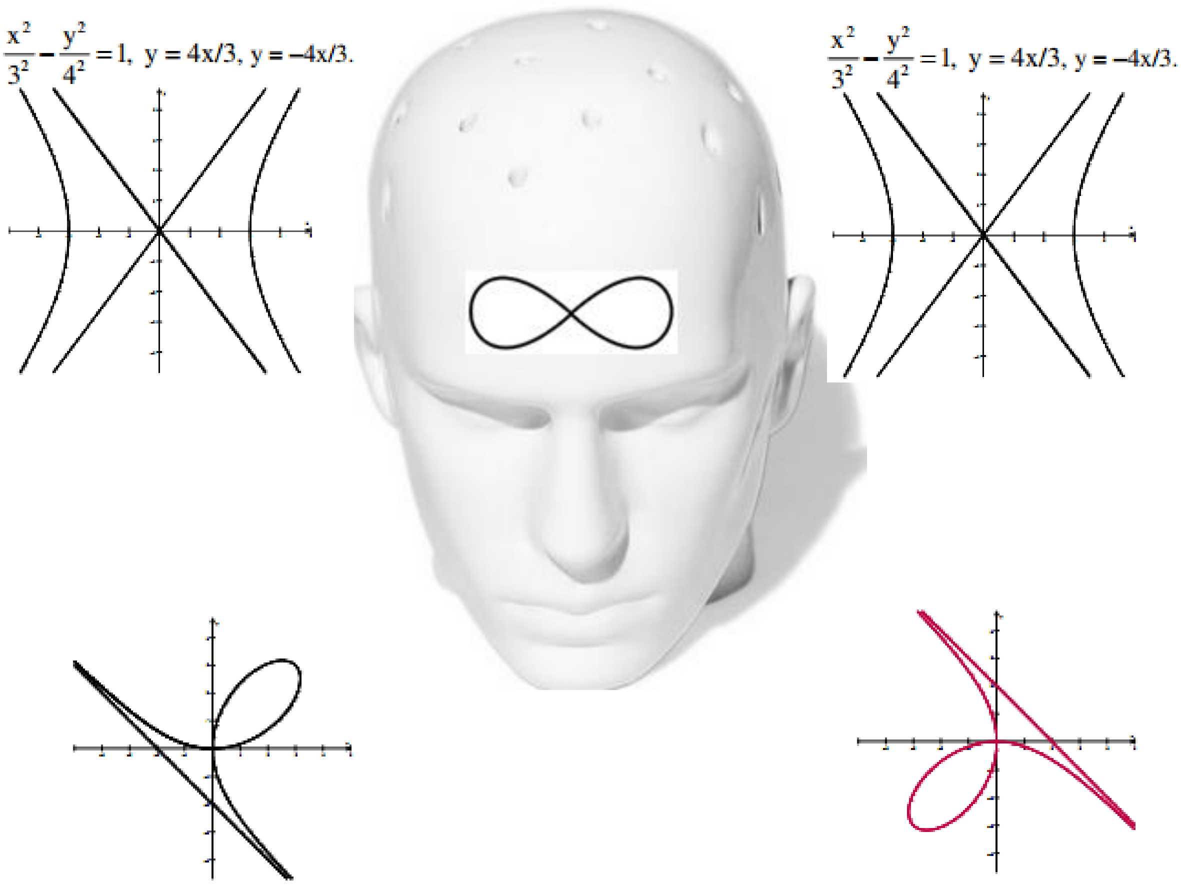
UNIVERSIDADE UNIGRANRIO
Vá além da sala de aula

PRODUTO EDUCACIONAL

Noções básicas do cálculo relacionadas com o conceito de infinito



LUIZ MARCOS CAVALCANTI PEREIA
ABEL RODOLFO GARCIA LOUZANO
ADRIANO VARGAS FREITAS

PRODUTO EDUCACIONAL

Noções básicas do cálculo relacionadas com o conceito de infinito

LUIZ MARCOS CAVALCANTI PEREIA
ABEL RODOLFO GARCIA LOUZANO
ADRIANO VARGAS FREITAS

UNIVERSIDADE DO GRANDE RIO

DUQUE DE CAXIAS 2015

RESUMO

Esse produto educacional apresenta um conjunto de atividades relacionadas com as noções básicas do cálculo envolvendo o conceito de infinito. Visam facilitar o trabalho pedagógico dos professores no ensino médio com o propósito se reduzir a carência de estudos e de materiais didáticos desta área.

Partimos de propostas que manipulam as ideias básicas do conceito de limite e continuidade no desenvolvimento do cálculo e noções básicas relacionadas com o infinito potencial e o infinito cardinal.

Em cada atividade as noções são construídas através de uma problematização envolvendo perguntas, indagações, sugestões e conceitos que levam à construção, aprofundamento e formalização de significados.

Palavras-chaves: Educação Matemática, Infinito Potencial, Infinito Cardinal.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O conceito de infinito é essencial para a construção de muitos outros conceitos como limite e continuidade, por exemplo. Historicamente, o infinito apresentou duas noções importantes na sua significação: a potencialidade e a cardinalidade.

A primeira, podemos considerar como uma concepção espontânea, ou seja, a ideia que todos nós temos de infinito: o que não tem fim. A segunda, bastante controvertida, ainda causa dificuldades para a sua compreensão, principalmente quando se admite que um conjunto infinito tem a mesma cardinalidade que um de seus subconjuntos próprios, bem como, a de infinitos de diversos tamanhos.

Os professores dos cursos de nível médio, técnicos e/ou os de cursos superiores que possuem disciplinas que necessitam desses conceitos como, por exemplo, o cálculo e a análise, dentre outras, têm apontado para a dificuldade dos alunos em acompanharem esses cursos, pela falta das noções básicas que deveriam ser trabalhadas anteriormente (RESENDE, 1994).

Nesse Produto Educacional, procuramos reunir as principais ideias que, de alguma forma, estão relacionadas com o conceito de infinito e que servirão para lhe dar significado. Apresentamos um conjunto de atividades originais que podem ser utilizadas na sequência que foram organizadas, ou reorganizadas em outras estruturas, de acordo com a turma, o nível e o assunto que o docente estiver trabalhando.

Caso o professor queira recordar ou aprofundar algumas noções abordadas em nossas atividades propostas poderá consultar cada comentário e a parte 2 desse produto educacional, onde encontrará reflexões e considerações sobre a teoria dos conjuntos, discussões envolvendo o conceito de infinito, entre outros importantes temas.

Esperamos que estas propostas de atividades auxiliem os colegas professores da educação básica no desenvolvimento e aprofundamento do seu trabalho, ampliando possibilidades de alcançar maior qualidade no processo de ensino/aprendizagem da matemática.

PARTE I: ATIVIDADES

ATIVIDADE 1: Comparação de conjuntos

Objetivos da atividade: Comparar conjuntos infinitos e o uso do infinito cardinal.

Considere os conjuntos: A = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$ e

B = $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots\}$

Qual desses conjuntos tem mais elementos? Use um argumento para justificar a sua resposta. É possível que eles tenham a mesma quantidade de elementos? Se a sua resposta for sim, use um argumento para justificá-la. Reorganize esses conjuntos de forma que seja possível compará-los, ou seja, dê uma nova disposição a esses conjuntos com o intuito de mostrar que é possível a comparação. Por exemplo:

$$\{1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25, 36, 49,\ 64, \ldots\}$$

$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ \ldots\}$. Você pode utilizar outra disposição.

Com essa nova disposição é possível compará-los? Você pode usar a noção de correspondência para verificar. Utilize diferentes aspectos numéricos, nessa correspondência, para mostrar a equivalência entre eles, ou seja, que eles são potencialmente equivalente. Sugestão: Faça a transformação numérica e coloque um deles abaixo do outro para facilitar essa comparação. Por exemplo:

$$\{1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ 7^2,\ 8^2, \ldots\}$$

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ \ldots\}$$

Com essa nova disposição é possível compará-los? Respeitando a ordem dos elementos dessa nova disposição, basta observar que os elementos de um deles guardam uma relação específica com os respectivos elementos do outro. Tente, agora, usar um argumento geométrico com o mesmo objetivo. Por exemplo, o lado de um quadrado e a sua área.

Com algum dos argumentos usados anteriormente já podemos decidir sobre o cardinal de $\mathbb{N}$ e o de $\mathbb{Z}$? Justifique a sua resposta.

Comentários:

Dois conjuntos que são cardinalmente equivalentes, têm a mesma quantidade de elementos. Existe uma classe de conjuntos de mesma cardinalidade e o número cardinal representa a quantidade de elementos de cada conjunto dessa classe. Notação: # A, # B, # N, # Z etc.

ATIVIDADE 2: A potencialidade do infinito, na divisão do intervalo.

Objetivos da atividade: Utilização da noção de infinito potencial no conceito de indução e da possibilidade da divisão infinita.

Desenvolvimento:

Considere dois segmentos de tamanhos unitários. Na prática pensemos em dois pedaços de fitas de comprimento igual a 1 u.c. Escolha um deles e recorte em dois outros pedaços de comprimentos iguais, ou seja, a metade do tamanho que tinha. Agora, considere, apenas, uma dessas metades. Faça a mesma coisa, ou seja, divida-a novamente em dois pedaços de comprimentos iguais a metade e considere, apenas, uma delas. Observe que continuando assim, sempre sobrará uma das metades sem ser dividida em cada passo desse processo. Podemos repetir até quantas vezes esse processo? Na prática, esse processo terá fim? Justifique a sua resposta. Teoricamente, esse processo terá um fim? Justifique a sua resposta. Para cada passo já realizado é possível realizar um próximo passo?. Agora, considere o outro segmento, ainda não dividido, e todas as metades que não foram divididas no passo seguinte. Colocando esse segmento (fita) e todas as outra metades não dividida, lado a lado, justapondo-as, formaremos um segmento cada vez maior em cada etapa. Até o final desse procedimento, é possível determinar o comprimento total do novo segmento? Justifique. Teoricamente, é possível determiná-lo? Agora, considere a sequência numérica dos comprimentos de todos os segmentos não divididos do processo, desde o início. Dessa forma, calcule o comprimento do segmento a cada passo? Em cada etapa, o segmento formado terá um comprimento parcial. Em que o tamanho inicial do segmento pode influenciar? Faça uma figura alusiva ao processo. Considere o segmento AB, por exemplo, de comprimento a. Faça um desenho representativo do processo. Escreva uma expressão algébrica para representar a sua soma parcial. Qual é o seu comprimento final? Justifique.

Comentários:

Uma sequência geométrica a_n, de infinito termos, é uma progressão tal que: $a_n = a_{n-1} \cdot q,\ a_1 = a\ dado$ e q é a sua razão. Se $|q| < 1$, a soma dos infinitos termos dessa sequência converge para uma soma limite dada por: $S_\infty = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Atividade 3: A potencialidade do infinito no infinito.

Objetivos da atividade: Introduzir a noção de potencialidade relacionada com o infinito.

