Análise Combinatória

Desenvolvida com Aspectos Históricos

Antonio Carlos Bastos
Eline das Flores Victer
Jurema Rosa Lopes

LIVRE EXPRESSÃO
EDITORA

Neste livro, os autores abordam um dos temas mais relevantes e notórios da matemática: a análise combinatória. Realizam o casamento da história com a resolução de problemas para a construção de conteúdos pertinentes à análise combinatória. O livro está dividido em quatro capítulos: o primeiro aborda a contagem na história das civilizações, levando o leitor a refletir que nem sempre é fácil contar, por isso são necessárias técnicas de contagem; o segundo destaca fatos e feitos das antigas civilizações que hoje em dia seriam colocados no campo de análise combinatória e, em seguida, com esses acontecimentos e também com situações do cotidiano, apresentam os princípios de adição e multiplicação; no terceiro é destacado o grande desenvolvimento que teve a combinatória no séc. XVII e os modos de calcular o número de arranjos e combinações; no último capítulo apresentam alguma das modernas e poderosas técnicas de contagem e o início da teoria dos grafos.

ISBN 978-85-7984-960-2

9 788579 849602

BASTOS, Antônio Carlos; VICTER, Eline das Flores; LOPES, Jurema Rosa

Análise combinatória/Desenvolvida em Aspectos Históricos –
Antônio Carlos Bastos; Eline das Flores Voicter; Jurema Rosa Lopes.
1 ed. São Paulo: Rio de Janeiro: Livre Expressão, 2016
136 p. ; 21 cm (broch)
ISBN 978-85-7984-960-2

CDD 510
DCU 51

Índice para Catálogo Sistemático
1.Matemática 2. Análise Combinatória – História I. Título

ISBN: 978-85-7984-960-2

Este trabalho foi produzido no âmbito do Programa de Pós-graduação em Ensino das Ciências, no Curso de Mestrado Profissional em Ensino das Ciências na Educação Básica e foi avaliado pela **Banca examinadora:**

Profa. Giselie Faur de Castro Catarino
Universidade do Estado do Rio de Janeiro(UERJ)
Universidade do Grande Rio (UNIGRANRIO)

Prof. Dr. Wallace Vallory Nunes
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia (IFRJ)

Profa. Dra. Lucia Maria Aversa Villela
Universidade Severino Sombra (USS)

Duque de Caxias
2016

Este trabalho é parte da dissertação de mestrado profissional intitulada "Resolução de Problemas: uma discussão sobre o ensino de análise combinatória" desenvolvida no programa de pós-graduação em ensino das ciências da Universidade do Grande Rio, no Curso de Mestrado profissional em Ensino das Ciências na Educação Básica.

Realização e Apoio:

PPGEC
Programa de Pós-graduação em
Ensino de Ciências na Educação Básica
UNIGRANRIO

UNIVERSIDADE
UNIGRANRIO

Análise Combinatória

Desenvolvida com Aspectos Históricos

ANTONIO CARLOS BASTOS
ELINE DAS FLORES VICTER
JUREMA ROSA LOPES

Análise Combinatória

Desenvolvida com Aspectos Históricos

1ª Edição

Livre Expressão Editora
São Paulo/Rio de Janeiro
2016

Referências aos autores

ANTONIO CARLOS BASTOS

Licenciado em Ciências com Habilitação em Matemática pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – UFRRJ.

Pós-Graduação em Especialização em Matemática pela Universidade Federal Fluminense – UFF – Niterói – RJ.

Mestrando em Ensino das Ciências na Educação Básica da Universidade do Grande Rio – UNIGRANRIO – Duque de Caxias – RJ.

Professor de Matemática do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia –IFRJ - Campus de Nilópolis – RJ.

ELINE DAS FLORES VICTER

Doutora em Matemática Aplicada em Modelagem Computacional pela Universidade Estadual do Rio de Janeiro – UERJ.

Docente do Programa de Pós Graduação em Ensino das Ciências na Educação Básica da UNIGRANRIO.

JUREMA ROSA LOPES

Pedagoga com Doutorado em Educação pela Universidade do Estado de Campinas – UNICAMP.

Docente do Programa de Pós Graduação em Ensino das Ciências na Educação Básica da UNIGRANRIO.

Apresentação

A fim de dar centralidade ao ensino da análise combinatória a partir dos aspectos históricos e através de resolução de problemas, nasce este livro dedicado aos alunos do ensino médio**.** Todo embasamento teórico-prático tomou por base a seguinte dissertação de mestrado: “O Ensino da Análise Combinatória a Partir de uma Abordagem Histórica e Resolução de Problemas”, Bastos (2015).

