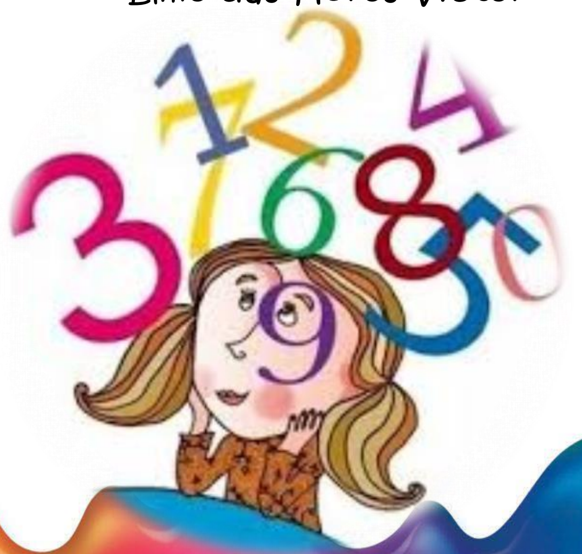
ENSINANDO MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO NAS SÉRIES INICIAIS

UM DEBATE À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Evandro Alves Silva
Eline das Flores Victer



ENSINANDO MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO NAS SÉRIES INICIAIS

Um debate à luz da Teoria dos campos Conceituais

EVANDRO ALVES SILVA
ELINE DAS FLORES VICTER

1ª Edição
Editora Unigranrio
Duque de Caxias
2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE
NÚCLEO DE COORDENAÇÃO DE BIBLIOTECAS - UNIGRANRIO

S586e Silva, Evandro Alves.

Ensinando multiplicação e divisão nas séries iniciais: um debate à luz da teoria dos campos conceituais / Evandro Alves Silva. – Duque de Caxias, RJ: Editora Unigranrio, 2019.

91 p. : il. ; 23 cm

ISBN: 978-85-9549-140-3
Referências: p. 91

1. Matemática. 2. Multiplicação. 3. Divisão. 4. Ensino fundamental. I. Victer, Eline das Flores. II. Título.

CDD – 510

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Quando é que a matemática aparece na vida de uma criança? Pode parecer uma forma um pouco inusitada para se começar um texto, mas esta pergunta que parece óbvia, se refletirmos um pouco, pode gerar dúvidas. A matemática e suas representações e operações estão tão presentes em nossas vidas que podemos até dizer que ela está em nossa genética. Podemos observar bebês bem novos percebendo quantidades pequenas já por volta dos seis meses. Wall (2014). Já nas crianças maiores, estas relações com a matemática surgem através de situações de seu cotidiano, o que geralmente acontece com relações de troca, compra ou vendas, enfim, surge como há séculos; ou como podemos dizer, surge como com nossos ancestrais.

Esta relação com a matemática continuará por toda a vida da criança e avançará até a vida adulta. Porém, o que vem como curiosidade, entusiasmo e interesse, acaba e tornando frustação e tédio. E por mais estranho que pareça, isto tudo acontece quando essa criança ingressa na escola. Por premissa, tal instituição tem por finalidade, além de socializar a criança, prepará-la para a vida adulta e como podemos perceber, ela não tem sido muito fecunda nesta atribuição. A escola vem acumulando fracassos por anos a fio e quem deveria ser o agente de inclusão, acaba por se tornar quem exclui.

Não se trata de culpar quem quer que seja, mas de buscarmos respostas para tal questão. Por que uma criança que ingressa na escola, com tanta alegria e curiosidade, é acometida, por vezes, pelo desânimo, se decepcionando tanto com a escola? Se neste caso não nos cabe eleger um culpado, poderemos então apontar um dos conhecimentos que tem sido um dos maiores causadores de fracasso. Como não é surpresa, este causador de frustações e fracasso é a Matemática e não é de hoje que ela tem sido um vilão na vida dos alunos. E causa estranheza o quanto parece que a matemática do cotidiano não possua relação com a matemática da escolar, que tem se mostrado artificial e em nada tem proporcionado desafios às crianças. Logo, desfazer este paradigma é o objetivo deste livreto.

Este livreto mostra, de forma mais esclarecedora possível, a teoria dos campos conceituais, mais especificamente os campos conceituais de estrutura multiplicativa. Esta teoria foi desenvolvida por Gérard Vergnaud, que foi discípulo de Piaget e, se utilizando de sua teoria de como a criança constrói o conhecimento, desenvolveu os conceitos envolvidos em seu trabalho. Dessa maneira, demostraremos que as operações matemáticas, de acordo com o pensamento da criança, são uma construção interna com significado e significante e não uma reprodução computacional. Mostraremos que, segundo Vergnaud, o que desencadeia o raciocínio matemático é a situação e que não existe única que possibilite a aprendizagem de uma criança, mas várias. Por este motivo, a ideia dos campos conceituais se desenvolve nesta proposta.

A MULTIPLICAÇÃO
SEUS CONCEITOS E IDEIAS

Antes de iniciarmos a apresentarmos e as principais considerações sobre multiplicar, vamos começar com uma pergunta.

O QUE É CONTAR?
O QUE É UM NÚMERO?
PARA QUE ELE SERVE?

Por que iniciar este debate com uma pergunta? A questão é tão estranha assim? O número está tão presente em nossas vidas, que não percebemos, de fato, o que ele é. Quando uma criança entra na escola, ela se depara com várias situações novas, principalmente com relação à escrita formal; contudo acredita-se que a criança já conheça o número, algo que é muito mais comum para ela do que escrita formal, e não damos a devida importância para esta questão. Apenas a forçamos a aprender de forma muitas vezes mecânica e abstrata a escrita deste número, sem considerá-lo como construção humana constituída de tantos significados. Quando uma criança entra na escola, o principal objetivo é que ela seja "alfabetizada", mas com relação à matemática, ela deve ser "numeralizada" Nunes E Bryant (1997). (apud, COCKCROFT, 1982, p. 34).

Desejaríamos que a palavra "numeralizado" implicasse a pose de dois atributos: o primeiro é uma "familiaridade" com os números e habilidade de fazer uso de noções matemáticas que capacitam um indivíduo a enfrentar as demandas matemáticas práticas de sua vida cotidiana; o segundo é a habilidade em ter alguma apreciação e compreensão das formações que são apresentadas em termos matemáticos, por exemplo, em gráficos, mapas e tabelas ou por referências a aumento ou redução de porcentagem. Considerados juntos, estes fatores implicam o que deveria se esperar que uma pessoa numeralizada fosse capaz de apreciar e entender algumas das formas pelas quais a matemática pode ser usada como um meio de comunicação.

Com estas palavras, damos início às questões, pois quando queremos escrever uma palavra, usamos letras que agrupadas pela sua fonação, sua sonoridade, e assim, formam a palavra. Quando queremos escrever um número, usamos algarismos que irão formar este número. Mas será que é só isto?

Quando queremos que a criança aprenda a contar, o modo mais fácil é oferecer vários objetos e pedir-lhe que diga quantos objetos há naquele conjunto (NUNES E BRYANT, 1997). Mas quando queremos que ela diga qual é o último elemento daquele conjunto, pode ser que ela repita o último valor falado em sua contagem (KAMII, 2002). O que mostra que, para a criança, o número deve fazer parte de um contexto: ele não é apenas o número.

Historicamente, sempre foi assim: o número determinava uma quantidade ou como devemos dizer, pois ele representa a cardinalidade de um conjunto e é só é concebido por uma ação característica dele, que é a "inclusão hierárquica". Ou seja, o valor três só existe quando incluímos um em dois; o quatro quando incluímos um em três. Por este motivo, embora não perceba, a criança determina as duas características de um número quando faz a sua contagem e a sua cardinalidade com relação à quantidade e a sua forma ordinal, quando aponta para o último elemento contado para indicar quantos tem. Com a evolução, o número tomou mais outros sentidos. Como podemos ver, o número determina um CEP (Código de Endereçamento Postal), número de telefones, códigos de barra e até uma programação em sua escrita binária. Como podemos ver, o número possui hoje muito mais características do que quando concebido.

O QUE É MULTIPLICAR?

O senso comum diz que o principal conceito de multiplicação é a soma de parcelas iguais: isto pode ser explicado pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Ou como pode ser demonstrado quando queremos multiplicar 3 x 123, pois basta que se somasse três vezes o 123. De certa forma, multiplicar é isto. Contudo, em muitas situações não é prático quando a quantidade de vezes que devemos somar o mesmo número for muito grande, como por exemplo, 11 x 123. Para este tipo de situação, recorremos ao algoritmo da multiplicação, que também se utiliza da propriedade distributiva, embora passe sem percebida.

Observemos o exemplo acima. Podemos representar 11 x 123 da forma que normalmente é ensinada nas escolas.

$$\begin{array}{r} 1\ 2\ 3 \\ \times\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}$$

O que infelizmente a maioria dos professores do Ensino Fundamental ensina, está mais no campo da representação. E esta representação é mais cultural do que a prática em si e, principalmente, não é a única forma de armar uma multiplicação.

Podemos demonstrar a forma egípcia, que mostra a multiplicação como uma duplicação de valores. Na forma egípcia a multiplicação 11×123, se daria da seguinte forma:

$$1 \times 123 = 123$$

$$2 \times 123 = 246$$

$$4 \times 123 = 492$$

$$8 \times 123 = 984$$

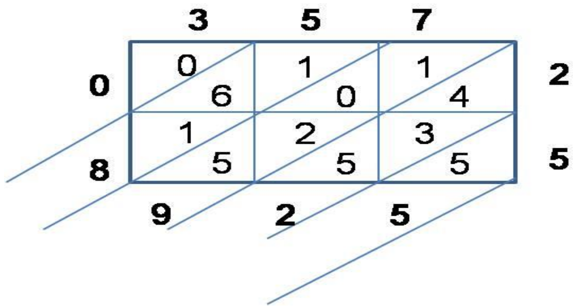
Como

$$8 + 2 + 1 = 11,$$

$$123 + 246 + 984 = 1353$$

Como podemos perceber, esta forma é bem simples; o que pode dificultar a execução são as duplicações em números muito grandes. Porém, como um caminho de cálculo, funciona muito bem.