Desenvolvimento:

Considera o intervalo fechado [0; 1]. Divida-o em três partes iguais, ou seja, em três outros segmentos de comprimentos iguais. Qual o comprimento de cada parte, em relação ao comprimento inicial? Retire desse intervalo inicial, o intervalo aberto correspondente ao terço central do [0; 1], ou seja, $]\,{}^1\!/_3;\ {}^2\!/_3\,[$. Sobrarão dessa forma, os terços fechados extremos: $[0;\ {}^1\!/_3]$ e $[{}^2\!/_3;\ 1]$. Agora, considere cada um desses terços e faça a mesma coisa, gerando quatro novos terços fechados, dois de cada um dos outros terços anteriores. Teoricamente, é possível realizar esse procedimento mais vezes? Até quantas vezes? Determine esses quatro novos terços. Faça uma figura para representar essa situação. Seja K, o conjunto de todos os elementos dos terços que sobraram em cada etapa do procedimento. Desse processo, é possível formar uma sequência decrescentes de intervalos encaixados, cada um contendo o próximo?. Represente essa sequência. Dê exemplo de seis elementos desse conjunto K. Sugestão: tome os extremos dos intervalos que sobram em cada etapa.

Comentário:

O conjunto K assim determinado é denominado conjunto de Cantor e apresenta algumas propriedades específicas que garantem outros resultados.

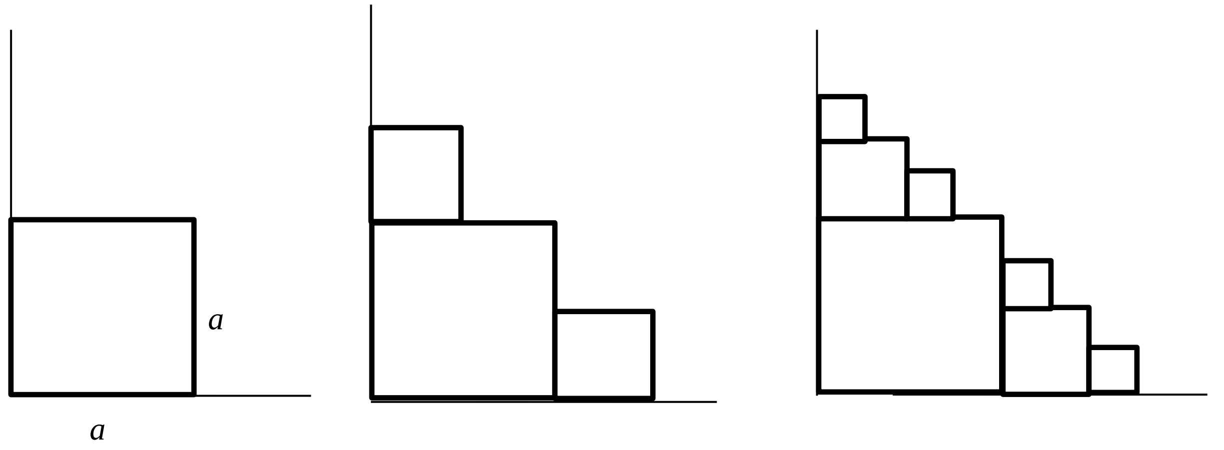
Atividade 4: A tendência do infinitamente pequeno.

Objetivos da atividade: Introduzir a noção de infinitamente pequeno e a noções de tendência e de limite.

Desenvolvimento

A figura a seguir, representa um piso quadrado, extra, que, em cada lado livre, foi colocado, justaposto, um piso quadrado normal com metade do comprimento e em cada lado livre dos pisos normais foi colocado um piso quadrado com metade do comprimento e assim por diante.

Figura 1: Soma limite de áreas decrescentes, de quadrados.



Fonte: Tall 1980 p. 12

Esse processo pode ser repetido mais vezes? Admitindo a continuidade do processo, que figura está se desenhando até o seu aparente término? Teoricamente, em quantas etapas esse procedimento se realizará? Agora, calcule a área de cada quadrado envolvido. Calcule também a área da figura final. Essa área pode ser considerada exata? Justifique a sua resposta. Escreva uma expressão que represente a soma das áreas de todos os quadrados obtidos no processo. A área de todos os quadrados tende para a área de que figura final? Considere $a = 1$ e determine os lados dos demais quadrados menores, justapostos na base da figura formada, após realizadas todas as etapas do processo. Represente a sequência desses lados. É possível calcular o lado referente à dessa figura final? Justifique. Faça o mesmo para o cálculo das áreas desses mesmos quadrados.

Comentário:

Se esse processo continua, observe que as novas áreas, bem como, os novos lados a cada etapa do processo, determinam uma progressão geométrica decrescente com razão dentro do intervalo de convergência e, portanto, têm uma soma limite, dada como no comentário da atividade 2.

Atividade 5: Do menor para o maior e do maior para o menor.

Objetivos da atividade na etapa: Definir cotas inferior, superior e introduzir a noção de ínfimo e supremo de um subconjunto (intervalo) X de $\mathbb{R}$, não vazio, bem como, conjuntos limitados inferiormente e superiormente.

Desenvolvimento:

Considere $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Por exemplo, $X =]-1{,}5; 2{,}5]$. Determine um número real que seja maior que todos os elementos de X. É possível determinar um menor ainda que não pertença a X? Justifique a sua resposta. Nas condições acima, é possível determinar o menor desses números reais que pertença a X? Se sua resposta for sim, qual é esse número? Existem números reais que são menores do que qualquer elemento de X ? Dê exemplos de alguns desses números reais. Qual é o maior número real, que mesmo assim, ainda é menor que qualquer elemento de X? Esse número pertence a X? Justifique. Existe algum elemento de X que seja menor ou igual que qualquer elemento de X? X tem ínfimo pertencente a X? X tem máximo pertencente a X? Em cada caso justifique a resposta.
Sugestão: Leia o comentário.

Portanto, considere os intervalos: $A =]-1{,}5; 2{,}5]$, $B = [-0{,}5; 8]$, $C =]-\infty; -2[$, $D = [0; +\infty[$ e $E =]3{,}08; 5{,}15[$.

a) Quais desses conjuntos são limitados inferiormente? Justifique.
b) Quais desses conjuntos são limitados superiormente? Justifique.
c) Quais são limitados? Justifique.
d) Quais não são limitados? Justifique.

Agora, considere o conjunto (intervalo) $X = [2; 3[$.

a) Dê três cotas inferiores para X
b) Dê três cotas superiores para X
c) Qual das cotas inferiores dadas é a maior? É possível determinar uma cota inferior ainda maior? Justifique.

d) Qual das cotas superiores dadas é a menor? É possível determinar uma cota superior ainda menor? Justifique.

e) Todos os subconjuntos (intervalo) X de $\mathbb{R}$ são dotados de cotas? Justifique.

Comentário

Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto (Intervalo), não vazio. Diz-se que X é limitado inferiormente quando existe um número $M \in \mathbb{R}$ tal que $M \leq x, \ \forall x \in X$ e limitado superiormente, quando existe um número real N, tal que $x \leq N, \ \forall x \in X$. Diz-se que X é limitado, quando limitado inferiormente e, também, superiormente. Uma cota inferior de X é um número real l tal que $l \leq x, \ \forall x \in \ \mathbb{R}$ Por outro lado, uma cota superior de X é um número real m tal que $m \geq x, \forall x \in \mathbb{R}$. Evidentemente, todo conjunto cotado inferiormente e superiormente é limitado.

Atividade 6: Inferioridade e supremacia.

Objetivo da atividade: Conceituar ínfimo, supremo, mínimo e máximo de um subconjunto X de $\mathbb{R}$, não vazio.

Desenvolvimento:

Considere os intervalos: A =] – 1,5; 2,5], B = [- 0,5; 8], C =] - ∞; - 2[, D = [0; + ∞ [e E =] 3,08; 5,15[.

a) Notadamente, - 1,6 é uma cota inferior de A. Dê uma outra cota inferior de A maior que essa dada. Existe alguma maior que as duas dadas? Dê exemplo. A possui uma maior das cotas inferiores? Por outro lado, 2,55 é uma cota superior de A. Exiba uma cota superior menor que essa cota superior dada. É possível exibir uma outra menor ainda? A tem uma menor cota superior ?. No caso afirmativo, exiba essa cota.
b) Determine: a maior das cotas inferiores de B e a menor das cotas superiores de B. Qual delas pertence a B? B tem máximo ou mínimo? Veja o comentário.
c) Quais dos intervalos não têm uma das cotas?
d) Dê o inf E e o sup E.
e) Qual deles é fechado e limitado? Justifique.

Agora, considere os intervalos:

$A =]-\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}[,\quad B = [\sqrt{2};\ 5[,\quad C =]0;\ \sqrt{3}]\ \text{ e }\ D = [-2{,}5;\ 0]$

a) Qual deles, embora limitados, não tem mínimo e nem máximo? Justifique.
b) Qual deles tem mínimo e não tem máximo? Justifique.
c) Qual deles tem máximo e não tem mínimo? Justifique
d) Qual deles tem mínimo e máximo? Justifique.

Comentário

Considere um subconjunto (intervalo) X de $\mathbb{R}$, não vazio. O ínfimo do conjunto X, denotado por inf X, quando existir, é a maior de todas as cotas inferiores de X. Por outro lado, o supremo do conjunto X, denotado por sup X, quando existir, é a menor de todas as cotas superiores de X.

Em outras palavras: Considere $c = \inf X$ e $d = \sup X$. Se $c' \in \mathbb{R}$ é uma outra cota inferior de X, então, $c' < c$. Ou seja, $\forall\, x \in X$, se $\exists\, c' \leq x$, então, $c' < c \leq x$. Agora, se d' é uma outra cota superior de X, então, $d < d'$. Ou seja, $\forall\, x \in X$, se $\exists\, d'$, com $d' \geq x$, então, $x \leq d < d'$.

Obs. Se $c = \inf X \in X$, então, c é o mínimo de X. Notação: $c = \text{Mín } X$.

Se $d = \sup X \in X$, então, d é o máximo de X. Notação: $d = \text{Máx } X$.

Atividade 7: A distância e a vizinhança

Objetivos da atividade na etapa: Definir e determinar comprimento e centro de um intervalo, visando o conceito de vizinhança.