Buscamos elencar como objetivo principal apresentar o ensino e a aprendizagem da análise combinatória de forma motivadora, relacionando a história com problemas interessantes que enfatizam situações do cotidiano em forma de exercícios resolvidos e exercícios propostos.

O levantamento bibliográfico da história da análise combinatória foi embasado em Boyer(1974), Eves (2004), Ifrah (2005), entre outros, e, ainda, textos de autores de procedências variadas, publicados em revistas especializadas que colaboraram nesse feito.

O livro apresenta, ainda, as características que se seguem:

(1) Situações históricas que favorecem trabalhos interdisciplinares, permitindo a aproximação de outras disciplinas com as atividades matemáticas;

(2) Um pouco da história da análise combinatória em cada capítulo;

(3) Uma quantidade variada de problemas combinatórios resolvidos e a serem resolvidos;

Este livro de fácil leitura encontra-se à disposição dos leitores. Trata-se de um material com aplicações no mundo real com o rigor matemático necessário. Além disso, reafirma a matemática como criação humana, visando à melhoria no ensino e na aprendizagem da análise combinatória de forma menos árida e mais prazerosa.

Os autores

Sumário

Capítulo 1: A contagem na história das civilizações

Neste capítulo abordamos o modo de vida do homem primitivo, suas necessidades, atividades e como se desenvolveu a contagem. Fizemos uma associação da contagem com a Análise Combinatória, apresentamos uma visão geral da Análise Combinatória e para completar demos alguns exemplos do seu campo de aplicações.

O homem da idade das pedras ou primitivo

O homem da idade das pedras (ou primitivo, ou ainda das cavernas) em algum momento de sua história não sabia contar porque não tinha esta necessidade. Podemos considerar essa afirmação analisando o modo de vida do homem primitivo. Ele era nômade, por exemplo. Andava em pequenos grupos, abrigava-se em savanas ou cavernas, alimentava-se da caça e da coleta de alimentos, não comerciava, isto é, não comprava, não vendia, logo não precisava de dinheiro, não plantava, não criava animais e nem fazia sua casa. Pelo modo de vida do homem dessa época, verifica-se que nada o obrigava ou fazia com que sentisse a necessidade de contar, portanto esta prática não fazia parte do seu cotidiano. A etnografia, um ramo especial da antropologia, analisa alguns grupos humanos que existem ainda hoje, e que vivem de forma análoga ao homem primitivo. Esses grupos humanos referidos são os indígenas, encontrados no Brasil, na África, na Austrália ou em outras regiões dispersas do planeta. Já foi verificado que existem indígenas que não sabem que dois e dois são quatro.

Embora o homem da idade das pedras, em algum momento de sua história, não soubesse contar, ele tinha a capacidade de distinguir pequenas quantidades, porém essa não é uma característica somente do ser humano. Alguns animais, como, o corvo, o cachorro, a tartaruga, entre muitos outros apresentam essa percepção que em matemática é denominada de “sentido numérico” ou “sensação numérica”.

Como o homem aprendeu a contar?

Os pequenos grupos de nômades pouco a pouco se tornavam cada vez maiores e acabaram formando as pequenas aldeias e, bem depois, ainda de maneira gradativa, surgiram as cidades e assim foi até a formação das grandes civilizações do passado.

O que fez o homem se tornar sedentário, com habitação fixa, foram a agricultura e a criação de animais. Com a agricultura houve a necessidade de contar os dias para a colheita de alimentos. Por outro lado, o pastoreio surgiu com a retenção de animais selvagens para reserva de alimentos, e por consequência muitos desses animais foram domesticados pelo homem. Os grupos sociais assim surgidos por razões práticas e utilitárias, provavelmente sentiam a necessidade da contagem.

Uma das primeiras formas de contagem possível ocorreu com um pastor cuidando de um grupo de ovelhas. Todos os dias pela manhã, ele as levava para o pasto de modo que cada ovelha do rebanho estava associada a uma pedrinha (ou pauzinho, concha, etc.), correspondência um a um, ou também chamada de correspondência biunívoca ou modernamente uma bijeção. No final do dia, quando voltava com o rebanho, novamente fazia a associação de cada pedrinha a uma ovelha. Isso era feito para ter certeza se algum animal ficara no pasto ou se a criação aumentara com o nascimento de mais animais, ou ainda se outro animal juntara-se ao seu rebanho. A correspondência biunívoca (bijeção) foi de suma importância para juntar pedrinhas e saber a quantidade de ovelhas. Desde milênios, a espécie humana utiliza-se da bijeção para a contagem, antes mesmo de ter a noção de número abstrato.