Outra forma de multiplicação é a aquela que ocorre em forma de retângulo ou gelosia. Este método é bem interessante, pois permite iniciar a multiplicação de qualquer célula:



Pode-se iniciar a multiplicação por qualquer uma das células, e o resultado da operação é colocado na célula correspondente aos dois fatores (TOLEDO e TOLEDO, 2014). Depois das multiplicações, realizam-se as somas feitas nas diagonais. Se o valor da soma for maior ou igual a dez, o valor correspondente às dezenas passa para a diagonal seguinte.

Como podemos observar, a multiplicação, da forma como é apresentada, não expressa de fato o que ela é e nem os conceitos propriamente ditos, mas apenas uma forma de organizar a operação. Com relação a isto, devemos tomar muito cuidado com os algoritmos para que não coloquemos uma operação acima dos conceitos (KAMII, 2002).

Podemos dizer que um dos conceitos principais da multiplicação, é o da invariante operatória. Segundo Vergnaud, (2014, p. 303) "A noção de invariante operatória aplica-se ao próprio problema da função simbólica, isto é, a passagem da realidade à representação". Sim, um dos principais conceitos da multiplicação ou de qualquer operação matemática escolar é a realidade. Outro conceito importante é a "equivalência", que é o que relaciona os conjuntos envolvidos na multiplicação. No próximo tópico abordaremos isto.

Atenção!

Existe uma diferença entre procedimento e aprendizagem geral da matemática. Uma se relaciona com os algoritmos a outra com os conceitos.

CAMPOS CONCEITUAIS DE ESTRUTURA MULTIPLICATIVA

Embora o nome possa sugerir apenas uma operação, a de multiplicação, o Campo Conceitual Multiplicativo ou de Estrutura Multiplicativa, é, como define o próprio Vergnaud, um conjunto de situações em que, de acordo com a sua solução, envolve uma operação de multiplicação ou uma divisão (VERGNAUD, 2014). Mas isto não é tão simples assim, afinal não existe uma situação que envolva todos os conceitos, nem os conceitos podem ser analisados por apenas uma situação (VERGNAUD, 2009). Logo, passaremos a apresentar as situações que dão sentido aos conceitos.

Antes de apresentarmos as situações, faremos uma observação sobre o que é o conceito na visão de Vergnaud. O autor define conceito como um tripé de três conjuntos.

(S, R, I)

- S é um conjunto de **situações** que dão sentido ao conceito;

- R é o conjunto de **representações simbólicas** (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais etc.) que podem ser usadas para indicar e representar esses invariantes;
- I é um conjunto **invariantes** (objetos, propriedades e relações) onde repousa a operacionalidade do conceito;

As situações multiplicativas, diferente das situações que envolvem uma adição, diz respeito a uma relação entre dois conjuntos.

Não entendeu?

Vamos mostrar um exemplo:

Digamos que a situação seja esta:

Um carro possui 4 pneus. Quantos pneus há em 5 carros?

Observe só, você pode até incentivar seus alunos a multiplicar 4 x 5. Mas vamos refletir um pouco.

"S" é a situação. Logo a questão apresentada. Quantos pneus há em cinco carros?

"R" é a representação. Você pode pensar que cabe montar o algoritmo e encontrar a resposta. Sim, pode, mas isto envolve um conceito que ele tem que reconhecer; neste caso, a relação de pneus por carros.

Isto pode ser feito de várias formas: a criança pode querer desenhar os carros, fazer bolinhas ou tracinhos que representem os pneus, pode ainda pedir aos colegas que empreste dedos para representar os carros ou pneus. Com todas estas ações, a criança busca representar a realidade. É o que importa neste momento.

"I" neste caso a invariante. É a quantidade de pneus por carro, independentemente da quantidade de carros. Neste caso 1 para 4.

E AS SITUAÇÕES?

Já vamos chegar lá, só que antes de mostrar, temos uma observação:

As situações apresentadas são protótipos modelos, e não regras fixas. Elas podem e devem ser reescritas em função do aluno.

Existem várias situações que podem envolver uma multiplicação e uma divisão, é o que o esquema demonstra:

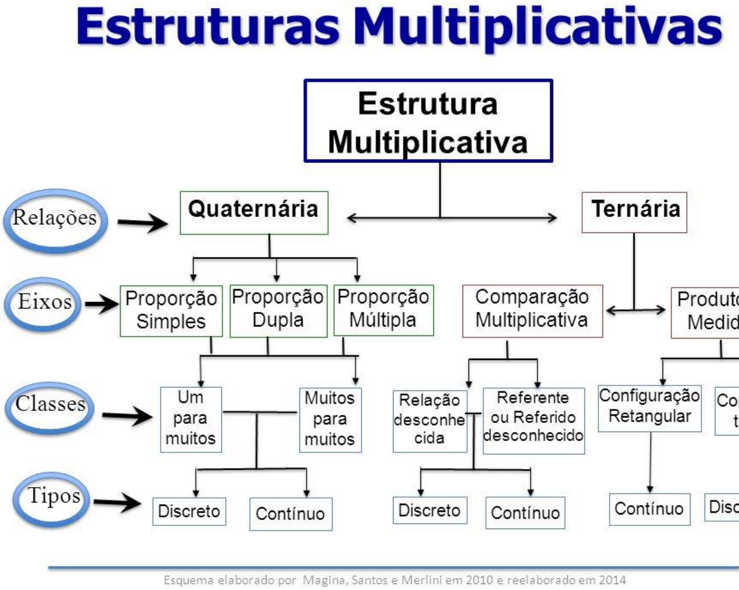


Figura 1 Esquema mostrando a estrutura multiplicativa.
Fonte:(MAGINA, SANTOS E MERLINI, 2010)

Segundo critérios adotados pela autora, as relações quaternárias foram divididas em dois eixos: "proporção simples" e "proporção múltipla" e estas proporções se dividem em "um para muitos" e "muitos para muitos".

Sobre as relações quaternárias, faremos uma ressalva apenas para não deixar dúvidas sobre ela. "A primeira grande forma de relação multiplicativa é uma relação quaternária entre quatro quantidades: duas quantidades são medidas de certo tipo e as duas outras, de outro tipo." (VERGNAUD, 2014). Na figura 2 temos um exemplo da relação quaternária:

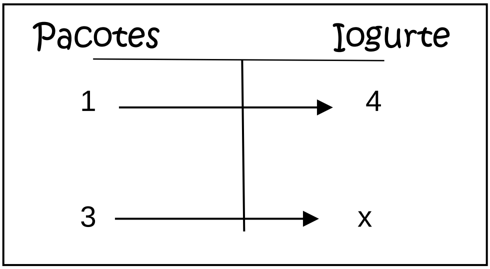


Figura 2: Relação quaternária de estrutura multiplicativa.
Fonte: (VERGNAUD, 2014, p. 240).

Podemos perceber que no esquema, que traz o exemplo dado logo no início, de fato são duas grandezas distintas: uma é o iogurte e a outra, pacotes, o que reforça a ideia da razão de não podermos multiplicar iogurtes por pacotes. Ainda sobre o esquema acima, ele tipifica a classe de um para muitos (MAGINA, 2010).

As relações ternárias também apresentam dois eixos: "comparação multiplicativa" e "produto de medidas". Para a comparação multiplicativa, temos as "classes de relação desconhecidas" e "referente ou referido desconhecido"; no caso de produto de medidas, temos a “configuração retangular” e “combinatória”.

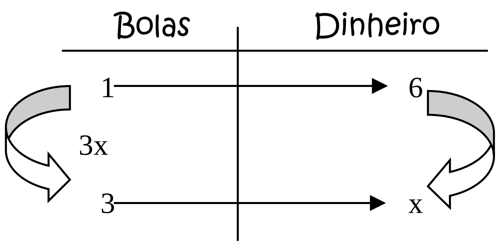
Em uma análise destas divisões de classes multiplicativas, Vergnaud (2014, p. 260) aponta que “numerosas classes de problemas podem ser identificadas segunda a forma da relação multiplicativa, segundo o caráter discreto ou contínuo das quantidades em jogo, segundo as propriedades dos números usados etc.”.

Por esta questão, passaremos a apresentar algumas situações-protótipo e alinhá-las aos seus eixos e representações.

Exemplo 1. Multiplicação.

"Uma bola custa R$ 6,00. Quanto pagarei por 3 bolas?" Podemos observar aqui a relação "um para muitos". O tipo mais simples de situação manipulativa é provavelmente no qual há correspondência um-para-muitos entre dois conjuntos. (NUNES; BRYANT, 1997, p. 143).

O leitor menos atento pode acreditar que basta multiplicar a quantidade de bolas pelo valor unitário dela, porém a representação feita por Vergnaud (2014) mostra a seguinte forma:



Outra relação envolvendo a operação dentro da Estrutura multiplicativa são as invariantes operatórias.

Segundo Nunes e Bryant (1997, p. 143), primeiro as situações multiplicativas envolvem uma relação constante de correspondência um-para-muitos entre dois conjuntos. Esta correspondência um-para-muitos constante é a invariante na situação, um tipo de invariante que não está presente no raciocínio aditivo. A correspondência um-para-muitos é a base para um novo conceito matemático, o conceito de proporção. A fim de manter constante, por exemplo, a correspondência "1-carro-para-4-rodas", cada vez que acrescentamos um carro para um conjunto de rodas, devemos acrescentar 4 rodas para o conjunto de carros – ou seja, somamos números diferentes de objetos a cada conjunto.

Como podemos observar, 1 e 3 representa uma grandeza, "bolas", já 6 e "x" representam outra grandeza, "reais". No caso do valor 3 entre as grandezas "bola", é classificada como um "escalar", um valor sem dimensão que faz com que uma grandeza transforme-se em outra. Ela não representa qualquer uma das grandezas apresentadas. Ainda dentro do exemplo, podemos observar bem definidamente que para cada bola acrescentada no conjunto de bolas, devemos acrescentar 6 reais no conjunto de reais.

Exemplo 2. Multiplicação.

"Em 3 pacotes de refrigerantes há 18 latas. Quantas latas há em 7 pacotes?".