Desenvolvimento

Dados os intervalos: A =] – 0,5; 1], B = [0; 3] , C =] – 2; -1 [, D = [1,5; 4 [, E =] - ∞; 3] e F = [1; + ∞ [.

a) Subtraia, de cada um deles, o limite inferior, do superior, ou seja, limite superior, menos o limite inferior, nesta ordem. Quais deles não podemos determinar essa diferença? Determine a metade da soma de seus extremos (centro) de cada um desses intervalos, se possível.
b) Considere o centro do intervalo B. Agora, considere o intervalo X de raio 1,2 (distância do centro a cada extremo do intervalo) com o mesmo centro de B. $X \subset B$? Justifique. O número $2,5 \in X$? E o número $2,8 \in X$? Justifique cada caso.
c) Determine o comprimento de cada um dos intervalos, quando possível.
d) Calcule o raio de cada um dos intervalos dados, quando possível.
e) Existem intervalos, em $\Re$, que não tenham centro? Justifique.
f) É possível determina um intervalo centrado em 1 que esteja contido em F? E centrado em 3, contido em E? Justifique a sua resposta nos dois casos. É possível determinar intervalos, um deles centrado em -2 e o outro, em -1 que estejam contidos em C? Justifique. Sugestão: Em cada caso, considere um raio conveniente.

Comentário Sejam a e b dois números reais, com a < b. Considere os intervalos limitados:] a; b [, [a; b [,] a; b] e [a; b]. Define-se o comprimento ε, desses intervalos, como sendo a diferença: ε = b – a. Cada um dos intervalos acima tem centro em: $\lambda = \frac{a+b}{2}$. A distância do seu centro a cada extremidade do intervalo, chama-se raio do intervalo. Dizemos, também, que o intervalo está centrado em λ e com raio, nesse caso, ε/ 2.

Atividade 8: Quem tem vizinho não fica isolado

Objetivos da atividade: Introduzir o conceito de vizinhança, pontos interior e isolado de um conjunto, visando a noção de interior de um conjunto, conjuntos aberto e fechado.

Desenvolvimento

Considere o conjunto (intervalo) $X \subset \mathbb{R}$, tal que $X =]\,0;\,1\,[$ e o número real 0,3. Evidentemente, $0{,}3 \in X$.

a) Determine três intervalos V_1, V_2 e V_3, centrados nesse ponto, todos contidos em X.
b) Determine, agora, outros intervalos com raios decrescentes e que estejam contidos em X.
c) Considere a vizinhança (veja no comentário) de raio $\varepsilon = 0{,}02$. Qual é esse intervalo? Qual é o seu comprimento? É possível considerar uma vizinhança tão próxima desse ponto, o quanto queremos? Justifique a sua resposta.
d) Quantas vizinhanças, centrada nesse ponto, podemos considerar? Justifique.
e) Dê outras duas vizinhanças de raio $\varepsilon < 0.02$, para esse ponto.
f) Mostre que o ponto 0,999 é um ponto no interior de X (Mais uma vez, veja o comentário). Sugestão: considere $\varepsilon = 0{,}0001$. Podemos afirmar que todos os pontos de X são interiores? Justifique.
g) Considere o conjunto $Y =]-1;\,0{,}9\,[\cup \{1\} \cup]\,1{,}1;\,2[$, mostre que, embora $1 \in Y$, ele é um ponto isolado de Y. Sugestão: considere o intervalo, V, centrado em 1 de raio $\varepsilon = 0{,}1$ ou um outro raio qualquer menor, e mostre que nesse intervalo não tem qualquer outro ponto de Y, a não ser o seu centro. Ou seja, $Y \cap V = \{1\}$.

Comentário

A ideia que temos de vizinhança, trata-se de uma concepção espontânea de proximidade. Vizinho é aquele que está próximo a nós. Consequentemente, envolve a noção de distância, de intervalo. Podemos estabelecer a que raio essa distância está sendo considerada, ou seja, o raio da vizinhança desejada, podendo estar tão próximo o quanto se queira.

Formalmente, Seja X um subconjunto, não vazio, de $\mathbb{R}$. Considere $a \in X$. Uma vizinhança a, de raio $\varepsilon > 0$, é qualquer intervalo aberto $]\,a - \varepsilon\,;\,a + \varepsilon\,[$, contido em X. Notadamente, a é o centro do intervalo. Se existe uma vizinhança de raio ε, centrada em a, de pontos de X, dizemos que a é um ponto interior de X. Ou seja: Se $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que]

$a - \varepsilon\, ;\, a + \varepsilon\, [\, \subset$ X, então, a é um ponto interior de X. Quando nessa vizinhança não existe qualquer outro ponto de X, dizemos que a é um ponto isolado de X.

Atividade 9: Abrir ou fechar para ficar no interior.

Objetivo da atividade: Conceituar conjuntos aberto e fechado.

Desenvolvimento

Sejam os intervalos: A =] 2,1; 4,8 [, B = [1; 3] , $\mathbb{R}$ = C =] - ∞; +∞ [e D = ϕ .
Por definição, sabemos que A e C são conjuntos abertos.

a) Mostre que D é fechado. Sugestão: Leia antes o comentário.
b) Escolha um elemento qualquer de A e mostre que ele é um ponto interior de A. Afirmo que qualquer ponto de A é ponto interior de A. Justifique.
c) Mostre que existem pontos de B que não estão no interior de B, consequentemente o conjunto B não é aberto. Sugestão: Considere os seus extremos. Justifique.
d) Podemos afirmar que se um conjunto B não é aberto, então, ele é fechado?
e) Dê um exemplo de um conjunto B, embora não seja aberto, porém, não é fechado.

Comentário

Considere um subconjunto X de $\mathbb{R}$, não vazio. Se todos os pontos de X são interiores, ou seja, estão no interior de X, dizemos que X é um conjunto aberto. Além disso, $\mathbb{R} \setminus X$, é denominado conjunto complementar de X. Dizemos que um conjunto X é fechado quando o seu complementar $\mathbb{R} \setminus X$ é aberto e vice-versa. O conjunto $\mathbb{R}$ é aberto, logo, o seu complementar, ϕ , é fechado. Mas, o conjunto vazio, ϕ, é aberto, logo, o seu complementar, $\mathbb{R}$, é fechado. Portanto, esses são os dois únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são, ao mesmo tempo, aberto e fechado.

Atividade 10: Encaixar para sempre ficar dentro.

Objetivo da atividade: Definir intervalos encaixantes, determinar e identificar propriedades desses intervalos.

Desenvolvimento

Considere o intervalo fechado [2; 5]

a) Determine a sequência de intervalos encaixantes a partir desse intervalo, para $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ e $n = 6$. Sugestão: Leia antes o comentário.
b) Determine o comprimento de cada intervalo dessa sequência e seu centro.
c) Qual o intervalo de menor comprimento? E o de maior? Justifique.
d) Nessa sequência, determine a partir de que n, o comprimento do intervalo I_n , ε_n , seja o maior possível. É possível encontrar um I_n tal que o ε_n seja o menor possível? Justifique.
e) Escreva a sequência decrescente dos intervalos encaixantes determinados.

Comentário

Sejam: $I_1 , I_2 , I_3 , \ldots , I_{n-1}, I_n , I_{n+1} , \ldots$ uma sequência decrescente de intervalos fechados, com: $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset , \ldots , \supset I_{n-1} \supset I_n \supset I_{n+1} \ldots \supset \ldots$ cada um contendo o próximo, sucessivamente. Dizemos que essa sequência de intervalos assim constituída é formada por intervalos encaixados ou intervalos encaixantes. Considere um intervalo fechado [a; b] e seu comprimento $\lambda = b - a > 0$. A sequência de intervalos fechados, definida como:

$[\, a + \frac{b-a}{n+1} ; b - \frac{b-a}{n+1} \,]$, para $n \in N$, com $n \geq 1$, é formada de intervalos encaixantes, centrados em λ_n , para $n \geq 1$. Mostre que, nesse caso, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = \ldots$.

Além disso, se $I_1 = [a_1 ; b_1]$, $I_2 = [a_2; b_2]$, $I_3 = [a_3 ; b_3]$ e assim por diante, então, $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < b_n < b_{n-1} < \ldots < b_3 < b_2 < b_1$. Ou seja, o conjunto $A = \{a_1, a_2 , a_3 \ldots a_n\}$ é limitado superiormente. Logo, A tem um supremo. Seja $c = \sup A$. Portanto, $a_n \leq c$. Mas, $c \leq b_n$, pois, é a menor das cotas superiores de A. Ou seja:
$a_n \leq c \leq b_n$. Isto é: $c \in I_n$, $\forall$ n, $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, existe um elemento pertencente a todos os intervalos dessa sequência de intervalos encaixantes (Lima, E.L. 2001 p. 54).

Atividade 11: Corresponder para contar

Objetivos da atividade: Utilizar a noção de correspondência entre conjuntos para definir conjuntos finito, infinito e enumerabilidade.

Desenvolvimento

Sejam V = $\{a, e, i, o, u\}$ e M(2) = $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, ...\}$, o conjunto dos múltiplos de 2.

a) Mostre que V é finito, ou seja, que existe um segmento inicial de ℕ cardinalmente equivalente a V. Vide comentário.

b) Determine # V.

c) É possível estabelecer uma correspondência perfeita entre um segmento inicial de ℕ, um I_n, e o conjunto M(2)? Justifique.

d) Mostre, usando um argumento de correspondência, que o M(2) não é finito e, portanto, é infinito.

e) Prove que M(2) é infinito e enumerável.

Comentário

Considere o conjunto dos números naturais N. Definimos os conjuntos I_n como os subconjuntos de N que contêm os elementos de N, de 1 até n. Ou seja:
I_1 = $\{1\}$, I_2 = $\{1, 2\}$, I_3 = $\{1, 2, 3\}$, I_4 = $\{1, 2, 3, 4\}$, ... , I_n = $\{1, 2, 3, ..., n\}$. Cada conjunto I_n é denominado um segmento inicial do conjunto N. Chama-se cardinalidade de um conjunto X, ao número de elementos desse conjunto. Notação: # X. Portanto: # I_1 = 1, # I_2 = 2,
I_3 = 3, ... , # I_n = n

Agora, considere um conjunto X não vazio. Dizemos que X é finito quando existe uma correspondência perfeita (correspondência um a um) entre um segmento inicial de ℕ e o conjunto X. Se X não é finito, então, ele é infinito. Diz-se que um conjunto X é enumerável quando for finito ou quando existe uma correspondência perfeita entre ℕ e X. Dizemos, também, que ℕ e X são cardinalmente equivalente. Portanto, se X é finito, então, é cardinalmente equivalente a um dos segmentos iniciais de ℕ .

Atividade 12: Enumerabilidade e equivalência.

Objetivo da atividade: Mostrar a enumerabilidade dos números inteiros relativos e dos números racionais relativos.

Desenvolvimento

Considere o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$.

Observe que rearranjando os elementos de $\mathbb{Z}$ conforme a ordem a seguir:

$\mathbb{Z} = \{0, -1, +1, -2, +2, -3, +3, -4, +4, \ldots\}$, varreremos todo o conjunto $\mathbb{Z}$. É possível estabelecer uma correspondência perfeita entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$? Justifique.

a) Mostre que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são cardinalmente equivalente.
b) Prove que $\mathbb{Z}$ é enumerável.
c) É possível estabelecer uma correspondência perfeita entre $\mathbb{Z}$ e um de seus subconjuntos ? Justifique usando um argumento geométrico.
d) Use um argumento geométrico para mostrar que $\mathbb{Z}$ é enumerável.
e) Use o argumento da diagonal de Cantor para mostrar que o conjunto dos números racionais relativos é enumerável.
f) Mostre, usando o item anterior e reorganizando o conjunto dos números racionais relativos, que é possível contar os seus elementos.