Números concretos e abstratos

Alguns autores fazem a distinção de números concretos e abstratos. Outros pensam ser um absurdo essa distinção. Para eles, só existem números abstratos e, por outro lado, existem pessoas que creem somente em números concretos. A classificação como número concreto é atribuída àquele número que vem seguido de uma unidade. Por exemplo, oito laranjas, sete mulheres. Já o número abstrato é o número não seguido de unidades, como dez, duzentos e três, dois milhões.

Voltemos, portanto, a nossa contagem por meio de pedrinhas. Para sermos mais coerentes com a história, não só as pedrinhas eram usadas, mas também marcas em ossos, pedras, madeiras, nós em corda, por meio de fichas, parte do corpo humano, por exemplo, as falanges dos dedos, os dedos da mão e dos pés, uma das mãos (referindo-se a 5), duas mãos (referindo-se a 10), etc.

Qual era a vantagem de calcular por meio de pedrinhas?

Quando você associa pedrinhas (ou marca em ossos, parte do corpo, etc.), a um conjunto de animais, fica muito mais fácil juntar as pedrinhas perto de você e também de manuseá-las, de modo que esse conjunto serve de referência.

Quando o homem tornou-se sedentário, trabalhando na agricultura, na criação de animais, construção de moradia, armazenamento de alimentos, com o comércio rústico, na base do troca-troca e com o sentimento de propriedade, a necessidade da contagem foi, aos poucos, materializando-se como uma nova realidade.

Quando o homem aprendeu a contar?

Existem evidências arqueológicas de que o homem sabe contar há, pelo menos, 50 000 anos. Todavia, não há a possibilidade de fixar um período da história primitiva em que foram criados os números cardinais. Documentos antigo provam a presença do conceito sendo comum nas antigas civilizações, tais como: China, Mesopotâmia, Índia e Egito. O fato é que todas essas civilizações desejavam responder à pergunta “quantos?”. Antes de qualquer registro histórico na forma escrita, o conceito de número já existia, porém a maneira como ocorreu é amplamente conjectural.

Nos dias de hoje, contar é entendido como uma faculdade humana. Somente o homem possui essa capacidade e é considerado um fenômeno complexo, ligado ao desenvolvimento da inteligência.

Percebemos que, com o passar do tempo, a necessidade de contar objetos de um conjunto foi surgindo, provavelmente por razões práticas e utilitárias. A princípio, contar parece ser uma tarefa bem simples e de fato é, quando os elementos do conjunto considerado são poucos. Porém, quando estes elementos são muitos e é preciso contá-los sob certas condições, teremos que ter técnicas de contagem mais sofisticadas, ou seja, análise combinatória. Ressaltamos ainda que, muitos problemas de análise combinatória requerem plena compreensão do enunciado e uma dose alta de criatividade para sua resolução.

A primeira técnica matemática aprendida é "contar" (enumerar os elementos de um conjunto e obter o número de seus elementos). Além disso, podemos dizer que a origem das operações aritméticas está ligada a problemas de contagem.

Sabemos que a escrita veio depois da contagem, mas para a ocorrência da escrita, também houve a necessidade de criar um conjunto de símbolos e regras, para o surgimento de palavras com sentido. Esse fato, combinações de símbolos com regras, exigiu uma boa dose de análise combinatória.

O que é análise combinatória?

A análise combinatória, ou simplesmente combinatória, tem como objetivo principal estabelecer métodos de contagem, ou mais especificamente, a análise combinatória tem como função desenvolver métodos que possibilitam contar os elementos de um conjunto finito, de modo que esses elementos são agrupamentos formados que satisfazem certas condições.

Tudo o que foi exposto no parágrafo acima está de acordo com a combinatória estudada no ensino médio, onde nós desenvolvemos este trabalho. Essas considerações se referem a problemas de contagem, que ocorrem com muita frequência na combinatória. Todavia, numa visão mais detalhada de análise combinatória, podemos dizer que além dos problemas de contagem, temos os problemas de existência, que ocorrem também largamente, que visam provar a existência de agrupamentos de elementos de um conjunto finito, sob certas condições, como os princípios de Dirichlet e de inclusão e exclusão. Os agrupamentos referidos podem ser formados por objetos, símbolos, acontecimentos ou pessoas.