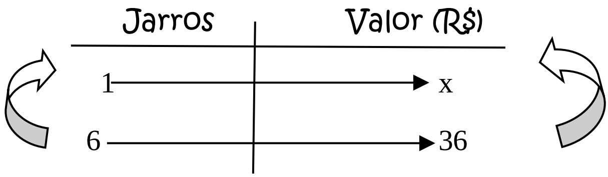
Podemos constatar aqui uma relação "muitos para muitos":

Pacotes	Latas
3 $\longrightarrow$	18
7 $\longrightarrow$	x

Neste exemplo, não cabe tentar multiplicar a quantidade de latas por pacotes; o que pode ser buscado, é saber quantas latas há em um pacote para depois a quantidade em 7 pacotes. Logo, esta situação pode ter uma dupla operação, uma divisão e uma multiplicação.

Exemplo 3. Divisão.

"Paguei R$ 36,00 em um conjunto de 6 jarros. Quanto custa cada Jarro?"



A busca aqui é por um escalar "valor sem dimensão", que transforma seis em um e, a partir daí, trinta e seis em x, ou devemos buscar a relação constante a "invariante" entre jarros e dinheiro. "Distribuir envolve a distribuição equitativa de um conjunto – por exemplo, de doces – entre um número de receptores – por exemplo, crianças." (NUNES; BRYANT, 1997, p. 148).

Exemplo 4.

Uma família consome em 5 dias 2 quilos de feijão. Levando em consideração estes valores, quanto consumirá de feijão esta família em 30 dias?

Observamos, neste exemplo, a relação muito para muito e uma grandeza discreta, dias e uma contínua, quilo. Porém, com relação ao esquema para solução, podemos organizá-lo da forma acima. O detalhe desta questão é que buscamos a proporcionalidade entre as duas grandezas, por isso este problema é de proporção simples:

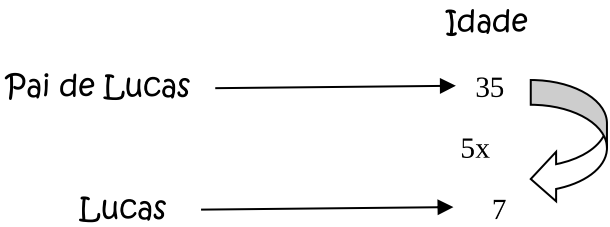
Dia	Quilo
5 →	→ 2
30 →	→ x

Se no caso envolvêssemos mais grandezas, haveria uma relação de proporção múltipla: isto acontece quando observamos uma receita, onde existem vários ingredientes.

Nos próximos exemplos, trataremos das relações ternárias, o que nos leva a definir o que é esta relação. "As relações ternárias são relações que, como o nome indica, ligam três elementos entre si” (VERGNAUD, 2014). Torna-se importante dizer que estes elementos são de mesma natureza, porém, bem diversos. Eles podem ser pessoas, números, objetos entre outros. A estes elementos, denominamos “referente” e “referido”, havendo entre eles a relação correspondente.

Exemplo 5.

"O pai de Lucas tem 35 anos e Lucas tem sete. Quantas vezes Lucas é mais novo que o seu pai?"



Uma variação nesta questão pode se dar da seguinte forma: perguntar quantas vezes menos Lucas é mais novo que o seu pai. Nesta questão, vemos expressões que podem ser bastante confusas para as crianças mais novas, que é "vezes mais"; se essa questão não for bem trabalhada com a criança, pode gerar dúvidas que a levará a não compreender a operação necessária.

Exemplo 6.

"Em uma loja de sorvete, pode-se escolher entre 9 tipos de sorvete e entre 5 tipos de cobertura. De quantos tipos diferentes uma pessoa pode escolher o seu sorvete com uma bola e uma cobertura?"

Esta questão é a próxima e se encaixa nas situações de produto de medidas. "Essa forma de relação consiste em uma relação ternária entre três quantidades, das quais uma é o produto das duas outras ao mesmo tempo no plano numérico e no plano dimensional" (VERGNAUD, 2014, p. 253).

De acordo com a apresentação, a melhor maneira de representar esta situação é a relação cartesiana. Definiremos cada tipo de sorvete por uma letra e as coberturas por números. Diante disto podemos formar os com as relações:

$$T = S \times C$$

Exemplo de produto cartesiano Vergnaud (2014)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		(A,2)							
3					(E,3)				
4									
5									

Como podemos observar, esta não é uma proposta de questão muito usual entre os professores do primeiro segmento, porém, nada impede dela ser proposta se, claro, resguardar as devidas complexidades da questão.

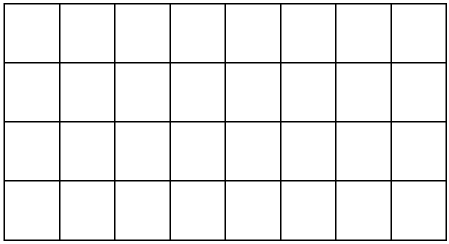
Outra situação que envolve produtos e medidas diz respeito a uma medida contínua, que pode ser apresentada como exemplo. As medidas podem ser metros, centímetros ou outra:

Exemplo 7.

Uma sala de aula tem 8 m de comprimento e 4 m de largura. Qual é a sua área?

Essa também é uma situação pouco explorada no ensino fundamental, porém, nada a impede de ser proposta. Com relação a este problema, é de grande importância verificar as inferências e considerações feitas pelos alunos na tentativa de resolver esse problema. Uma das primeiras coisas a se observar são os esquemas propostos pelos alunos. Segundo VERGNEUD (2014, p. 255).

> Se o retângulo é decomposto em quadrados (linha e coluna) de um metro de comprimento, como se costuma fazer, mostra-se que a medida da superfície é o produto da medida da grande dimensão (comprimento) pela medida da pequena dimensão (largura), tanto no plano das dimensões como no plano numérico.



X metros quadrados = 8 metros x 4 metros.

Para dimensões números x = 8 x 4

quadrados = metro x metro

O que procuramos demonstrar nesta parte foram algumas questões que envolvem uma operação de multiplicação ou divisão. Enfatizamos que são protótipos de questão, serviram apenas para mostrar as tantas variações que podem ser usadas para fomentar na criança as várias possibilidades de refletir sobre tais operações.

ESQUEMAS

Muitos de nós, quando perguntados sobre como eram as aulas de matemática nos nossos primeiros anos, poderemos lembrar-nos dos vários desenhos de florezinhas ou bolinhas que fazíamos para representar os vários conjuntos. Cada conjunto tinha um desenho diferente, ou risquinhos e bolinhas que fazíamos para auxiliar-nos em uma conta.

Estas representações nos acompanharam por muito tempo ao longo de nossa vida escolar. Mas o que está por trás destes riscos e desenhos? Podemos dizer que são os nossos pensamentos, o nosso modo de representar uma situação e as considerações que fazemos sobre a própria situação.

Os esquemas matemáticos são as molas sensoriais de nossas mentes (Vergnaud, 1987). Quando falamos sobre uma situação e o que está envolvido nela, falamos das formas pelas quais podemos representa-la. Quando fazemos isso, é porque temos um conceito sobre esta situação. Assim, este conceito está apoiado em um tripé: Situação, Representação e Invariantes.

Vejamos um exemplo:

Figura 2 Esquema de contagem.

Nesta imagem, observamos uma criança utilizando um esquema para contagem.

O esquema a seguir representa uma situação trigonométrica, mais especificamente uma situação envolvendo relações métricas no triângulo retângulo. Este esquema provavelmente representa todas as informações que são pertinentes ao problema.

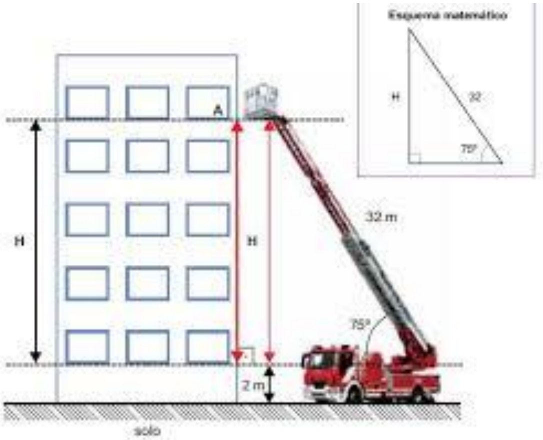


Figura 3 Esquema de uma situação trigonométrica

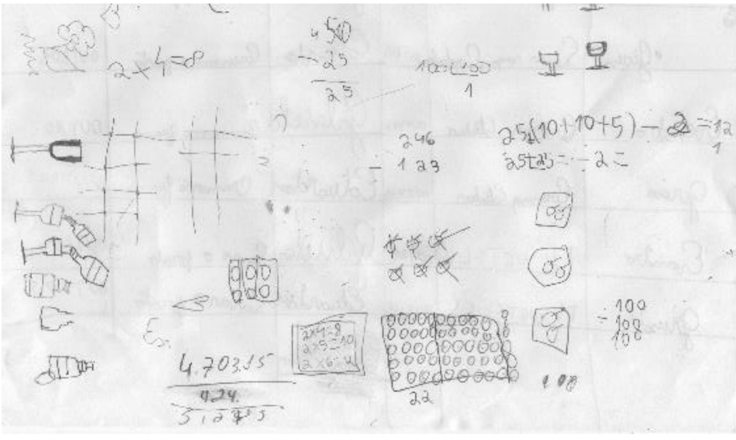


Figura 4 Uma criança fazendo atividade de Matemática

Estas várias representações ou esquemas apontam para a questão da importância de se permitir as inferências dos alunos com relação às situações através das suas representações. O que queremos dizer é que não se representa algo que você não conhece ou entende. Por isso a representação da criança está diretamente relacionada à "interiorização", que diz respeito a um conhecimento que acontece de fora para dentro e não de dentro para fora.

Muitas vezes observamos um conhecimento sendo ensinado de forma pronta. Isso acarreta uma situação que funciona como complicador da aprendizagem: quando a criança é levada a acreditar que a única forma de representar uma determinada situação é a que o professor ensina, ele abandona as suas hipóteses. (KAMII, 2002).

Muitas vezes, por uma pretensa rapidez de raciocínio, o professor procura ensinar o esquema pronto em forma de algoritmo, desconsiderando todos os esforços de raciocínio que levaram a chegar a este algoritmo. A este tipo de ação, Piaget define coerção intelectual, e que isso se caracteriza pelas folhas de exercício com muitos "arme e efetue". Como apontamos, os esquemas são as molas sensoriais e, por isto, passaremos a emprestar esta ideia para um debate sobre os problemas citados como exemplos.