Comentário

Sabemos que um conjunto X quando finito é enumerável, ou seja, é sempre possível contar os seus elementos. Se X é infinito, então, ele pode ser enumerável ou não. Ou seja, X é um conjunto que pode ter seu elementos contados e, para isso, usaremos o conjunto $\mathbb{N}$. Uma correspondência, um a um, com os elementos de $\mathbb{N}$ nos dá uma ideia de contagem. As vezes, essa correspondência nos parece absurda, mas, é verdadeira. Do tipo: um conjunto com um de seus subconjuntos próprios. É uma das caras do infinito.

Atividade 13: O todo é formado de partes.

Objetivo da atividade: Conceituar subconjunto e conjunto das partes, bem como, comparar conjuntos infinitos.

Desenvolvimento

Considere os conjuntos: A = $\{a\}$, B = $\{a,b\}$, C = $\{a, b, c\}$ e D = $\{a, b, c, d\}$

a) Determine $\wp$(A) e # $\wp$(A), compare # A e # $\wp$(A) .

b) Determine $\wp$(B) e # $\wp$(B), compare # B e # $\wp$(B).

c) Determine $\wp$(C) e # $\wp$(C), compare # C e # $\wp$(C).

d) Determine $\wp$(D) e # $\wp$(D), compare # D e # $\wp$(D).

e) Escreva # $\wp$(A) , # $\wp$(B), # $\wp$(C) e # $\wp$(D) como uma potência de base 2.

f) É possível generalizar o resultado do item anterior? Justifique.

Comentário

Seja A um conjunto. Um conjunto X contido em A é denominado um subconjunto de A ou uma parte de A. Notação: X $\subset$A. O conjunto formado por todos os subconjuntos de um determinado conjunto, inclusive o conjunto vazio e ele próprio, é denominado conjunto das partes desse conjunto. Notação: $\wp$(A) Verifique que: # $\wp$(A) > # A.

Atividade 14: É possível estar em qualquer lugar.

Objetivo da atividade: Definir conjunto denso e mostrar a densidade dos racionais nos reais.

Desenvolvimento

Considere os números reais: 1,2 e $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{5}$ e 0,333... e π e e .

a) Determine um número racional mais próximo da $\sqrt{2}$, com três casas decimais, arredondando-o por excesso ,ou seja, estamos substituindo o irracional por um racional bem próximo a ele (Roque, T. 2012 p.425). Determine a média aritmética entre esse número e 1,2. Verifique se essa média está entre o 1,2 e a $\sqrt{2}$ (está entre eles).

b) Determine o número racional mais próximo da $\sqrt[3]{5}$ através de um arredondamento por falta. Determine a média aritmética entre esse número e o número 0,333 ... . Agora, verifique se essa média está entre eles.

c) Faça o mesmo para π e para e, observando em cada caso, se o arredondamento deva ser por falta ou por excesso.

d) Agindo, assim, podemos afirmar que entre dois reais distintos, sempre haverá um racional? Justifi*que*.

Comentário

Seja A um conjunto não vazio. Um conjunto X contido em A é denso em A quando para quaisquer dois elementos x e y , x < y, pertencentes a A, sempre vai existir um elemento $z \in X$ tal que $x < z < y$. Em outras palavras, em qualquer vizinhança de z, sempre existirá elementos de A. O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Já sabemos que entre dois racionais x e y sempre vai existir um número racional: a sua média aritmética. Ou seja: $x < \frac{x+y}{2} < y$ e, portanto, nada mais a fazer. Consequentemente, existem três outras situações a considerar: x, racional e y, irracional; x, irracional e y, racional e, finalmente, x e y, irracionais. Em cada uma delas, vai existir sempre um z, racional. (Roque, T 2012 p.425).

Atividade 15: Tender até chegar a um limite

Objetivos da atividade: Introduzir o conceito de tendência, convergência e de Limite

Desenvolvimento

Considere a sequência: $a_n = 2 - \frac{1}{n}$, para n = 1, 2, 3, ..., 28, 29 e 30 e $\varepsilon = 2 - a_n$ Conforme quadro 2, a seguir:

Quadro 2: Convergência para um ponto

n =	a_n =	ε =	n =	a_n =	ε =
1	1,00	1,00	16	1,94	0,06
2	1,50	0,50	17	1,94	0,06
3	1,67	0,33	18	1,94	0,06
4	1,75	0,25	19	1,95	0,05
5	1,80	0,20	20	1,95	0,05
6	1,83	0,17	21	1,95	0,05
7	1,86	0,14	22	1,95	0,05
8	1,88	0,13	23	1,96	0,04
9	1,89	0,11	24	1,96	0,04
10	1,90	0,10	25	1,96	0,04
11	1,91	0,09	26	1,96	0,04
12	1,92	0,08	27	1,96	0,04
13	1,92	0,08	28	1,96	0,04
14	1,93	0,07	29	1,97	0,03
15	1,93	0,07	30	1,97	0,03

Fonte: O autor

a) Os termos da sequência, a cada passo, estão aumentando, diminuindo ou nenhum dos dois?
b) Qual o menor número inteiro para o qual os termos estão se aproximando?
c) Determine a distância de cada termo da sequência para esse numero inteiro. Confira essas distâncias com os valores da terceira coluna do quadro.
d) Podemos afirmar que os termos da sequência estão se aproximando cada vez mais desse número inteiro? Justifique, através dos valores da terceira coluna.
e) Dê mais termos dessa sequência mais próximos desse número inteiro, que os termos no quadro acima. Calcule a distância de cada um deles a esse número inteiro. Sugestão: Calcule a_n, para n > 30. Faça, por exemplo, n = 100, n = 1000 e n = 1 000 000.
f) Dizemos que esses termos estão tendendo ou convergindo para esse número inteiro quando essas distâncias ficam cada vez menor, tornando-os mais próximos. Verifique

se essa afirmação é verdadeira nesse caso.

Comentário

Note que o quanto mais próximo, o valor da sequência estiver, jamais vai chegar até ele, muito menos, ultrapassá-lo. Esse valor é o limite. Esse mesmo raciocínio servirá quando os termos forem decrescendo para se aproximar do limite.

Por outro lado, quando saímos de casa para ir para algum lugar, não pensamos se estamos próximo desse lugar logo que saímos. Pensamos, nisso, a partir de um ponto de referência. Ai, sim, após esse ponto de referência, ficamos na expectativa de chegar. Para o limite, acontece a mesma coisa. Só após um certo termo, ficaremos interessado se estamos se aproximando .Ou seja, só após um certo termo, verificaremos se todos os demais estão se aproximando cada vez mais do limite. Não é de qualquer distância que se pode ser considerado próximo do limite. Essa distância tem que ser definida, negociada como uma regra de estar próximo. Ou seja, estamos falando de uma referência e de até quanto se deve ser considerado estar próximo do limite. Por exemplo, após o 100º termo (referência) será considerado próximo do limite, todos aqueles termos com distâncias inferiores a, por exemplo, 0,001 (regra). Ou até menor ainda. Formalmente, a é o limite de a_n quando dado um $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\, n$, $n > n_0$ (referência) , tem-se sempre $|a_n - a| < \varepsilon$ (regra).

PARTE II: LEITURA COMPLEMENTAR

REFLEXÕES E CONSIDERAÇÕES SOBRE A TEORIA DOS CONJUNTOS

1 Conjuntos

A principal noção que devemos passar numa teoria envolvendo conjuntos é o que seja um conjunto. O conceito matemático de um conjunto pode ser usado como o fundamento para todo conhecimento matemático. Em geral, não temos uma definição específica para conjunto, conforme a observação a seguir:

> Falaremos algumas vezes de coleção ou de classe em vez de conjunto, mesmo reconhecendo que essas palavras possam ser futuramente usadas com significados mais específicos. Portanto, conjunto é algo que não se define especificamente. A situação é muito semelhante ao que acontece com a teoria axiomática da geometria plana em que, lá, não se definem ponto e reta, descrevendo-se, apenas, o que se pode fazer com eles (Halmos, P. R, 2001 p. 2).

Os objetos do que são formados os conjuntos, as classes ou as coleções são denominados elementos. Agora, se de alguma forma um elemento está presente numa coleção, classe ou conjunto, fazendo parte delas ou dele, dizemos que ele pertence a essa classe, coleção ou a esse conjunto. A pertinência é uma das mais importantes relações usadas na teoria dos conjuntos. Ou seja, se x é um elemento de um conjunto A, dizemos que x pertence a A e usaremos a notação:

$x \in A$, para registrar o fato.

Caso contrário, isto é, se x não é um elemento do conjunto A, dizemos que ele não pertence a A e, escrevemos:

$x \notin A$, para registrar o fato.

A relação de pertinência tem sido melhor compreendida quando afirmamos que pertencer a um conjunto é estar presente como um de seus elementos ou fazer parte dele, ou seja, quando um elemento pertence ao conjunto, ele aparece nesse conjunto ou é algo do que o conjunto é formado.

Nessa teoria, não há qualquer obrigatoriedade do uso das letras do alfabeto, minúscula ou maiúscula. O que é necessário o uso uma notação padrão. É o que se faz, naturalmente, usando a minúscula quando se trata de elementos e a maiúscula, de conjunto, dando-se, a este, um status por ser aquele que o contém. Uma outra relação não menos importante é aquela em que um conjunto pode ter dentro de si, todos os elementos de um outro. Ou seja:

Se um conjunto A tem dentro de si, todos os elementos de um outro conjunto B, sem exceção, dizemos que o conjunto B está contido no conjunto A ou, equivalentemente, que o conjunto A contém o B, ou ainda, que B é um subconjunto de A e, escrevemos:

$\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ ou, equivalentemente, $A \supset B$ No caso contrário, ou seja, se pelo menos um dos elementos de B, não é elemento, também, de A, dizemos que B, agora, não está contido em A ou não é um subconjunto de A e, escrevemos:

$\mathbf{B} \not\subset \mathbf{A}$

Obs. Essas relações determinam a linguagem básica para seguirmos na teoria dos conjuntos.

2 O conjunto das partes

Dado um conjunto A, podemos formar, a partir de A, um outro conjunto que contenha em si, todos os subconjuntos possíveis de A, inclusive o conjunto vazio e o próprio conjunto A, que são consideradas partes impróprias de A, pois, na verdade, não seriam considerados uma parte: já que um deles se trata do conjunto vazio e o outro, do próprio conjunto A.

