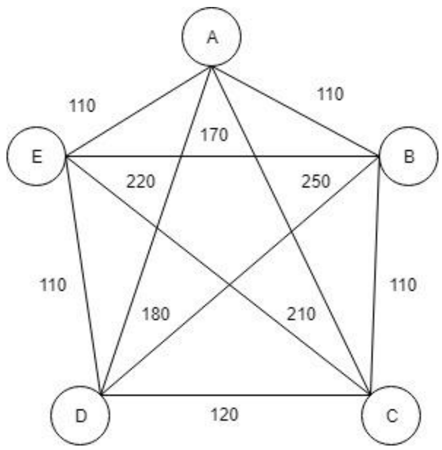
QUADRO 1 – Distância entre Cidades

Distância de F até	B	C	D	E
	150	250	220	90
Distância de B até	F	C	D	E
	150	110	210	170
Distância de C até	F	B	D	E
	250	110	120	180
Distância de D até	F	B	C	E
	220	210	120	80
Distância de E até	F	B	C	D
	90	170	180	80

Fonte: Construído pelo autor

Para representar as informações acima, utilizaremos o grafo valorado na figura 2, onde cada aresta possui um peso, e este é a distância em quilômetros entre as cidades.

FIGURA 2 - CIDADES E SUAS DISTÂNCIAS



Fonte: Construído pelo autor.

Agora, iremos determinar quantos são os caminhos possíveis da realização desta viagem, e para tal, vamos utilizar a seguinte expressão : $\frac{(n-1)!}{2}$, onde n é o número de cidades que Paulo deve visitar, como temos 5 cidades, e aplicando a expressão, temos $\frac{(5-1)!}{2} = \frac{4!}{2} = \frac{24}{2} = 12$, portanto temos 12 maneiras de realizar essa passagem pelas 4 cidades, voltando a origem.

TABELA 1 – Distância das viagens partindo de A e voltando a origem

Roteiro de Viagem	Distância do trajeto da Viagem	
A-B-C-D-E-A	150 + 110 + 120 + 90 + 80	= 550
A-B-C-E-D-A	150 + 110 + 180 + 80 + 220	= 740
A-B-D-C-E-A	150 + 210 + 120 + 180 + 90	= 750
A-B-D-E-C-A	150 + 210 + 80 + 180 + 250	= 870
A-B-E-C-D-A	150 + 170 + 180 + 120 + 220	= 840
A-B-E-D-C-A	150 + 170 + 80 + 120 + 250	= 770
A-C-B-D-E-A	250 + 110 + 210 + 80 + 90	= 740
A-C-B-E-D-A	250 + 110 + 170 + 80 + 220	= 830
A-C-D-B-E-A	250 + 120 + 210 + 170 + 90	= 840
A-C-E-B-D-A	250 + 180 + 170 + 210 + 220	= 1030
A-D-B-C-E-A	220 + 210 + 110 + 180 + 90	= 810
A-D-C-B-E-A	220 + 120 + 110 + 170 + 90	= 710

Fonte: Construção do autor

Após realizarmos os cálculos das distâncias de cada viagem, podemos concluir, que a viagem mais eficiente do caixeiro é a Viagem A-B-C-D-E-A, e que a distância percorrida na viagem foi de 550 km.

Observação: Para cada roteiro de viagem, existe sua inversa, portanto as distâncias são as mesmas. Para exemplificar tal fato façamos a distância de A-B-C-D-E-A = 150 + 110 + 120 + 90 + 80 = 550 km de distância, e em seguida a distância de A-E-D-C-B-A = 90 + 80 +120 + 110 + 150 = 550 km.

4.1 O PROBLEMA DO MENOR CAMINHO (ALGORITMO DE DIJKSTRA)

Uma aplicação de distância geodésica é a busca pelo menor caminho, e para tal vamos utilizar o Algoritmo de Dijkstra, que encontra o menor caminho de um vértice (nó) fonte ou origem s até os outros vértices (nós) de um grafo orientado para o caso em que todos os pesos dos arcos (arestas) sejam não negativos. (DE CARVALHO, 2008)

Temos como algumas aplicações do Algoritmo de Dijkstra sua utilização em:

- Redes de Computadores (*Percurso entre Roteadores*),
- Tráfego Urbano.
- Sistemas Rodoviários, Ferroviários e Aéreos,
- Importante para vários outros problemas.