O GRANDE TECIDO

Podem-se distinguir duas grandes categorias de relação multiplicativa, assim designando-se as relações que comportam, seja uma multiplicação, seja uma divisão. (VERGNAUD, 2014, p. 239)

Por que grande tecido?

Vergnaud (2014) afirma que existe uma diferença entre ser professor que ensina matemática e ser um matemático. O que isto quer dizer é que o professor ensina para que o aluno possa, caso queira, se tornar um profissional que utiliza a matemática como instrumento de trabalho.

Logo, o professor tem como função introduzir o seu aluno no mundo da matemática. Por este motivo o tecido, pois o professor leva o aluno a tecer o seu conhecimento, por meio de questionamentos, reflexões, erros e acertos, o aluno vai é levado a conhecer o que dá base ao seu conhecimento matemático, ou como podemos dizer, conhecer os conceitos envolvidos nas situações matemáticas.

Não se engane: não vamos simplesmente dar exemplos de situações. Vamos discutir os conceitos *e, assim, levar você professor a tecer o seu conhecimento.*

PROPORÇÃO SIMPLES UM-PARA-MUITOS

Proporção é um dos conceitos matemáticos mais presentes em nosso dia-a-dia!

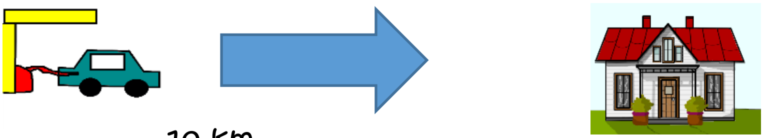
Vejamos um exemplo:

Um carro consome 1 litro de gasolina para percorrer 10 km. Se ele percorrer 50 km, qual será o consumo de gasolina?

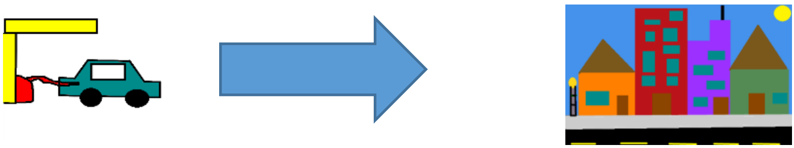
Em um primeiro momento, podemos perceber que o consumo aumenta em função do consumo. Logo, esta é uma proporção simples, que pode ser resolvida de várias formas. Isso vai depender em que momento esta situação for apresentada, pois ela pode ser trabalhada em turmas do primeiro ao quinto ano sem problemas: basta que o professor perceba que, por mais tentador que seja, ele não deve, em um primeiro momento, fazer com que o aluno busque uma operação matemática para resolver a situação.

Um dos principais objetivos da teoria de Vergnaud é fazer com que os alunos tirem as suas conclusões e os seus apontamentos e, com isso, construam os conceitos. Vamos ver isto na prática?

Vamos resolver a situação do exemplo acima.



10 km

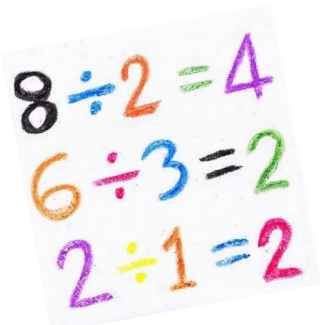


50 km

Segundo Piaget e Szaminska (1971), as crianças que mais têm fracassado nas operações de matemática são aquelas que apresentam uma dificuldade em relação às situações de equivalência.

Vamos pensar por um instante: o que queremos com a situação acima? Ou melhor, qual é o nosso objetivo com a situação apresentada? Será que seria apenas ensinar o aluno fazer uma conta? Ou podemos explorar a situação e levá-lo a compreender o conceito de proporcionalidade e equivalência?

Se for para ensinar fazer conta, ensine conta; se for para ensinar conceitos, deixe que o aluno explore todas as possibilidades de resolução da situação. O ensinar fazer conta é dar ao aluno uma ferramenta e deixá-lo descobrir onde é útil. Ensinar conceitos é fazer o aluno entender a situação e deixá-lo escolher a melhor ferramenta para aquela situação.



E a conta?

Vamos chegar lá!

O fazer uma operação matemática ou uma "conta" está diretamente ligado à ideia de representação. Quando a criança começa a representar e a quantificar objetos, a sua representação está ligada ao aspecto físico. O que isso quer dizer? Está ligado às formas, cores e pesos (Kamii (2001) e ocorre com as crianças menores que, ao longo de sua infância, irão amadurecendo até chegar ao lógico-matemático).

Logo, "fazer conta" fica para um momento posterior. Vamos fazer com que o conceito de proporcionalidade apareça primeiro.

Deixe que a criança faça as suas representações: podem ser com riscos, desenhos de garrafas de um litro, não importa desde que ele entenda que sempre que se percorre 10 km, gastará um litro de combustível. Após compreender isso, podemos explorar as formas de representação, desde que não seja esse o objetivo.

AINDA TEM DÚVIDA?

Vamos tentar explicar usando um esquema. Estes esquemas acabam sendo repetidos, pois você já observou nas explicações de situações da primeira parte, mas...

Litros	Quilômetros
1 litro	10 km
5 litros	50 km

Vamos lá!

Observe: O que propomos é fazer com que o aluno entenda a proporção de 10 km por litro. A tabela acima pode servir como ideia para criar situações como, a seta indica para baixo: logo, uma ação de replicar. (multiplicar)

Com um litro de combustível eu consigo andar 10 km.
Com 7 litros, quantos quilômetros eu consigo andar?

Situação onde a seta indica para cima, que logo sugere a ideia de dividir.

Com um litro de combustível eu ando 10 km. Quantos litros eu preciso para andar 50 km?

Ficou mais claro?

Espera os que sim!

ATENÇÃO!

Não há um tempo para se resolver uma situação. Respeite o tempo do aluno, deixe que ele trabalhe as suas ideias de resolução com os colegas. Se possível, forme grupos e, após todos terem terminado, discuta as respostas em grupo. Valorize todo tipo de resposta, discuta as certas e principalmente as erradas, pois são essas que trazem maior possibilidade de discussão. Não corrija: deixe que o aluno compreenda o seu erro. Para isso, faça perguntas do tipo:

- Como você chegou a esta resposta?
- Se eu colocar mais combustível, vou mais longe ou mais perto?

Entre duas respostas diferentes, procure fazer com que os alunos discutam as formas usadas para resolver a situação. E acima, de tudo, deixe as crianças criarem os seus próprios esquemas de resolução.

Como vimos, essa parte é muito rica para o aluno e para o professor, pois possibilita diagnosticar e observar a forma de pensar dos alunos.

Exemplos de situações que suscitam a multiplicação

Em um saquinho de balas, há 8 balas. Quantas balas há em 4 saquinhos?

Em uma caixa de papelão, foram colocadas 12 latas de leite. Quantas latas de leite terão em 8 caixas do mesmo tipo?

Com uma garrafa de refrigerante eu consigo encher 8 copos. Quero servir refrigerantes para 24 convidados. Quantas garrafas tenho de comprar?

Com um pacote grande de balas, eu consigo encher 8 saquinhos com 5 balas em cada. Quantas balas há no pacote de bala?

Comprei um pacote com 5 meias por R$ 20,00. Quanto custa cada par de meias?

PROPORÇÃO SIMPLES
MUITOS-PARA-MUITOS

Esta classe de situação é bem parecida com as situações de um-para-muitos. O que difere é que não parte da proporção de um, embora as recomendações sejam as mesmas feitas para a classe anterior.

Um exemplo:

Fui à sorveteria e comprei 3 sorvetes por R$ 12,00. Quanto vou pagar por 5 sorvetes?

Vamos ao esquema:

Sorvete	Reais
1	?
3	R$ 12,00
5	R$?

Não se engane: esse tipo de situação não demanda o mesmo tipo de reflexão, embora a ideia de proporção esteja envolvida como objetivo de aprendizagem. Observe, não existe como evidente um valor que eu multiplique o 3 para ele tornar-se 5 e, consequentemente, multiplicar o 12 para tornar-se 20, que é a resposta que estamos à procura.

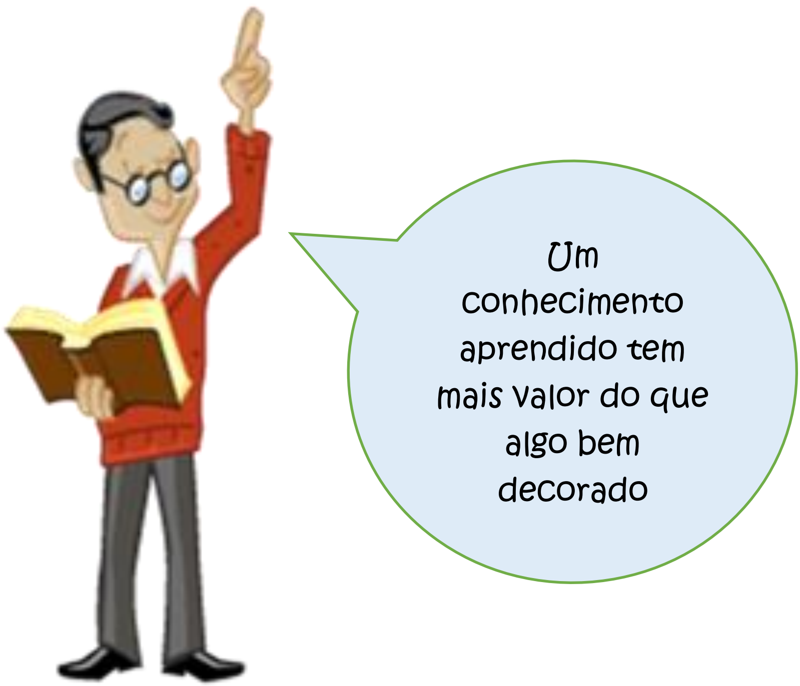
Vamos lá: deixe que em princípio o aluno explore o que ele entendeu das situações anteriores. Permita que ele teça considerações. Por exemplo, ele poderá entender a possibilidade da representação assim: 3 sorvetes R$ 12,00, 6 sorvete R$ 24,00. Como queremos saber quanto custa 5 sorvetes, o valor que procuramos é menor que R$ 24,00. Isso permite ao aluno criar parâmetros.