Notação: $\mathcal{P}(A)$ (Partes de A)

Por exemplo:

Sendo $A = \{a, b\}$, o conjunto das partes de A é: $\mathcal{P}(A) = \{\phi, A, \{a\}, \{b\}\}$

Sabemos que uma teoria é formada por um conjunto de axiomas independentes e consistentes, usados para fundamentar toda teoria, ou seja, é a base para se deduzir qualquer outro resultado que se queira, dentro dessa teoria. O primeiro deles, é o mais simples de todos. Na teoria dos conjuntos existem alguns axiomas que vão responder por toda teoria. A saber:

3 Axiomas da Teoria dos Conjuntos

O **axioma da existência,** assim enunciado: “Existe um conjunto”. Não podemos dar início a uma teoria sem saber da existência do que vamos trabalhar.

O **axioma da Extensão**, assim enunciado: “Dois conjuntos são iguais quando possuem os mesmos elementos”. Ou seja, um conjunto é determinado por sua extensão, isto é, pela identificação, um a um de seus elementos, na comparação com outro. Consequentemente, pode-se verificar se é quem dizemos quem é, ou se trata de um outro conjunto. Com esse axioma, podemos afirmar se existe um outro e, não apenas um (a ideia de extensão !). Nesse caso, podemos verificar se há igualdade entre eles.

Agora, se $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ **e** $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$,então, A e B têm os mesmos elementos e pelo axioma da extensão A = B.

Essa equivalência pode ser usada para a verificação da igualdade de dois conjuntos, evitando o trabalho extensivo, ou seja, evitando em determinar todos os elementos de cada um deles, observando se são os mesmos.

Obs. Dizemos que um conjunto é igual a um outro se tem os mesmos elementos. Observe que por trás dessa condição de igualdade existe, apenas, uma necessidade, ou seja, ela pode não ser suficiente. Quero dizer que, para ser igual, devemos começar, pelo menos, com os mesmos elementos. Ou seja, um conjunto A pode ter os mesmos elementos que um conjunto B e não ser igual a ele (basta que B esteja contido em A). Isto é, tendo-se os mesmos elementos, desconfia-se que sejam iguais. A exigência é que cada um deva ter os mesmos elementos que o outro.

O **axioma da especificação,** assim enunciado: " Para qualquer conjunto A e toda condição S(x), corresponde um conjunto B, cujos elementos são, exatamente, aqueles elementos x de A, para os quais a condição S(x) é verdadeira. Ou, equivalentemente: qualquer coisa que se diga a respeito dos elementos de um conjunto, especifica um subconjunto desse conjunto, dos elementos de quem se dizem. Isto é, o conjunto está especificado. De acordo com esse axioma, nenhum conjunto pode ter origem do nada. O conjunto B fica determinado, de maneira única, pelo axioma da extensão. Pois, não podemos ter qualquer outro conjunto com elemento das coisas de que se dizem, pois, esse elemento deve estar em B, pois, B foi formado assim. Simbolicamente, podemos escrever:

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{A} \mid \ \mathbf{S(x)\ \text{é válida}}\}$$

Obs. Até agora, os axiomas apresentados só servem para construir novos conjuntos a partir dos antigos. Na garantia que existe um começo, a rigor, o axioma da especificação só garante a existência de subconjuntos (grifo nosso!). Assim sendo, não será permitido a notação do tipo $\{\mathbf{x} \mid \ \boldsymbol{S(x)}\}$, sem informar a que outro conjunto, o elemento x pertence. Ou seja, x foi especificado pela propriedade, porém, não se sabe de onde ele é. Portanto, não podemos ter o conjunto (subconjunto !).

Nesse caso, o conjunto A ficou abstraído, o que se constituiu no axioma da abstração. Esse axioma permite definir conjunto do tipo:

$\{\mathbf{x} \mid \ \boldsymbol{x} \notin \mathbf{x}\}$, o que consiste no **Paradoxo de Russel** (É impossível se tirar algo do nada!), parodiado pela seguinte situação: "Em uma cidade existe um barbeiro que só barbeia as pessoas que não podem barbear a si mesmas. Quem faz a barba do barbeiro?" (Halmos, 2001 pág. 12).

Agora, estamos em condições de discutir duas questões importantes a respeito da teoria dos conjuntos. Uma delas é:

Existe um conjunto vazio?

Os axiomas da existência e o da especificação garantem que sim, basta que, aqueles de que se dizem algo, não existam. Por especificação, podemos defini-lo como sendo:

$$\phi = \{\mathbf{x} \in \mathbf{A} \mid \boldsymbol{x} \neq \mathbf{x}\}$$

A outra é: Existe um conjunto universo?

Os mesmos axiomas respondem negativamente, pois, na prática, eles afirmam que: **Nada contém tudo!**. Ou seja, pelo axioma da especificação, para ser considerado conjunto, os seus elementos devem ter vindo de algum outro conjunto, mas, se ele é o universo, isso, não viabiliza. De onde vêm seus próprios elementos?

O **axioma da união** determina que "Dada qualquer coleção de conjuntos, existe um conjunto que pode ser formado por todos os elementos de, pelo menos, um dos conjuntos dessa coleção."

Em outras palavras: Seja A, B, C, D, ... uma coleção de conjuntos. Existe um conjunto X que contém **todos** os elementos de A, de B, de C ou de quaisquer outro conjunto, dessa coleção.

Considere $\mathbb{C} = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, ...\}$ uma coleção de conjuntos.

Seja $X \in \mathbb{C}$ e $x \in X$. Assim sendo, o axioma da união pode especificar um conjunto do tipo:

$U = \{x \in X, \text{ para algum } X \in \mathbb{C}\}$ Ou seja: x pode ser de **A**, **B**, **C** ou de qualquer outro elemento de $\mathbb{C}$.

O próprio axioma da especificação garante a sua unicidade. Isso, nos permite definir a união de alguns conjuntos da coleção $\mathbb{C}$ ou dela toda.

4 Os axiomas de Peano e o conjunto dos números naturais.

Uma abordagem axiomática para o conjunto dos números naturais foi formulada pelo matemático italiano Giuseppe Peano em 1879. Nesta formulação, ele estabelece que existe um conjunto $\mathbb{N}$ satisfazendo a cinco axiomas. Ou seja, existe um conjunto $\mathbb{N}$ satisfazendo as propriedades (axiomas):

P1. $0 \in \mathbb{N}$

P2. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow s(n) \in \mathbb{N}$, onde $s(n)$ representa o sucessor do número n.

P3. $0 \neq s(n)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ (o 0 não é sucessor de alguém, em $\mathbb{N}$)

P4. $m, n \in \mathbb{N}$ e $s(m) = s(n) \Rightarrow m = n$ (quem tem o mesmo sucessor, é igual!)

P5. Princípio da indução finita

Se $A \subset \mathbb{N}$ é um conjunto tal que: $0 \in A$ e $n \in A \Rightarrow s(n) \in A$, então, $A = \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ é único !). Que é equivalente a dizer: Existe um conjunto indutivo representado por $\mathbb{N}$ com todas as propriedades (Postulados) anteriores, ou seja, de P1 a P5, e que, se existir um outro conjunto contendo essas mesmas propriedades, será identificado como o $\mathbb{N}$. Isso significa que $\mathbb{N}$ é único (Halmos, 2001 p.77). Dai, podemos, identificar $\mathbb{N}$ a partir da seguinte construção, baseando-se na teoria dos conjuntos:

Uma ideia é representar:	Ou seja:
$0 = \phi$	0
$1 = \{\phi\}$	$1 = 0 + 1$
$2 = \{\phi, \{\phi\}\}$	$2 = 1 + 1$
$3 = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi. \{\phi\}\}\}$	$3 = 1 + 1 + 1 = 2 + 1$
$4 = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi, \{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}\}\}$	$4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 3 + 1$
.	.
.	.
.	.
e assim por diante.	e assim por diante

Ou seja, $\mathbb{N}$ pode ser pensado como um conjunto em que é sempre possível colocar um novo elemento, a partir de qualquer um de seus elementos. Isso caracteriza a sua potencialidade. Isto é, seremos sempre induzido a pensar num próximo elemento em $\mathbb{N}$, o que nos leva às ideias da infinitude e da indução. Uma das noções de infinito está relacionada à ideia de indução fundamentada pela potencialidade.

Obs. De uma maneira geral, define-se $s(A) = A \cup \{A\}$, como o sucessor do conjunto A

5 A noção de ordem

Dado um conjunto A qualquer e uma relação R, definida em A, de modo que valham as seguintes propriedades:

0 1. Reflexividade

$\forall\, x \in A,$ tem-se $x \; R \; x$

0 2. Anti-simétrica

$\forall\, x, y \in A$ Se $x \; R \; y$ e $y \; R \; x$, então, $x = y$

0 3. Transitividade

$\forall$ x, y e z $\in$ A Se x R y e y R z, então, x R z

Dizemos, portanto, que o conjunto A é um conjunto ordenado parcialmente.

0 4. Tricotomia

$\forall$ x, y e z $\in$ A só se pode verificar uma das relações: x R y , y R x ou x = y

Nesse caso, dizemos que a ordem definida em A é total e que A é um conjunto totalmente ordenado. Portanto, é de fácil verificação que a relação $\leq$ (menor ou igual, que seja possível ser definida num conjunto A, é uma relação de ordem total em A). A ordem total não admite a simetria !.

6 Noções relacionadas com o conceito de infinito

Reunimos, portanto, algumas noções que entendemos, que de alguma forma, estejam relacionadas com o conceito de infinito. Algumas delas, já explicamos a razão.

A noção de Correspondência

A noção de correspondência é tão elementar e simples quanto fundamental em matemática. É pela correspondência que podemos associar as coisas, mentalmente ou não. Ela pode ocorrer: de um elemento para um único elemento (correspondência um a um, biunívocamente), ou seja, a considerada correspondência perfeita; de um para vários; de vários para um; ou de vários para vários (Não biunivocamente).

Essas correspondências ocorrem a partir de alguma lei ou regra específica que orienta ou induz como ela deve ser feita, denominada **lei de correspondência.** A ideia é de imaginar algo antes que deve se relacionar, por essa lei de correspondência, a algo depois. Ela pode ocorrer segundo um processo mental, arbitrário, sem o uso da lei. Podemos ter correspondência completa ou não. Ou seja, alguém falta se corresponder. É possível fazer correspondência ordenada de modo que os elementos de um conjunto siga, exatamente, a ordem dos elementos do outro conjunto.

Conjuntos equivalentes

A partir da correspondência, podemos definir conjuntos equivalentes, como sendo aqueles que guardam entre si uma correspondência perfeita (biunívoca).

Em 1883, o matemático George Cantor conceituou o número cardinal de um conjunto da seguinte forma:

Se abstrairmos a natureza dos elementos e a ordem na qual eles são dados, obtemos o número cardinal do conjunto. O número cardinal ou cardinalidade (quantidade de elementos) de um conjunto é a propriedade essencial que sobra deste quando desconsideramos todas as suas características intrínsecas e as relações entre seus elementos. Formalmente, por meio da correspondência, podemos dizer:

Dois conjuntos X e Y são cardinalmente equivalentes se existe uma função bijetora $f : X \rightarrow Y$. Neste caso, denotamos $X \sim Y$, quando X for cardinalmente equivalente a Y.