A seguir temos o Algoritmo de Dijkstra descrito passo a passo:

Seja G(V,A) um grafo orientado, e ***a*** um vértice de G:

Passo 1 – Considera-se valor zero à estimativa de distância do vértice *a* (a raiz da busca) e infinito às demais estimativas;

Passo 2 - Considera-se um valor qualquer aos precedentes (o precedente de um vértice *t* é o vértice que precede *t* no caminho de distância mínima de *a* para *t*);

Passo 3 - Enquanto houver vértice aberto:

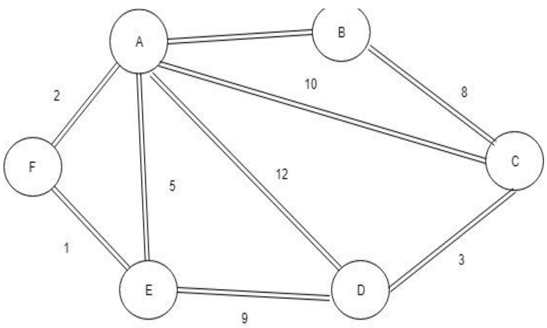
- seja *k* um vértice ainda aberto cuja estimativa seja a menor dentre todos os vértices abertos;
- fecha-se o vértice *k*
- Para todo vértice I ainda aberto que seja sucessor de *k* faz-se:
  - soma-se a estimativa do vértice k com o custo do arco que une *k* a *j*;

- caso esta soma seja melhor que a estimativa anterior para o vértice *j*, substitui-se e anota-se *k* como precedente de *j*.

O Algoritmo de Dijkstra *(E.W. Dijkstra)* parte de uma estimativa inicial para a menor distância, que é considerada infinita, e vai se ajustando sucessivamente a distância. É considerada uma cidade "fechada" quando tiver sido obtido o caminho de menor distância da cidade origem da busca. Esses dados são armazenados numa tabela e será alterada à medida que forem percorridos todos os caminhos possíveis.

Para melhor entendimento do Algoritmo de Dijkstra, vamos trabalhar com um exemplo: *O problema é sobre uma empresa de transportes de cargas resolveu aumentar o número de entregas, daí, precisa diminuir os custos em suas viagens*. Para tal redução, precisa minimizar suas distâncias percorridas para as entregas entre as cidades A e F, fazendo a menor distância no percurso por todas as cidades. e pode-se ver na **Figura 3** a seguir as distâncias entre as cidades.

FIGURA 3 - CIDADES PARA ENTREGAS



Fonte: Construído pelo Autor

Para começar, constrói-se a tabela de distâncias das cidades.

PASSO 1 – Cidade A "fechada"

Cidades	A	B	C	D	E	F
Distâncias	0	10	10	12	5	2

Cidade Precedente	A	A	A	A	A	A

Ao observarmos a tabela do PASSO 1, e verificarmos que a menor distância entre as cidades é 2 para cidade F, “fechamos” a cidade F no PASSO 2 abaixo.

PASSO 2 – Cidade F “fechada”

Cidades	A	B	C	D	E	F
Distâncias	0	10	10	12	1	2
Cidade Precedente	A	A	A	A	F	A

Ao observarmos a tabela do PASSO 2, e verificarmos que a menor distância entre as cidades é 1 para cidade E, “fechamos” a cidade E no PASSO 3 a seguir:

PASSO 3 – Cidade E “fechada”

Cidades	A	B	C	D	E	F
Distâncias	0	10	10	12	1	2
Cidade Precedente	A	A	A	A	F	A

Ao observarmos a tabela do PASSO 3, e verificarmos que a menor distância entre as cidades é 9 para cidade D, “fechamos” a cidade D no PASSO 4 abaixo.

PASSO 4 – Cidade D “fechada”

Cidades	A	B	C	D	E	F
Distâncias	0	10	3	9	1	2

Cidade Precedente	A	A	D	E	F	A

Ao observarmos a tabela do PASSO 4, e verificarmos que a menor distância entre as cidades é 3 para cidade C, “fechamos” a cidade C no PASSO 5 a seguir:

PASSO 5 – Cidade C “fechada”