Sendo assim, a resposta dele estará compreendida entre R$ 16,00 e R$ 24,00. Isso é importante para que o professor avalie como o aluno está interpretando a situação, além de perceber o quanto ele compreende o número como cardinalidade de um conjunto ou, no caso, identificador de quantidade.

Outra consideração que pode ser feita pelo aluno é descobrir qual é o valor de um sorvete. Essa é uma ideia de partição, que pode ser um pouco difícil se o aluno não entender que os sorvetes têm o mesmo valor. Se você perceber que ele ainda não entendeu, dê isso como dica. Depois que for percebido pelo aluno, ele fará as replicações.

ATENÇÃO

Não queira fazer com que o aluno divida 12 por 3. Explore o trabalho em grupo e peça para que o aluno explique com ele está pensando.



Exemplos que pedem ser explorados:

Na sorveteria do seu Juca, 3 sorvetes custam R$ 15,00. Com R$ 45,00 quantos sorvetes eu posso comprar?

Para os saquinhos surpresas da minha festa, vou usar 14 balas para cada 2 saquinhos. Se eu tenho 70 balas, quantos saquinhos eu posso fazer?

Em 8 caixas de bombons, há 100 bombons. Quantos bombons há em 11 caixas?

Em 7 carros, consigo transportar 28 pessoas. Quantas pessoas consigo transportar com 13 carros?

PROPORÇÃO MÚLTIPLA

Este tipo de proporção envolve duas ou mais proporções simples. Ela pode ser explorada depois de se ter esgotado ou pelo menos sido bastante realizadas as proporções simples. Como o próprio nome diz, são proporções: logo, se deve sempre buscar levar a criança compreender bem esta proporção.

Outro aspecto é que veremos que, com uma única situação apenas mudando a redação, é possível explorar várias possibilidades.

Um grupo de 4 pessoas consome 16 litros de água em 2 dias. Considerando esta média, quanto de água consomem 20 pessoas em 4 dias?

Vamos abordar sob a forma de tabela:

Pessoas	Água	Dias
4	16	2
20	?	4

Outro aspecto que deve ser bem compreendido com relação a este tipo de situação é que as três grandezas estão em proporção; outra observação é que se você não explorou as grandezas discretas, você pode começar agora.

Grandezas discretas não são aquelas que passam despercebidas ou são tímidas. São aquelas que possuem submúltiplos como metro, quilo, litro, entre outras.

Voltando à situação:

Talvez você perceba que como multiplicamos 4 pessoas por 5, encontramos 20 pessoas e que multiplicamos 2 dias por dois e encontramos 4 dias; basta que eu multipliquemos os dois operadores 5 e 2 e, o resultado, seja multiplicado por 16 litros de água e, assim, encontraremos a quantidade buscada. O aluno pode também pensar assim, porém, deixe isto a cargo dele, não tente persuadi-lo a fazer isso.

A resolução desta situação demanda certo tempo, o que pode provocar desânimo no aluno; logo, busque situações que sejam mais factíveis para que ele realize essa tarefa em grupo.

Cuidado com os grupos! Procure mesclar alunos de vários níveis de aprendizado: sempre que um grupo terminar, peça para que expliquem como chegaram à resposta. E, acima de tudo, pergunte se todos do grupo entenderam.

Se surgirem muitas dúvidas e os alunos se sentirem sem direção, procure com questionamentos fazer o aluno descobrir quanto uma pessoa consome água. Deixe os alunos explorarem todo tipo de esquema, seja com desenhos ou algarismos. Lembre-se: para cada situação nova, o aluno sempre vai buscar se apoiar em situações que ele já tenha resolvido e, assim, ter um parâmetro para começar.

Esta outra situação que iremos apresentar, trata de descobrir uma grandeza para descobrir a outra que se pede. O aluno deve compreender que existe uma relação constante entre as grandezas. Por isso, sempre que propuser esse tipo de situação, tenha em mente os valores, depois os enunciados. Fica como dica.

Vejamos os valores 1, 2 e 3. E o enunciado que será assim:

Dona Wilma usa 2 xícaras de farinha para cada ovo e 3 colheres de açúcar para cada xícara de farinha quando quer fazer uma receita de biscoito. Ela usou 3 ovos para fazer uma massa. Quanto ela usou de farinha?

Farinha	ovo	açúcar
2	1	3
?	3	x

Este tipo de esquema dificilmente aparece no desenvolvimento de um aluno do primeiro segmento para a solução desse tipo de questão. Vergnaud (2014) denomina como "Problemas Aritméticos Complexos". Segundo ele, tal tipo de situação não requer único tipo de reflexão, pois não é como uma relação que se resolve o problema.

O professor deve incentivar o aluno a verificar algumas relações intermediárias e a sua importância na composição da solução. O que isto quer dizer? Que se deve provocar o aluno a fazer alguns questionamentos do tipo:

- Se eu aumentar um ovo na receita, quanto é o aumento de farinha?

- Posso pensar em meio ovo?

- Se eu aumentar o açúcar na receita, devo aumentar a farinha?

- Um ovo corresponde a quanto de açúcar?

O que podemos verificar aqui é que são os questionamentos que levam a solução que tornam a situação tão importante. Não devemos priorizar o cálculo mas sim a reflexão.

Exemplos de situações de proporção múltipla.

Com 25 litros de leite um produtor consegue fazer 5 queijos, que ele vende a R$ 14,00 cada. Se a produção de leite for de 120 litros, quanto ele arrecadará na venda dos queijos?

Em uma corrida de carro, Marcos consegue percorrer 1500 km em 3 dias, gastando 150 litros de combustível. Qual é o consumo médio de combustível do seu carro por litro?

Um grupo de 20 escoteiros vai realizar um acampamento de 7 dias por Minas Gerais e deverão levar macarrão para a alimentação, entre outros alimentos. Eles sabem que duas pessoas consomem, em média, 500 gramas de macarrão a cada 2 dias. Quanto de macarrão os escoteiros devem levar para essa viagem?

Um criador de cabras recolhe em média 66 litros de leite de cabra por dia. Ele necessita de aproximadamente 5 litros de leite para fazer 1 quilo de queijo. Os queijos que ele faz pesam 125 gramas cada um. Ele os vende a R$ 30,00 a dúzia. Quanto ele ganha por dia em média com seus queijos? Que outras perguntas podem-se fazer sobre o assunto? (VERGNAUD, 2014, P. 276)

SITUAÇÕES QUE ENVOVEM RELAÇÕES TERNÁRIAS

O que veremos a partir dos próximos três tópicos são as relações ternárias, ou seja, aqui temos uma relação entre elementos de um mesmo conjunto ou duas medidas de um tipo que se relacionam para formar uma medida de outro tipo. Vergnaud (2014).

COMPARAÇÃO MULTIPLICATIVA

Segundo Vergnaud (2014, p. 262):

> A análise em termos de operadores-escalares é compreendida facilmente pelas crianças, mas ela implica uma distinção entre medidas e escalar que pede um aprofundamento.

O que temos então é que ao invés de se relacionar elementos de conjuntos diferentes, através de um escalar, tal escalar servirá para determinar a diferença de tamanho entre elementos de um mesmo conjunto. Esta situação envolve três termos: referente, referido e relação.

Vejamos um exemplo:

Uma pessoa adulta consome 12 quilos de carne por mês. Uma criança consome 4 quilos por mês. Quantas vezes mais carne um adulto consome em relação a uma criança?

Vamos desmembrar o exemplo dado: em primeiro lugar, vamos definir o conjunto, que no caso são quilos. O referente é o que o adulto consome, o referido é o que a criança consome, a relação é o quanto 12 é maior que 4 ou o quanto 4 é menor que 12.

Criança	4	X 3
Adulto	12	

Podemos observar que o que se busca é compreender quantas vezes 12 quilos é maior que 4 quilos. No caso a relação, diferença de tamanho.

Este tipo de situação pode ser aberta para a utilização dos termos triplo, dobro, metade, um terço, entre outros. O bom é perceber que essas situações podem ser uma porta de entrada para as frações. Isto porque, quando dizemos que 12 quilos é 3 vezes maior que 4 quilos, podemos ao mesmo tempo ter a preocupação em dizer que 4 quilos é 1/3 de 12 quilos.

Isto justifica a fala de Vergnaud (2014, p. 250) ao afirmar que: "a relação de duas quantidades é compreendida com mais facilidade com relações inferiores a 1; 1/2, 1/3, 1/4 ... 2/3 ... 3/4". Mas cuidado! Não tente de imediato impor este tipo de relação. Tente fazer perguntas do tipo:

- Em quantas partes eu tenho que dividir 12 quilos para encontrar 4 quilos?

Para este tipo de classe de situações, pode ser mais fácil criar situações-problema, mas isto não significa que seja fácil para a criança encontrar a solução. Deixe-a buscar sempre as suas respostas.

Exemplos de situações

Uma moto faz 45 km com um litro de gasolina. Um carro faz 5 vezes menos. Quantos quilômetros um carro faz com um litro de gasolina?

Paulo tem um salário de R$ 3500,00. Juca recebe de salário R$ 1750,00. Quantas vezes o salário de Paulo é maior que o de Juca?

Uma caixa de bombons custa 3 vezes mais que um pacote de balas. Se o pacote de balas custa R$ 4,25., quanto custa a caixa de bombons?

A distância entre o Rio de Janeiro e Brasília é de 1450 km. A distância entre Brasília e Salvador é o quádruplo desta distância. Qual a distância entre Brasília e Salvador?

PRODUTO DE MEDIDAS

Tal relação é descrita por Vergnaud (2014, p. 253) da seguinte forma:

> Essa forma de relação consiste em uma relação ternária entre três quantidades, das quais uma é o produto das duas outras ao mesmo tempo no plano numérico o no plano dimensional.

Este tipo de situação é desenvolvida no ensino médio de duas formas: uma quando é ensinada a geometria e outra quando se ensina a análise combinatória. Não se assuste! Não vamos trabalhar todas as considerações rebuscadas do ensino médio, mas tenha em mente que os seus alunos estão sendo ensinados para irem além, por isso necessitam de uma boa base.