Note que essa conceituação, a rigor, estabelece, apenas, em que condições dois conjuntos são cardinalmente equivalentes, porém, ainda não estabelece o conceito de cardinalidade propriamente dito. Em outras palavras, estamos diante de uma situação em que percebemos, apenas, que um conjunto tem tantos elementos quanto outro. Portanto, é possível que haja outros conjuntos cardinalmente equivalentes a X, ou seja, podemos ter uma classe de conjuntos com essa mesma propriedade, todos cardinalmente equivalentes a X.

Resta-nos, portanto, apenas, nomeá-la. Uma ideia bastante intuitiva é usar o conjunto dos números naturais com esse objetivo. Ou seja, podemos chamar os números naturais de cardinais, pois, podem representar cardinalidades de conjuntos. Assim sendo, podemos definir um conjunto da forma especificada, a seguir:

$I_n = \{k \in N \mid k \leq n\}$, onde n é um número natural fixado.

Esse conjunto é denominado segmento inicial dos números naturais. São os primeiros n números naturais. Por exemplo.

$I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{1, 2\}$, $I_3 = \{1, 2, 3\}$ e assim por diante.

Assim sendo, se A é um conjunto cardinalmente equivalente a um segmento inicial I_n, dizemos que A tem n elementos, ou seja, que o cardinal de A é n.

Notação: $\# A = n$

Portanto: $\# I_1 = 1$, $\# I_2 = 2$, $\# I_3 = 3$ etc. $\# I_n = n$. Note que $\# I_n$ está representando toda uma classe de conjuntos, I_n, de mesmo cardinal n. Como tal, são denominados números cardinais.

Obs. É importante notar que a partir da definição de $\mathcal{P}(A)$, tem-se: $\# \mathcal{P}(A) > \# A$, sempre. Ou seja, existem mais elementos em $\mathcal{P}(A)$ do que em A. (Scientific American Brasil, 2011 p.49)

A noção de Tendência

A noção de tendência é uma daquelas noções que se relaciona, de alguma forma, com várias outras. A expressão “ Tender a”, trata-se de uma noção muito utilizada na matemática que serve de base para algumas outras, como, por exemplo, a de convergir ou divergir. Mas, afinal, o que se significa “tender a”. Dentro da linguagem da matemática e, também, do seu ponto vista, tender é se aproximar cada vez mais de algo que se considera como ponto de referência. Na noção de aproximação está inclusa a noção de distância. Ou seja, quão menor for a distância ao ponto de referência, mais próximo estaremos dele. Notadamente, percebe-se, também, que a noção de ordem está presente nessa noção, ou seja, deve ser usada, em algum momento, para dar sentido à sua compreensão. Na matemática, “tender a” é se aproximar sempre. É uma noção dinâmica.

Conjuntos finitos e conjuntos infinitos

A noção de infinito sempre foi uma das mais controversas da história da Matemática, desde os seus primórdios. Aristóteles, filósofo grego, embora considerasse quantidades infinitas, não admitia o infinito como uma entidade matemática, como algo completo e, sim, como uma potencialidade. Hoje, entendem-se as noções de infinito potencial como tendência inatingível das grandezas que podem crescer indefinidamente (ao limite) e o infinito real, como cardinalidade de conjuntos (Scientific American Brasil, 2011 p.48).

Enquanto Poincaré (1854-1912) não admite o infinito real, Dedekind (1831-1916), foi o primeiro matemático a formular a definição de infinito em 1872, a partir da correspondência biunívoca, “ Todo conjunto infinito pode ser colocado em correspondência biunívoca com uma de suas partes próprias”, em outras palavras, poderíamos dizer que um conjunto é infinito quando possui o mesmo “tamanho” que uma de suas partes próprias, fato, esse, que incomodou bastante os matemáticos da época, no mesmo ano que Cantor começou a publicar a teoria dos números transfinitos. Por outro lado. um conjunto era considerado, como finito quanto não era infinito, ou seja, não se admitia tal correspondência. Atualmente, define-se um conjunto finito como aquele que admite uma correspondência perfeita com um segmento inicial dos números naturais.

Obs. Todo segmento inicial do conjunto dos números naturais é um conjunto finito. Afirmação que pode ser demonstrada e, mais uma vez, estamos omitindo a demonstração.

A teoria moderna das cardinalidades de conjuntos infinitos também é devida a Cantor, que desenvolveu em uma notável série de artigos publicados a partir de 1872, em jornais científicos alemãs. Era fundado, assim, um novo campo da matemática. Em seu novo trabalho, ao contrário do que todos pensavam, Cantor mostrou que os conjuntos finitos possuem infinitas cardinalidades, bem como, os conjuntos infinitos, ou seja, existem diferentes tamanhos de infinitos. Podemos observar que: se um conjunto A é infinito, então, o conjunto $\mathcal{P}(A)$ tem cardinalidade maior (Halmos, 2001 p. 169-170).

Essa afirmação era contrária ao que se pensava antes: concebia-se um só infinito que era representado pelo símbolo ∞, introduzido por John Wallis. Cantor caracterizou as cardinalidades dos conjuntos infinitos e as chamou de números transfinitos, representados pela letra $\aleph$ (Aleph) do alfabeto hebraico. Cantor anunciou algumas peculiaridades sobre o seu infinito, afirmando que:

- Ele não era um número como tal
- Não era um elemento do conjunto $\mathbb{N}$
- $\forall\, n, n \in \mathbb{N}, \; n \neq \aleph$

Notadamente, estamos nos referindo a cardinalidades de conjuntos finitos, pois, a dos conjuntos infinitos, embora se possa pensar da mesma forma, é bastante complexa. De fato, as descobertas de Cantor foram tão revolucionárias em relação aos conceitos estabelecidos na época que, em 1877, escreveu para o amigo pessoal Richard Dedekind (1831-1916), pedindo-lhe que verificasse as provas de seus resultados. Mais tarde, o seu trabalho foi reconhecido por David Hilbert (1862-1943) com o célebre comentário:

Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós.

Embora, essa propriedade já fosse familiar a matemáticos e filósofos, desde a matemática grega (Scientific American Brasil, 2011 p.45).

Galileo Galilei (1563-1643), por exemplo, em sua obra *Discorsi e Dimostrazioni Intorno à Due Nuove Scienze*, editada em 1638, cita alguns assim chamados "paradoxos do infinito". Em um deles, constata que existe uma correspondência um a um entre o conjunto dos números naturais e o dos pares, dada pela função $n \leftrightarrow 2n$. Neste sentido, pode-se pensar que existem tantos números naturais quantos números pares, mesmo sendo os números pares uma parte própria dos números naturais. Ou seja:

Quadro 3: Equivalência entre os números naturais e os números pares positivos

Naturais:	0	1	2	3	4	5	6	. . .	n
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓
Pares:	0	2	4	6	8	10	12	. . .	2n

Fonte: Gibilisco, 1990 p. 39

Tantos números naturais quanto os seus quadrados:

Quadro 4: Equivalência entre os números naturais e seus quadrados

Naturais:	0	1	2	3	4	5	6	...	n
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	...	↓
Seus quadrados:	0^2	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	...	n^2

Fonte: Gibilisco, 1990 p. 39

Ou, ainda, tantos quantos os múltiplos de um número natural qualquer, p, não nulo:

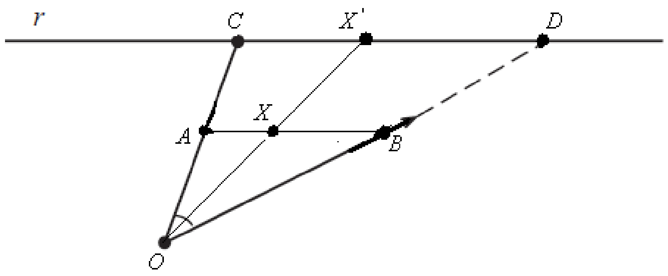
Quadro 5: Equivalência entre os naturais e múltiplos de um número inteiro positivo *p*

Naturais :	0	1	2	3	4	5	6	...	n	...
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	
Múltiplos de p:	$0p$	$1p$	$2p$	$3p$	$4p$	$5p$	$6p$	...	np	...

Fonte: Gibilisco, 1990 p.39

Um outro paradoxo, é observar a correspondência perfeita entre dois segmentos AB e CD, de comprimentos distintos, por meio de uma construção tão simples, garantindo que para cada ponto X no segmento AB, existe um ponto X', correspondente, no segmento CD, obtido pela interseção prolongamento do segmento OX e o segmento CD, como mostra a ilustração a seguir:

Quadro 6: Equivalência de segmentos



Fonte: O autor

Mais um outro famoso foi apresentado por Hilbert em uma conferência proferida em 1925, conhecido como O Hotel de Hilbert. Considera-se um hotel hipotético com infinitos quartos. Um novo hóspede chega ao hotel, mas, foi informado que o hotel se encontra, no momento com os seus quartos ocupados. Em uma solução engenhosa, para não deixar o novo hóspede sem repouso, o gerente move o cliente hospedado no quarto 1 para o quarto 2. Como este, também, está ocupado, o remove para o quarto 3 ; o do 3 para o 4 e assim por diante. Como o hotel tem infinitos quartos esse processo pode ser continuado indefinidamente, movendo cada cliente do quarto n para o quarto $n + 1$, sem que nenhum fique desalojado. Moral da história, um hotel com infinitos quartos nunca ficará lotado.

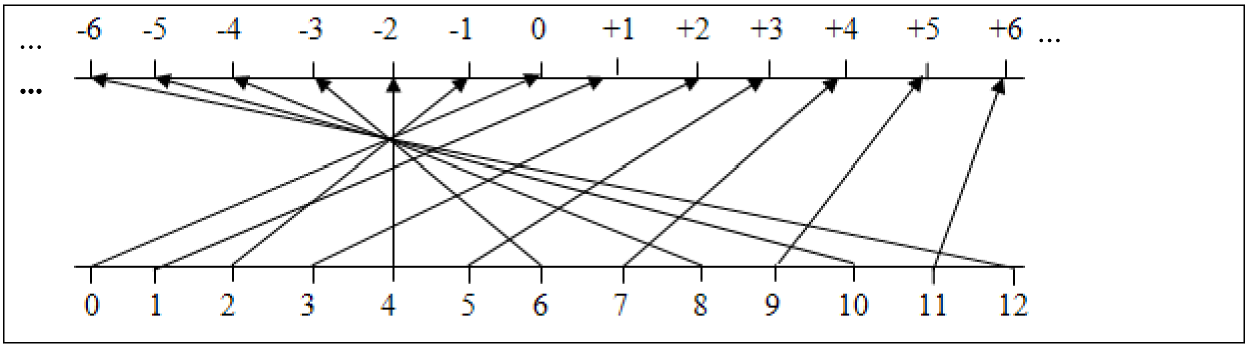
A enumerabilidade

Seja X um conjunto qualquer. Assim sendo, dizemos que X é enumerável ou contável quando é finito ou guarda uma correspondência perfeita com $\mathbb{N}$, ou seja, ele é equivalente a $\mathbb{N}$ e, nesse caso, ele é infinito enumerável.