Cidades	A	B	C	D	E	F
Distâncias	0	8	3	9	1	2
Cidade Precedente	A	C	D	E	F	A

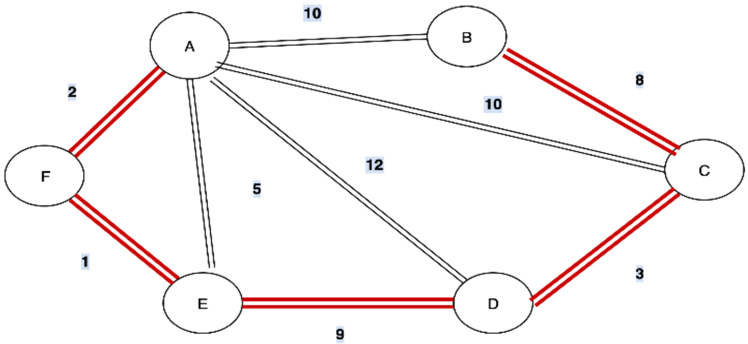
Ao observarmos a tabela do PASSO 5, e verificarmos que a menor distância entre as cidades é 8 para cidade B, “fechamos” a cidade B e concluímos nossas entregas.

PASSO 6 – Cidade B “fechada” e entrega concluída

Cidades	A	B	C	D	E	F
Distâncias	0	8	3	9	1	2
Cidade Precedente	A	C	D	E	F	A

Após a conclusão de todos os passos, em vermelho podemos ver o caminho da menor distância para diminuir seus custos, na **Figura 4** a seguir, está destacado o roteiro a ser percorrido para a entrega ser a de menor percurso, perfazendo 23 unidades de distância.

FIGURA 4 - MENOR CAMINHO PARA A ENTREGA



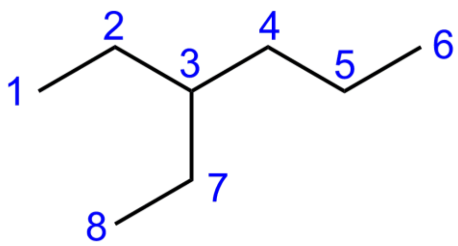
Fonte: Construído pelo Autor

Na continuidade da seção, temos uma aplicação da Distância Geodésica,

4.2 Aplicação na Química

Observe o grafo abaixo de átomos do 3-Etilhexano e construa a tabela abaixo indicando a distância entre os átomos:

FIGURA 5 - 3-ETILHEXANO



ÁTOMO	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								

4								
5								
6								
7								
8								

LEITURAS SUGERIDAS PELO AUTOR

COUTINHO, Lázaro. **Convite às geometrias não – euclidianas**. Rio de Janeiro: Interciência 2001

KALEFF, Ana Maria M. R; NASCIMENTO, Rogério Santos. Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o exemplo da Geometria do Taxi. **Boletim GEPEM** nº 44 no prelo 2004.

MENEGHETTI, Renata. O Intuitivo e o Lógico no Conhecimento Matemático: análise de uma proposta pedagógica em relação a abordagens filosóficas atuais e ao contexto educacional da matemática. **Bolema-Boletim de Educação Matemática**, v. 22, n. 32, p. 161-188, 2009.

RABUSKE, Márcia A. **Introdução a teoria dos grafos**. Florianópolis: Ed. da UFSC, 1992.

REFERÊNCIAS

CÉSAR, Sulamita Maria Comini. **Minicurso de Geometria Táxi**, 2010

DE CARVALHO, Bruno Miguel Pacheco Saraiva. **Algoritmo de Dijkstra**. Universidade de Coimbra, Coimbra, Portugal, 2008.

GOMES, Severino Carlos. Ensino de Trigonometria numa Abordagem Histórica: um produto educacional. **Boletim de Educação Matemática**, v. 27, n. 46, 2013.

GOMIDE, Walter; REIS, Tiago. Números transreais: Sobre a noção de distância. **Synesis**, v. 5, n. 2, p. 197-210, 2013.

LOPES, Fabrício Martins. **Introdução ao Reconhecimento de Padrões e aplicações em problemas de Bioinformática**. **Grupo de Pesquisa em Bioinformática e Reconhecimento de Padrões da UTFPR**, 2012.

LOUREIRO, Antonio Alfredo Ferreira; GOUSSEVSKAIA, Olga. Nikolavna. **Grafos.** Disponível em: <http://homepages. dcc. ufmg. br/loureiro/md/md Grafos. pdf>. Acesso em: 21 Jan 2018.

MOREIRA, Marco Antonio. O mestrado (profissional) em ensino. **Revista Brasileira de Pós-Graduação,** v. 1, n. 1, 2004.

SOUZA, Helenara Machado de. **A Geometria do Táxi: investigação sobre o ensino de uma geometria não euclidiana para o terceiro ano do ensino médio.** Santa Maria, 2015

.