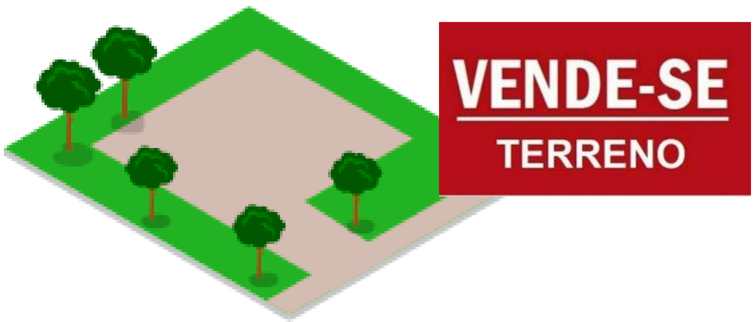
CONFIGURAÇÃO RETÂNGULAR

Este tipo de situação refere-se às figuras planas e suas áreas. Basicamente iremos tratar aqui dos retângulos e quadrados, o que dará base para os alunos conhecerem as formas mais primitivas da geometria. Isso também permitirá aos professores apresentarem aos alunos outro tipo de representação de medida, que são as medidas quadradas como km^2, m^2, cm^2, entre outras, e são justamente essas que representam as áreas.

SÓ PARA ESCLARECER!

Observe a situação:

Vende-se um terreno que possui 8 metros de largura e 9 metros de comprimento.



Pelo anúncio, podemos apresentar alguns conceitos que devem ser explorados para a introdução do tema: uma delas trata de apresentar ao aluno o conceito de área; outra, da representação dessa medida, que são as medidas quadradas.

VOCÊ SABE POR QUE A MEDIDA DE ÁREA É MEDIDA QUADRADA?

É simples! Observe a operação a seguir:

$$\begin{array}{r} 8\,m \\ \times\ 9\,m \\ \hline \end{array}$$

O que temos aqui é o fato de que os algarismos representam os valores e o "m", a unidade de medida. Com isso, podemos realizar a operação da seguinte forma:

8 × 9 = 72. Esse é o valor da operação, ou da medida. Quando fazemos m × m, pela regra das potencias, temos m^2 que é a unidade de medida. Esse tipo de explicação é mera formalidade, mas permite apresentar outro tipo de unidade de medida, que

aqui é usado para determinar as áreas. Para o aluno, o professor deve deixar claro que não tratamos mais das unidades que representam o comprimento ou medidas lineares.

Assim, voltando ao assunto:

Qual a área deste terreno? 72 m^2.

Este tipo de situação pode ser uma ótima oportunidade para se trabalhar a ideia de estimativa ou permitir ao aluno que reflita sobre algumas situações do tipo "como eu calcularia a área da sala". Para tal, o professor deve introduzir em suas aulas os instrumentos de medida, como régua, metro, trena entre outros.

Uma das grandes vantagens desse tipo de situação é a sua aplicabilidade no dia a dia, além de permitir ao aluno muitas ações práticas, como medir a sala de aula, as mesas e até a própria escola.

Procure explorar com os alunos todos os usos desse tipo de unidade: explore vários objetos que podem ser vendidos usando tal unidade de medida, além de esclarecer a diferença entre um metro (m) e um metro quadrado (m^2).

ATENÇÃO!

Não deixe de explorar o conceito de múltiplos e submúltiplos do metro, nesse caso, os centímetros e milímetros, além do quilômetro, decâmetro e hectómetro.

Exemplo de situações:

Um terreno possui 9 metros de comprimento e 7 metros de largura. Qual a área deste terreno?

O terreno da minha casa possui 125 m^2. Eu sei que ele possui 25 m de comprimento. Qual a largura do terreno?

Vou construir uma casa no quintal dos meus pais. A casa possui dois quartos, uma sala, um banheiro de 4 m^2 e uma cozinha. Se todos os cômodos, com exceção do banheiro, possuem 3 metros de largura e 3 metros de comprimento, qual é a área que a casa ocupa?

Qual o tamanho mínimo que um terreno deve possuir para a construção de uma casa baixa, de 98 m^2 de área?

Há como construir uma casa de 125 m^2 de área em um terreno de 10 metros de comprimento por 9 metros de largura? Explique a sua resposta.

COMBINATÓRIA

Esse tipo de situação é muito bem explorada e melhor entendida como uma relação cartesiana Vergnaud (2014). Isso se explica analisando a situação abaixo:

Marta vai ao cinema com as suas amigas. Ela separou 5 blusas e 3 calças. De quantas formas diferentes Marta pode se vestir para sair com as amigas? Vamos definir o conjunto de blusas como B = {a, b, c, d, e} e as calças como C = {l, m, n}.

O que temos aqui é um produto entre o conjunto de blusas pelo conjunto de calças, R = B×C.

Podemos deixar isto mais claro! O produto cartesiano a que nos referimos é uma tabela de dupla entrada. Dessa maneira, relacionamos os elementos de cada conjunto e formamos pares de elementos.

			B			
		a	b	c	d	e
	l	(l,a)	(l,b)	(l,c)	(l,d)	(l,e)
C	m	(m,a)	(m,b)	(m,c)	(m,d)	(m,e)
	n	(n,a)	(n,b)	(n,c)	(n,d)	(n,e)

Este tipo de classe de situação pode ser mais bem explorado em atividades práticas. Vamos a uma atividade prática:

Ponha três cadeiras alinhadas na frente da sala, escolha três alunos e peça para que eles se sentem. Escreva os nomes dos alunos no quadro na ordem em que eles estão sentados;

Peça para que os alunos troquem de cadeiras, e faça novo registro no quadro. Discuta com os alunos, o que foi que aconteceu com a ordem em que os colegas estavam sentados. Se houver disponibilidade, tire fotos, apresente-as aos alunos e observe os comentários. Discuta sobre o que ficou diferente. Peça para que definam de quantas formas diferentes como os colegas podem estar sentados nas cadeiras.

Outra atividade é pedir para os alunos escolherem alguns lápis de cor, no caso cinco (todos os alunos deverão ter as mesmas cores) e peça para pintarem uma bandeira, que pode ser oferecida pelo professor em uma folha xerocada. Esta bandeira deverá estar dividida em três partes e cada parte só poderá ser pintada apenas de uma cor. Em seguida, compare as bandeiras e conte de quantas formas diferentes as bandeiras apareceram em relação à cor e à ordem que foram pintadas.

Discuta com os alunos se todas as formas de pintar as bandeiras foram exploradas. Faça o registro e a contagem. Converse com os alunos sobre os valores encontrados e se haveria uma forma de descobrir as possibilidades sem ter que testar ou contar todas as vezes. Explore as respostas e discuta em grupo e todos os registros possíveis.

Você, professor, já deve saber que se multiplicarmos a quantidade de possibilidades de cada grupo, teremos o número de combinações. Mas deixe esta descoberta para os alunos: não tente abreviar as descobertas, afinal, para quê pressa?

Exemplo de situações:

Laura comprou 2 calças novas para uma viagem. Ela está levando 8 blusas para usar com as calças. De quantas formas diferentes Laura poderá se vestir?

Ricardo Juntou 4 camisas e uns cachecóis para poder escolher uma forma de se arrumar para um encontro. Ao todo, ele viu que pode se arrumar de 12 formas diferentes usando camisa e cachecol. Se ele possui 4 camisas, quantos cachecóis ele tem?

Em uma sorveteria, os sabores de sorvete são 15 e as coberturas são 5. De quantas formas diferentes uma pessoa pode pedir o seu sorvete escolhendo um sabor e uma cobertura?

Paulo vai viajar de carro e sabe que, nesta viagem, ele deve sair da cidade "A", passar pela cidade "B" para chegar à cidade "C". Se para for da cidade A e chegar à cidade B, existem 4 caminhos; se para for da cidade B e chegar à cidade C, existem 7 caminhos. De quantas formas ele pode ir da cidade A e chegar à cidade C?

PARA NÃO DIZER QUE NÃO FALEI DAS FLORES: divisão Euclidiana

Muitos professores do ensino fundamental que participaram da pesquisa que deu origem a este livreto, relataram que uma das maiores dificuldades em se ensinar matemática no ensino fundamental é a divisão.

Talvez o que seja apresentado aqui não traga novidades para muitos professores, mas tentaremos abordar a divisão mais sob a forma de conceitos do que operações ou técnicas.

A divisão é um tipo de operação matemática, um tanto diferente das demais do ensino fundamental. Enquanto nas operações de soma, subtração e multiplicação buscamos um único resultado, na divisão, muitas vezes, procuramos por duas respostas: o "quociente" e o "restos". Vergnaud (2014).

Segundo a definição de divisibilidade:

> Dado dois números naturais a e b com $a \neq 0$, diremos que a divide b, escrevendo $a|b$, quando existir $c \in N$ tal que $b = a. c$. neste caso, diremos também que a é um divisor ou um fator de b ou, ainda, que b é um múltiplo de a. (HEFEZ, 2005, P. 30)

Ficou complicado?

Não se preocupe! Vamos explicar:

Como a e b são números naturais, eles podem ser qualquer um número maior que zero. Digamos que a = 4 e b = 16. O a deve ser diferente de zero. É lógico, porque sabemos que não se pode dividir por zeros.

Como a = 4 e b = 16, eu posso escrever assim 4|16; ler 4 divide 16. Isto é verdade, a resposta é 4. Posso dizer então que 16 = 4.c, o que também será verdade se c = 4.

Ficou mais fácil?

A partir desse ponto, podemos desmistificar uma questão muito falada entre os professores. Se a multiplicação é uma soma de parcelas iguais, a divisão é uma subtração de parcelas iguais. Tal afirmação se torna incoerente quando levamos em consideração uma questão, enquanto a subtração leva em conta a relação parte-todo, onde para saber o tamanho do todo se leva em conta as partes e, para saber o tamanho de uma das partes, leva-se em conta o todo e o tamanho de uma parte.

Em relação à divisão, isto não ocorre, pois nela o que acontece é uma distribuição, e temos que levar em consideração três elementos desta distribuição: o todo, o tamanho das partes e em quantas partes o todo foi distribuído. Nunes e Bryant (1997).