A enumerabilidade (contagem) dos números inteiros relativos

Nesse caso, podemos considerar duas retas: numa delas representamos os inteiros relativos e, na outra, os números naturais. A ilustração a seguir, mostrar a correspondência perfeita entre um conjunto e outro.

Quadro 7: Equivalência entre os números inteiros relativos e os números naturais



Fonte: Gibilisco, 1990 p.40

Ou seja, podemos contar os inteiros do seguinte sequência: +1, -1, +2, -2, +3, -3, +4 ..., com o 0 (inteiro) ficando associado ao 0 (natural).

7 O número racional e a Medida

Quadro 8: A unidade comum

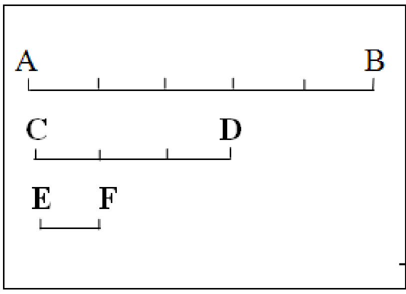
Considerando a ilustração ao lado, em que:

$\overline{CD} = 3\,\overline{EF}$ e $\overline{AB} = 5\,\overline{EF}$

Substituindo $\overline{EF}$, temos:

$\overline{AB} = \frac{5}{3}\,\overline{CD}$, portanto: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{5}{3}$

Ou ainda: $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5}$



Fonte: O autor

Resulta que nenhum múltiplo inteiro de CD seja igual a AB, mas, podemos, em alguns casos, dividir CD em, digamos, três segmentos iguais, cada um de comprimento EF, de tal forma que algum múltiplo inteiro de EF, no exemplo, 3 EF seja igual a CD, bem como, dividir, da mesma forma, o segmento AB, de modo que algum múltiplo inteiro do EF, na ilustração 5 EF, seja igual ao segmento AB. Isso define a racionalidade entre os segmentos AB e CD. Ou seja, há um segmento comum que cabe, exatamente, em cada um deles. Essa é a ideia da racionalidade ou da medida. Ou seja, podemos medir o segmento AB usando o segmento CD e vice-versa. O que não acontece com a diagonal e o lado, de um mesmo quadrado.

De um modo geral, um número racional é um número que pode ser expresso na forma a/b, sendo a e b números inteiros quaisquer, com $b \neq 0$. Ou seja, o número racional pode ser expresso na forma de fração. Todos números inteiros relativos são racionais com denominadores b iguais a 1.

8 A Homogeneidade Dimensional

Intuitivamente, a reta é um objeto de dimensão 1. Já o plano, de dimensão 2. Assim, nenhuma classe de retas, ou seja, conjunto formados por apenas retas, pode resultar num plano – é o princípio da homogeneidade dimensional. Assim sendo, uma reta pode ser dividida em segmentos e, portanto, obtermos, também, segmentos. Mesmo que ainda menores, sempre se obterão segmentos. Evidentemente, eles nunca serão iguais a pontos. Essa ideia de homogeneidade encontra-se expressa, por exemplo, na obra de John Wallis, em 1671, como segue:

> Uma quantidade finita pode supostamente ser dividida (por dicotomia) em um número infinitamente grande de partes (isto é, maior que qualquer número finito dado): nenhuma razão possa existir para crer que essa divisão se encerre (pois, mesmo após a última etapa realizada, um segmento tão pequeno quanto

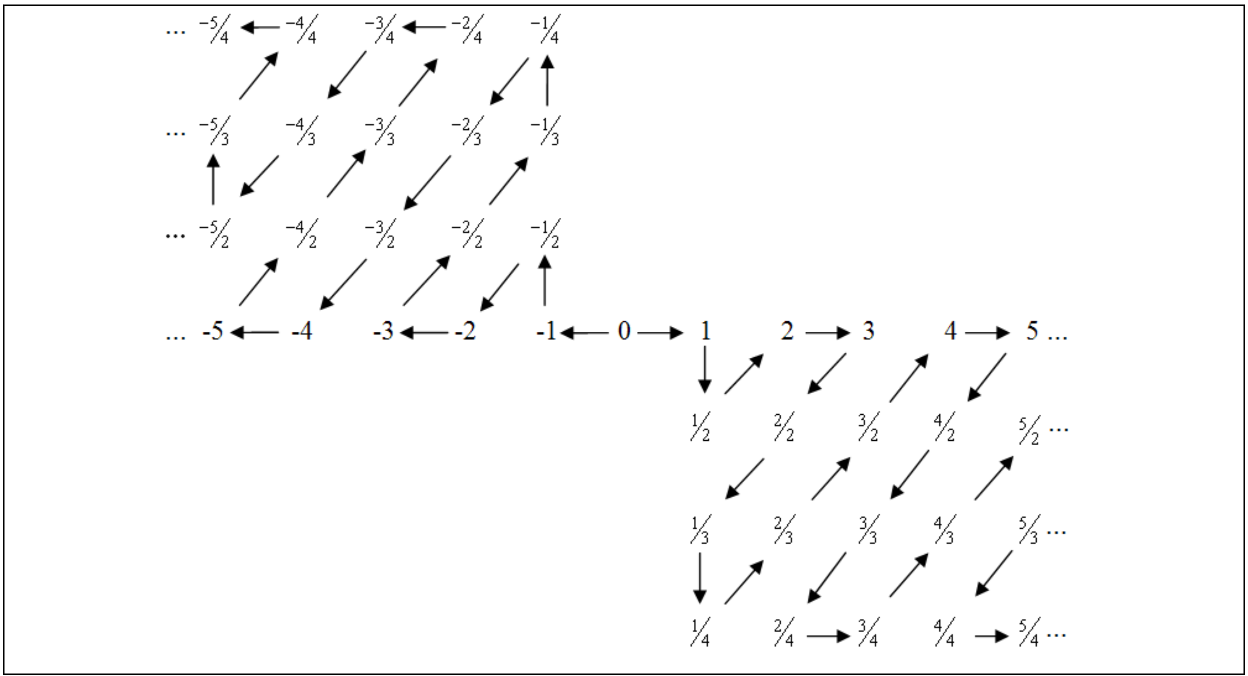
> seja, ainda terá duas metades (Revista Scientific American Brasil, 2011, nº. 6 pág. 48).

Como explicar que uma grandeza extensa qualquer, quando dividida, permaneça com a mesma dimensão? Essa questão é central nas obras de Leibniz e de Cauchy. Kant aborda-a explicitamente em sua análise do contínuo. Para ele, uma reta não é um conjunto de pontos simplesmente, mas acima de tudo uma grandeza extensa; quanto aos pontos em si, eles demarcam as extremidades dos segmentos. Na mesma obra (pág. 48).

9 A enumerabilidade (contagem) dos números racionais relativos

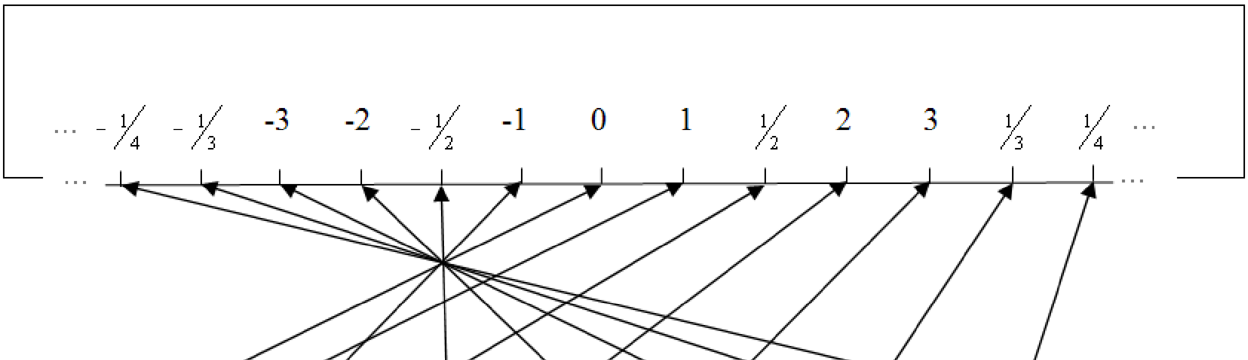
Os números racionais podem ser contados conforme a ilustração a seguir. Ou seja, é possível colocá-los numa correspondência um a um, seguindo a orientação diagonal (argumento diagonal), com os números naturais, pulando sempre, o racional que estiver repetido (o que já foi contado). Portanto, são enumeráveis. A ilustração a seguir, mostra o argumento diagonal na enumerabilidade dos números racionais.

Figura 12 A Enumerabilidade dos Números Racionais Relativos



Fonte: Gibilisco, S., 1990 p.41.

Figura 13 A Enumerabilidade dos Racionais Relativos



Fonte: Gibilisco, S.,1990 p. 41

A contagem deve seguir o padrão ilustrado a seguir, ou seja, podemos contar os números racionais na seguinte sequência:

+1, -1, $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, +2, -2, +3, -3, $+\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$, ...

10 A noção de conjunto denso

Diz-se que um conjunto X é denso num outro conjunto A, quando considerando dois elementos quaisquer de A, a e b, com $a \leq b$, sempre exista entre eles, um elemento de X. Por exemplo, o conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, é um conjunto denso em $\mathbb{R}$, pois, se considerarmos $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$, então :

$2a = a + a \leq a + b \leq b + b = 2b$. Logo, $2a \leq a + b \leq 2b$. Agora, dividindo tudo por 2, temos:

$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ Isto é, $\frac{a+b}{2}$ é um número racional entre os dois racionais a e b, nas condições consideradas.

11 A existência do irracional

Cantor demonstrou que não era possível colocar em correspondência biunívoca os números reais e o conjunto dos inteiros positivos, usando o fato que todo racional tem representação decimal. Usando os números reais positivos menores que um, mostrou que cada um deles poderia ser escrito na forma:

Quadro 12: Diagonal de Cantor

$1 \longrightarrow 0,\ \mathbf{a_{11}}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14} \ldots$

$2 \longrightarrow 0,\ a_{21}\ \mathbf{a_{22}}\ a_{23}\ a_{24} \ldots$

$3 \longrightarrow 0,\ a_{31}\ a_{32}\ \mathbf{a_{33}}\ a_{34} \ldots$

4 $\longrightarrow$ 0, $a_{41}\, a_{42}\, a_{43}\, \mathbf{a_{44}}$ ... , onde cada um dos a_{ij} é tal que $0 \le a_{ij} \le 9$.