Assim, se vamos distribuir 35 bolas de gude (todo) para 7 crianças (7 partes), cada uma receberá 5 bolinhas (o tamanho das cotas). O que vemos aqui é a existência de uma proporcionalidade em relação as partições: se aumentarmos o número de cotas, diminuiremos o número de crianças e se aumentarmos os números de crianças (partes), diminuiremos o número de cotas.

A questão é que nem sempre temos uma divisão exata, e é justamente aí que surgem as situações envolvendo a divisão Euclidiana. Ela determina que mesmo não havendo um valor c que torne a sentença verdadeira, mesmo assim podemos realizar a divisão. Hefez (2005).

Vamos entender por meio da seguinte situação:

Paulo vai distribuir em sua festa de aniversário alguns saquinhos surpresa. Ele montou 37 saquinhos (todo). No dia da festa, compareceram para festa 12 amigos (cota). Se cada amigo ganhou a mesma quantidade de saquinhos (partes), quantos saquinhos cada amigo ganhou? Sobrou algum saquinho?

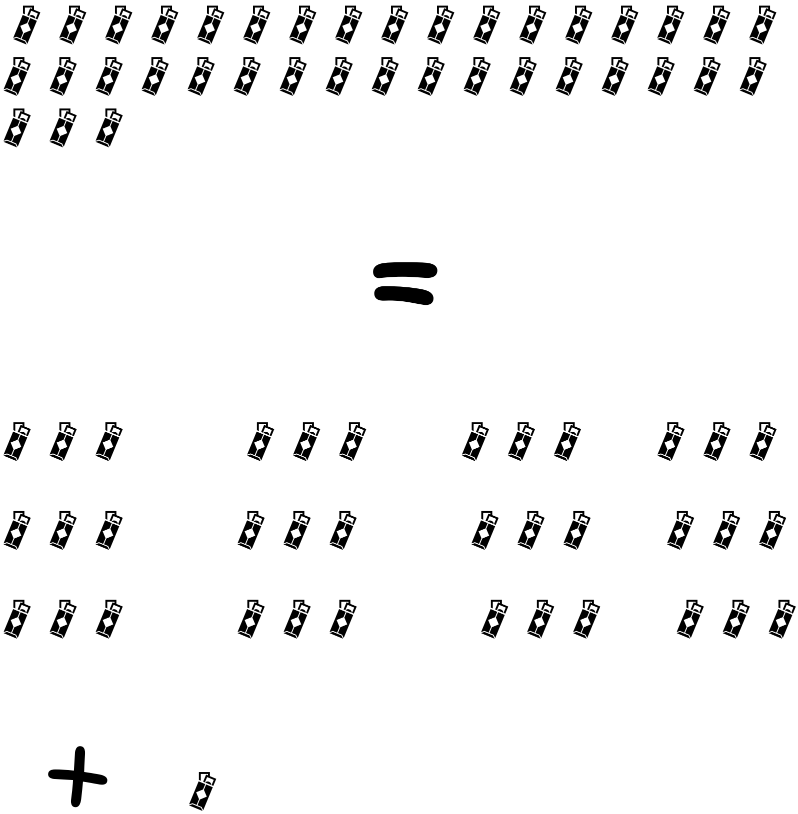
Essa é uma situação que pode ser apresentada a qualquer aluno do ensino fundamental, mesmos aos mais novos. O que pode ser alterada é a forma com que cada grupo de alunos, a depender da sua faixa etária, interpretará e representará a situação.

Muitas vezes, como pode ser visto na pesquisa que deu origem a este livreto, o professor acredita ser a divisão uma das partes mais difíceis de ensinar aos alunos do ensino fundamental. O que podemos observar é que em muitos casos, esse tipo de operação é apresentada, inicialmente, como operação e não como situação. Vejamos: antes de iniciarmos a operação, devemos disponibilizar ao aluno tempo e materiais que facilitem o raciocínio dele.

Muitas vezes partir do concreto é uma boa opção por parte do professor, porém, isto deve ser sempre seguido dos registros, lembrando sempre dos invariantes operatórios, "esquema-em-ação" e "teorema-em-ação", que são as formas de internalizar um conceito.

Não inicie qualquer situação com a pretensão de que o aluno registre as suas ações como algoritmos, pois isso irá surgir e pode ser desenvolvido pelo professor quando os conceitos existentes nas situações forem bem entendidos.

Uma sugestão que funciona é explorar as formas de representação dos saquinhos surpresa: o importante não é a forma do saquinho, mas de que forma. Dê ênfase à fidelidade da cardinalidade do conjunto, mesmo com desenhos ou traços, o aluno deve compreender o que cada desenho ou traço representa, nesse caso, os saquinhos. Caso haja dificuldade, um bom recurso é o material dourado.



O que queremos explorar nessa situação é o conceito de partição, onde o todo não pode ser dividido em partes iguais. Daí as respostas procuradas, quantas partes e o que sobra. Devemos explorar também, um conceito muito importante na divisão Euclidiana, que embora pareça simples, no caso dos alunos não é bem assim. Este conceito é o resto e nunca pode ser maior ou igual às partes ou, no caso, o quociente.

O aluno deve ser levado a compreender que enquanto houver possibilidade, deve-se continuar distribuindo. Este tipo de situação deve ser largamente oferecida aos alunos, de forma a levá-los a compreender o seguinte:

$D = d.q + r$. Esse é o principal conceito da divisão Euclidiana. Ou seja, o dividendo é igual e o divisor, vezes o quociente mais o resto, onde o dividendo é o que vai ser dividido (todo), o divisor é o valor de cada parte (tamanho das partes), o quociente, que é o número de partes (quota), e o resto que, no caso, é o que sobra quando a divisão não for exata; nesse caso, é resto será zero. Quociente por definição significa "quantas vezes". Por isso não há erro em dizer quantas vezes uma quantidade cabe em outra.

As situações que podem ser exploradas neste contexto são as que façam o aluno compreender que em uma relação, onde sabendo três de quatro valores envolvidos nela, pode-se descobrir o quarto valor.

São exemplos de situações que possuem o seguinte enredo:

Marcele irá distribuir as suas bonecas para doação. Ela mandou para as sete instituições que escolheu quatro bonecas para cada. Ao final, sobraram três bonecas. Quantas bonecas tinha Marcela?

Tiago viajou de carro com a sua família. Esta viagem era de 1213 km. O que fez Tiago dividir a viagem em cinco partes. Se as quatro primeiras partes possuem 250 km, quantos quilômetros possui a última parte?

Ricardo distribuiu as suas bolinhas de gude com seus amigos. Ao final da distribuição, cada amigo ganhou 12 bolinhas e sobraram 3. Se Ricardo tinha 87 bolinhas, quantos amigos ganharam bolinhas de gude?

Os 4 filhos de Gabriela pediram dinheiro para ir ao cinema. Ela pegou todo dinheiro que tinha na carteira, deu R$ 30,00 para cada filho e ficou com R$ 15,00. Quanto reais Gabriela tinha na carteira?

Podemos observar que cada situação envolve um conceito diferente, e cada uma deve ser explorada pelo professor, sempre com a possibilidade de registro e com uso de material manipulável quando o professor julgar necessário.

OS PROCEDIMENTOS DE DIVISÃO EUCLIDIANA

Com relação ao procedimento, não vamos criar regras ou novos algoritmos, mostraremos apenas que, diante do conceito apresentado, podemos sugerir formas de buscar soluções para as situações. Vejamos a seguinte situação:

Ricardo vai distribuir entre os seus filhos R$ 123,00. Como são 4, ele quer saber quanto cada filho irá ganhar. Como podemos ver, temos aqui a seguinte questão: o todo é R$ 123,00, as partes são 4. Temos que descobrir o valor das cotas e se essa distribuição deixará resto.

Como já vimos, D (todo) = d (parte); quociente (quota) + resto; assim podemos, desta relação, deduzir que: $D - d.q = r$, sabendo ainda que $r < q$. Logo, poderemos proceder da seguinte maneira:

> $123 - (q).\ 4 = r$, vamos desta forma aumentando o quociente.
>
> $123 - 10.4 = 83$, $83 > 10$ não serve;
>
> $123 - 20.4 = 43$, $43 > 20$, não serve;

123 – 30. 4 = 3, 3 < 30. Assim, podemos afirmar que Ricardo dará a cada filho R$ 30,00 e restará R$ 3,00. Este tipo de procedimento é o que usualmente realizamos nas divisões ensinadas aos alunos. Só que não é observada por muitos, nós a conhecemos da seguinte forma:

$$\begin{array}{r|l} 12'3 & 4 \\ \hline -12 & 30 \\ -3 & \\ 0 & \\ 3 & \end{array}$$

O tipo de apresentação da divisão, ou no caso, a distribuição que foi demonstrada no primeiro momento, pode facilitar algumas questões. Vejamos algumas:

Quando buscamos o valor de uma quota que multiplicado pela parte (dividendo), o seu valor irá ser subtraído do todo e, assim, encontraremos o resto, que pode ser zero. Podemos incentivar o aluno a encontrar o maior valor que multiplicado pela parte, será igual ou bem próximo do todo. Se igual à divisão será exata, e não deixará resto.

Outra questão é que este tipo de divisão possibilita ao aluno testar valores; assim, ele não se sentirá limitado a ter que decorar a "tabuada de vezes".

Outra questão importante: possibilite ao aluno a utilização de uma tabuada que deverá ficar ao lado para que ele, sentindo dificuldade, possa recorrer-lhe sempre que necessário.

O ALGORITMO DA DIVISÃO

Normalmente iniciamos o ensino de divisão, fazendo a distribuição e logo depois partimos para o algoritmo. Essa transição pode e é bastaste complexa para o aluno. Para um adulto, saber multiplicar é o principal requisito para saber dividir, isso pode ser uma verdade, mas existe outro caminho que é tão importante quanto: um deles é compreender a formação do número. Outro aspecto está no fato de quando multiplicamos, o fazemos da direita para a esquerda e quando dividimos fazemos da esquerda para a direita.

Será que isto é fácil de ser entendido pelos alunos? Mais que isso, será que seria fácil para o professor explicar? Essa é uma questão a ser levada em conta quando se acredita que basta saber multiplicar. Como dito por Vergnaud (2014, p. 190).

> No plano das regras operatórias propriamente ditas, a divisão é evidentemente é a mais complexas das quatro operações porque implica, ao mesmo tempo, a subtração, a multiplicação e a busca por tateio ou enquadramento dos algarismos do quociente.

Sim, no plano das regras pois existem muitas regras na multiplicação. Vamos tomar, por exemplo, a divisão de 1234 por 14. Não podemos inicialmente separar os dois primeiros algarismos do dividendo, como diz a regra, pois ele seria menor que o divisor. Seria menor? Se observarmos os dois algarismos, eles são da unidade de milhar e das centenas, logo formam 1200. Não se pode dividir 1200 por 14?

A grande questão é que quando separamos os algarismos da esquerda para direita, formamos um número sem levar em conta o valor posicional do algarismo, o conceitualmente é um equívoco forçado, mas que favorece a operação.

Sim, há possibilidades de buscar formas de auxiliar o aluno em sua busca por aprender a divisão. Mas cuidado: não se deve negligenciar a matemática com argumentos infundados. Como forma de ajudar nesta busca por uma forma de conduzir o aluno à aprendizagem da divisão, apresentaremos aqui duas formas de introduzir o algoritmo da divisão que, ao longo da caminhada do aluno, deve ser mais bem fundamentada.

A primeira delas é a forma do número decomposto, onde o aluno deve compreender bem a forma com que o número é formado.

Usando o algoritmo da divisão em sua disposição, iremos dividir 1234 por 14. Esta operação é uma forma de iniciar a divisão Euclidiana e de apresentar as possibilidades de inferências na ação do aluno.

Em um primeiro momento, vamos decompor o dividendo. 1000 + 200 + 30 + 4, e armaremos o algoritmo apresentando o número desta forma.

1000 + 200 + 30 + 4 20 + 200	14 70	Em um primeiro momento, vamos dividir 1000 por 14, que é 70 e sobra 20;
10 + 30	15	Somamos 20 + 200 e dividimos o resultado, que é 15 e sobra 10;
12 + 4	2 1	Da mesma forma, fazemos com 10 + 30, que dividido por 14 é 12, e o resto é 2;
2		Somamos 12 + 4, e dividimos por 14. O resultado será 1 e resto 2;
		Por último, somamos todos os resultados encontrados, que será o valor de quociente.

Uma observação deve ser feita: essa é apenas uma forma de introduzir o algoritmo da divisão e não deve ser colocada como a forma de se fazer divisão. Ela apenas facilita ao aluno entender que a divisão continua sendo uma distribuição por cotas, mas que agora ele, o aluno, pode se apropriar de outra forma de fazer esta distribuição.

Outra questão é que as somas e as multiplicações podem ser feitas em um local separado, cabendo apenas no espaço montado as subtrações. Com isto, quando da formalização, os alunos já percebem a posição espacial de cada termo.

Outro aspecto nesse tipo de disposição para a divisão está no fato que é: o aluno pode querer iniciar a divisão por qualquer valor e isso não é impedimento, exceto o da casa das unidades. O que o professor deve levar em consideração é de qual forma o aluno fará tal partição e se ele não esqueceu nenhum termo (valor).

Outra maneira de se introduzir o algoritmo da divisão para os alunos dos primeiros anos é por estimativa, onde eles buscarão por tateio, como diz Vergnaud, o valor do quociente e do resto caso exista. Este processo se coloca como posterior ao primeiro e é apenas outra forma; aqui devemos explorar o significado do termo quociente, que é "quantas vezes".

Armada a operação da mesma forma que a anterior, usaremos apenas uma expressão diferente. "Quantas vezes o divisor cabe dentro do dividendo?" Este tipo de ação permite que o aluno seja encorajado a buscar a sua resposta, sem se sentir inibido por não encontrar aquela que o colega encontrou, fazendo, assim, com que ele também se sinta seguro ao buscar suas respostas.

Vejamos este exemplo de divisão:

Vamos dividir os mesmos valores da operação anterior: 1234 dividido por 14. A arrumação espacial ou, no caso o algoritmo, é a mesma. Desse modo, você pode ou não decompor o número (dividendo). Caso o aluno tenha dificuldades, nada impede, entretanto o ideal é que se trabalhe com o valor inteiro, mas por uma facilitação operacional sem problemas.

<table>
<tr><td rowspan="7">1234 | 14
-420   30
814   30
-420   20
394   8
-280
114
-112
2</td><td>Primeiro caso: o aluno diz que o divisor cabe 30 vezes dentro do dividendo. Então ele deve multiplicar 30 por 14 e subtrair o valor do dividendo;</td></tr>
<tr><td>Como ele viu que o resultado da subtração, é maior que o divisor, ele continua buscando por tateio;</td></tr>
<tr><td>Agora ele diz que 14 cabe em 30 e dentro de 814; faz a multiplicação e subtrai como anteriormente;</td></tr>
<tr><td>E continua em suas tentativas: como ele viu que 14 vezes 30 é 420, a tendência é de que ele busque um valor menor para o quociente;</td></tr>
<tr><td>Ele pode pensar em 20, o que multiplicado por 14 daria 280. De novo fazemos a subtração;</td></tr>
<tr><td>Para o final, ele pode buscar um valor onde o resultado da subtração seja menor que 14, o que no caso seria 8;</td></tr>
<tr><td>Ao final basta que o aluno some os valores que ele acreditava ser o resultado. Logo, somamos 30 + 30 + 20 + 8 = 88.</td></tr>
</table>

O que pretendemos demonstrar com estes procedimentos é que todo conhecimento pode vir de uma construção, da reflexão, de se envolver em forma a chegar a uma solução. Sempre que entregamos o conhecimento pronto para o aluno, tiramos dele a oportunidade de refletir sobre o que está aprendendo. Colocando, assim, o professor como detentor do saber e ele, um receptáculo de conhecimento, desqualificando-o como alguém que constrói o seu saber.

Não houve qualquer problema em relação ao que se propôs aos procedimentos acima: o que buscamos mostrar ao professor foi que, assim como se podem buscar novas formas de se proceder com as operações matemáticas, o aluno deve e pode buscar maneiras de refletir sobre a própria matemática. Cabe ao professor exercer a função de mediador deste conhecimento.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sabemos que todo professor, assim com qualquer outra pessoa, possui suas afinidades relativas àquilo de que gosta: tem seus gostos no conteúdo disciplinar que leciona. Com os professores do primeiro segmento, por serem professores generalistas e, com isto têm por obrigação ensinar várias disciplinas, não seria diferente. Entretanto, isso não os desobriga a ensinar bem todos os conteúdos.

Este trabalho propõe-se justamente na tentativa de auxiliar tais professores, que muitas vezes não possuem afinidade com a matemática, mas têm como obrigação ensiná-la da melhor forma este conteúdo. Não temos por ambição criar um livro de regras, mas pretendemos fomentar nos professores a ideia de que a matemática, assim como todo e qualquer conhecimento, possui em suas raízes a necessidade. Portanto, parte de uma construção onde as situações são as molas propulsoras que desencadeiam o conhecimento. Desconsiderar tal fato é tentar fazer da matemática algo sem sentido e sem contexto. Embora não seja o professor que ensina matemática nas séries iniciais um especialista, isso não o impede de conhecer a matemática e seus fundamentos básicos.

Se for por prazer que o professor ensina, ele deverá também promover no aluno o prazer de aprender, não ser alguém que venha criar no aluno aversão ou antipatia pela matemática. Procure observar seus alunos em suas conduções da construção do conhecimento matemático, desfrute com eles o prazer da descoberta. Não tenha pressa em querer que o aluno aprenda em um dia o que levou séculos para ser concebido.

Este livro trouxe exemplos de situações, que não são evidentemente únicas, mas a base para que você crie outras tantas situações para que, em suas aulas, tenha um repertório abrangente.

Sempre que tiver dúvida sobre um conteúdo, não se acanhe em perguntar: seja um curioso, ou melhor, seja um pesquisador. Lembre-se de que, quem escreveu o que você está lendo, também é um professor com tantas dúvidas como qualquer outro e que, em seus vários momentos, já quis desistir.

REFERÊNCIAS

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática Da Teoria à Prática***.* Campinas S.P: Papiros, 2014.

DE SOUZA, Emília Isabel Rabelo; MAGINA, Sandra Maria Pinto. A Concepção de Professor do Ensino Fundamental sobre Estruturas Multiplicativas. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 10, n. 24, 2017.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, v. 3, n. 1, 1995.

GOLBERT, Clarissa Seligman. **Novos rumos na aprendizagem da matemática.** Porto Alegre: Mediação, 2009.

KAMII, Constance. **A Criança e o Número.** Campinas S.P: PAPIROS, 2002.

KAMII, Constance. **Desvendando a Aritimética***: Aplicações da Teoria de Piaget.* Campinas S.P: Papiros, 2001.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática***.* Campinas, SP: Autores Associados, 2010.

MAGINA, Sandra; SANTOS, A.; MERLINI, V. A estrutura Multiplicativa sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais: uma visão do ponto de vista da aprendizagem. **3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.** Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, v. 1, p. 1-12, 2012.

MALDANER, Anastácia. **Educação Matemática:** Fundamentos teórico-prático para professores dos anos iniciais*.* Porto Alegre: Editora Mediação, 2012.

MOREIRA, Marco Antônio. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em ensino de ciências.** Porto Alegre. Vol. 7, n. 1 (jan./mar. 2002), p. 7-29, 2002.

SERRAZINA, Lurdes. **A formação para o ensino de Matemática:** Perspectivas futuras. 2002.

THIOLLENT, M. **Metodologia da Pesquisa-ação**. 18. ed. São Paulo. Cortez, 2011

VERGNAUD, Gérard. **A criança, a matemática e a realidade***.* Curitiba: Editora UFPR, 2014.

VERGNAUD, Gérard. **A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos**. Revista do GEEMPA, Porto Alegre, Nº 4: 9 – 19. 1996.

VERGNAUD, Gérard. **Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas**. **Análise psicológica**, v. 5, p. 75-90, 1986.

VERGNAUD, Gérard**. The theory of conceptual fields**. **Human development**, v. 52, n. 2, p. 83-94, 2009.

VERGNAUD, Gérard. **A teoria dos campos conceituais. Desenvolvimento humano**, v. 52, n. 2, p. 83-94, 2009. Tradução Pessoal.