Fonte: Gibilisco, 1990 p. 47-48

Agora, considerando números do tipo $b_i = a_{ii}$, para todo i, diferem dos a_{ij}, em pelo menos, um dígito. Ou seja, vai existir um número do tipo:

0, $\mathbf{a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}}$ ... = 0, $b_1\, b_2\, b_3\, b_4$ ... que não se corresponderá a qualquer número inteiro representado anteriormente. Como o argumento foi considerado para todos os números inteiros possíveis, certamente, número inteiro desse tipo não poderia existir. Ou seja, essa correspondência não era um a um. Assim, segundo Cantor, existem números desse tipo que seja contado, portanto, não será possível contar todos os reais. Esse argumento foi conhecido como processo da diagonal de Cantor. Uma outra ideia surgiu da noção da não contagem dos números reais: A incomensurabilidade (Boyer, 1996).

A noção de incomensurabilidade surgiu quando os gregos, manipulando números inteiros naturais e suas razões, realizaram comparações de grandezas geométricas em inúmeros entes geométricos: quadrado, pentágono regular e cubo. Até que, perceberam a existência de segmentos de reta, ditos incomensuráveis, independente da unidade de medida usada. Surge, portanto, a noção de número irracional.

Um dos primeiros números mostrado como irracional, pois, contradiz o argumento da racionalidade, foi a $\sqrt{2}$. Aristóteles faz uma demonstração, usando um raciocínio conhecido como demonstração por absurdo que apresentaremos a seguir:

Seja $\sqrt{2}$, um número racional. Logo, ele pode ser expresso por uma razão $\frac{p}{q}$, irredutível, ou seja, simplificando todos os fatores comuns que p e q possam ter (nesse caso, p e q são ditos primos entre si), com p e q inteiros e $q \neq 0$. Daí, temos:

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Ou seja: $\frac{p^2}{q^2} = 2$ e, portanto: $p^2 = 2\,q^2$. Isto é: p^2 é par.

Logo, p, também, é par. Seja $p = 2\,k$, k natural. Substituindo p acima, temos: $(2\,k)^2 = 2\,q^2$. Daí, tem-se: $2\,q^2 = 4\,k^2$. Simplificando, chegamos em: $q^2 = 2k^2$. Ou seja: q^2 é par, pois, k^2 é um número inteiro. Daí, q é par. Uma contradição, pois, supomos, desde início, que eles eram primos entre si, ou seja, que eles não teriam fatores comuns. Essa contradição se deu ao fato de se ter suposto que a $\sqrt{2}$ era um número racional. O que não se confirmou.

Por outro lado, certamente, sendo um quadrado uma figura bidimensional e um segmento, uma figura unidimensional, esperamos que, no primeiro, haja mais pontos que no segundo. De forma surpreendente, isso não ocorre. Ou seja: o número cardinal do conjunto de pontos em um quadrado é o mesmo que o número cardinal do conjunto de pontos em um segmento, mesmo que ele tenha a mesma medida que o lado. Para provar isto, definiremos a seguinte correspondência:

Se (x; y) é um ponto do quadrado de lado unitário, suas coordenadas podem ser escrito como decimais:

$$x = 0, a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \ldots,$$

$$y = 0, b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \ldots \quad \text{e,}$$

para evitar ambiguidade, escolhemos sempre para $\frac{1}{4}$, o número 0,25000... ao invés de 0.24999 .... Agora, para o ponto (x; y) do quadrado, atribuímos o ponto do segmento [0; 1], $z = 0, a_1\, b_1\, a_2\, b_2\, a_3\, b_3\, a_4\, b_4 \ldots$

Assim sendo, de forma clara, os pontos (x; y) e (x'; y') do quadrado corresponderão a pontos diferentes z e z' do segmento, de modo que o número cardinal do quadrado não possa exceder o do segmento. Ou seja, é uma correspondência perfeita. Isto é: No quadrado unitário tem tantos pontos quanto no segmento unitário. (COURANT, R. ROBBINS, H. 2000 p. 98)

12 A noção de corte

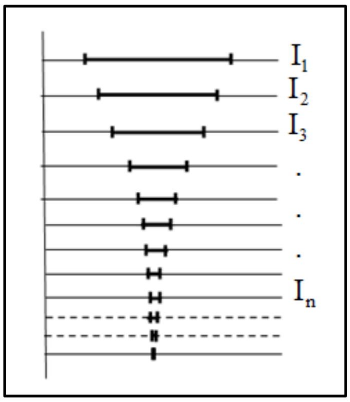
A noção de corte é outra noção que, de alguma forma, guarda uma forte relação com a noção de ordem e de infinito. Dar um corte num conjunto X é dividi-lo em dois outros conjuntos, A e X \ A, não vazios, tal que a partir de um elemento $k \in X$, pode-se observar que um deles (A ou X \ A) fique com todos os elementos $x \in X$ com $x < k$, por exemplo, o conjunto A e o outro com todos os elementos $x \in X$ com $x \geq k$, o conjunto X \ A. O conjunto A, é definido como o corte dado em X. Algumas atividades, em sala de aula, podem ser dirigidas no sentido da conceituação do corte. A noção de corte foi uma forma alternativa para se definir o número irracional, escolhida por Richard Dedekind .

Em outras palavras: Sejam M_1 e M_2 dois conjuntos contidos no conjunto denso X, tais que, cada elemento de X pertença a M_1 ou a M_2 e que todos os elementos de M_1 precedam cada elemento de M_2, então, existe, em X, um elemento k de maneira que todo elemento x de X que preceda k, está em M_1 e que todo elemento x que seja igual ou suceda k, está em M_2, de modo que o conjunto M_1 seja o corte dado em X e que todo corte efetuado num conjunto denso X, será produzido por um único elemento e, nesse caso, o elemento k (COURANT, R. ROBBINS, H. 2000 p. 82).

13 Intervalos aninhados (Ou encaixados!)

Aqui não nos cabe, no nosso entendimento, definir intervalos de números reais. Partiremos com a noção de que se tenha conhecimento. Uma outra ideia importante para o cálculo e a análise é a de intervalos aninhados Essa expressão significa que podemos sempre considerar intervalos contidos em outros, encaixados. Assim consideremos qualquer sequência de intervalos I_1 , I_2 , I_3 , I_4 , ... I_n ... sobre a reta numérica com pontos extremos racionais, cada um contido no outro, sucessivamente, de tal modo que supostamente, o último, tenha comprimento próximo de zero, a medida que n aumente. Uma sequência desse tipo é denominada de sequência de intervalos aninhados ou encaixados (Fig.14). No caso de intervalos decimais, o comprimento de I_n é 10^{-n}. Assim, podemos postular que existe um número real que pertence a todos os intervalos dessa sequência, sem exceção, e em todas as sequências desse tipo. Se esse número não for um número racional, será um número irracional. (p. 80).

Figura 14 Intervalos Encaixados (Aninhados)



Fonte: COURANT, R. ROBBINS, H. 2000 p. 82

14 Supremo e ínfimo

Seja A um subconjunto não vazio de números reais. Dizemos que A é limitado superiormente se existe algum número real M tal que para todo $a \in A$, $a \leq M$. M é uma cota superior de A. Também dizemos que é limitado inferiormente quando existe um número real N tal que para todo $a \in A$, $a \geq N$. N é uma cota inferior de A. Dizemos que um subconjunto A é limitado, quando é limitado inferiormente e superiormente. Ou seja: existem

M e N, tal que, $N \leq a \leq M$, para qualquer $a \in A$ ou ainda: $A \subset [N; M]$ (LIMA, 2006 pág. 74)

Seja A um subconjunto não vazio de números reais e limitado superiormente. Dizemos que o número real s é o supremo de A se estão satisfeitas as duas seguintes condições:

1ª) $s \geq a, \quad \forall a \in A$;

2ª) Se r é um número real tal que $r \geq a$ para todo $a \in A$, então, $s \leq r$.

Essas condições consistem na caracterização do supremo. Que equivale a dizer que s é a menor das cotas superiores de A. Por outro lado, se A é um subconjunto não vazio, de números reais, e limitado inferiormente, então, dizemos que t é o ínfimo de A quando as condições que se seguem são satisfeitas:

1ª) $a \geq t, \quad \forall a \in A$;

2ª) Se r é um número real tal que $a \geq r$ para todo $a \in A$, então, $r \leq t$.

Obs. A ideia que podemos ter, de todas as cotas superiores, uma cota menor e de todas as cotas inferiores, uma maior, é relevante no ensino da educação básica, visando os cursos relacionados com o cálculo . Essa educação tem que ser básica para alguma coisa! Que seja para o ensino superior.

15 Os números Reais

É importante observar, a partir dessas noções mostradas anteriormente, que existem subconjuntos não vazios de $\mathbb{Q}$, limitados superiormente, que não admitem supremo em $\mathbb{Q}$. O conjunto dos números reais é uma extensão do conjunto dos números racionais, construído com o objetivo de preencher as lacunas de $\mathbb{Q}$, determinadas pela ausência desses supremos.

A ideia da extensão de $\mathbb{Q}$ é devido ao matemático grego Eudoxo de Cnido (séc. IV a.C) e se baseia na observação de que um número real, não racional, fica determinado pelos números racionais que o precedem, ou seja, são os cortes em $\mathbb{Q}$ (DOMINGUES H. H, 1991). Portanto, construir uma conjunto formado pelos racionais e todos esses cortes. A esse conjunto, denominamos conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$. Ou seja, $\mathbb{R}$ é o conjunto de todos os cortes racionais ou não em $\mathbb{Q}$, pois, todo racional é um corte em $\mathbb{Q}$.

Uma outra oportunidade que temos para a utilização das noções que estão relacionadas com o conceito de infinito e com o próprio conceito são as construções do conjunto dos números reais. As mais comuns são a construção por cortes de Dedekind, por sequência de Cauchy, por expansão decimal e por medição de segmento de reta. Algumas dessas construções podem ser feitas até mesmo no ensino fundamental.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, C. B. História da Matemática. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

COURANT H, ROBBINS H O que é Matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos Ed. Ciência Moderna , 2000. DOMINGUES, H. H, Fundamentos de aritmética Atual Editora Ltda, São Paulo, 1991.

DOMINGUES, H. H, Fundamentos de aritmética Atual Editora Ltda, São Paulo, 1991.

GIBILISCO, S. "Reaching for infinity" Puzzles Paradoxes and Brainteaser #3. 1990. First Editions.

HALMOS P. R Teoria ingênua dos conjuntos Ed. Ciência Moderna RJ, 2001.

LIMA, E. L. Curso de Real Vol. 1 IMPA RJ, 1976.

RESENDE, W, M. Uma análise histórica-epistêmica do conceito de limite Dissertação de mestrado, USU, Rio de Janeiro, 1994.

ROQUE, T. A História da Matemática: Uma visão crítica desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro, Zahar, 2012.

SCIENTIFIC AMERICAM Brasil Ano 1 nº 6 20011 Editora Moderna.