Os métodos da combinatória são atualmente aplicados a diversos campos do saber humano: no cálculo de probabilidades, em estatística, em problemas de transportes, de confecções de planos de produção, da teoria da informação e muitos outros campos. Em matemática pura, esses métodos também são utilizados no estudo dos fundamentos da geometria, nas álgebras não associativas e em vários outros assuntos.

Caso o leitor não faça tanta fé na necessidade de estudarmos técnicas de contagem, apresentamos alguns exemplos simples de problemas de combinatória.

Você sabe contar?

A princípio parece ser simples e fácil. Portanto, convidamos o leitor a resolver os seguintes problemas:

1) Em uma empresa cada funcionário tem uma senha para sua entrada, formada por uma letra do alfabeto (Considere o alfabeto com 26 letras), seguida de três algarismos. Com esse sistema, quantos funcionários, no máximo, a empresa tem?

2) Na pastelaria do Onésimo vende pastéis com opções de recheio de carne, queijo, camarão ou banana, não sendo dada a opção de mistura de recheios. De quantas formas uma pessoa pode comprar 7 pastéis?

3) A Caixa Econômica Federal administra as Loterias Federais. Entre elas, a Mega-Sena, que distribui prêmios milionários. Um jogador para fazer uma aposta mínima, tem que escolher 6 números entre 60 (01 até 60), disponíveis no bilhete de aposta, não sendo permitido a repetição de números. De quantas maneiras distintas, fazendo uma aposta mínima, uma pessoa pode jogar na Mega-Sena?

Se o leitor não resolveu os problemas, tem solução. Vá para o próximo capítulo e continue estudando, pois nossa finalidade aqui foi deixar claro o quanto precisamos de técnicas de contagem para resolvê-los.

Bom trabalho!

Capítulo 2: Contribuições das antigas civilizações para a análise combinatória

Apresentamos aqui diversos fatos e feitos das antigas civilizações que estão relacionados ao que hoje chamamos de análise combinatória. A partir daí, pronunciaremos os princípios de adição e multiplicativo, que são fundamentais para a resolução de um grande número de problemas de contagem. Serão abordados os dois tipos de agrupamentos fundamentais da análise combinatória que são os arranjos e as combinações.

.

Os egípcios

A civilização egípcia antiga era centrada no rio Nilo e, portanto apresentava um isolamento natural, ou seja, não estava aberta a invasores. Outra característica relevante é que era governada pelos Faraós, homens ricos e poderosos, amigos dos sacerdotes. Por outro lado, existia uma outra classe bem mais numerosa, que fazia o trabalho braçal, a classe dos escravos.

Devido ao clima seco, muitos documentos (os chamados papiros) foram conservados. Entre eles encontram-se os principais e mais antigos que dizem respeito à matemática. São os seguintes: o papiro de Rhind ou Ahmes (1650 a.C.), que se encontra no Museu Britânico, e o papiro de Moscou ou Golems (1850 a.C.), que está no Museu de Belas Arte de Moscou.

O fato de os egípcios dedicarem certos cuidados aos mortos, o que os levou a construção de tumbas e templos. Diversas e importantes informações de matemática marcadas foram encontradas nas paredes dessas construções. As famosas pirâmides do Egito foram construídas como túmulos reais. Não há dúvidas de que os egípcios atingiram um alto grau de desenvolvimento, em relação às outras civilizações de sua época. Dominavam uma matemática notável, aplicada às construções e à agrimensura. Mas, contrariando o senso comum, a matemática egípcia não atingiu o nível da matemática da Babilônia.

O problema 79 do papiro de Rhind

No problema 79 do papiro de Rhind, encontramos um dos mais antigos documento sobre análise combinatória.

Para termos uma noção de como os egípcios contribuíram para a combinatória, vamos resolver o problema 79 do papiro. Considere no documento referido os seguintes dados:

Bens	
Casas	7
Gatos	49
Ratos	343
Espigas de trigo	2401
Hecates de grãos	16 807
Total	19 607

Ou também podemos escrever os bens, conforme o entendimento magnífico do historiador Moritz Cantor (1907). Assim:

Uma relação de bens consistia em sete casas; cada casa tinha sete gatos; cada gato comeu sete ratos; cada rato comeu sete espigas de trigo; e cada espiga de trigo produzia sete hecates de grãos. Casas, gatos, ratos, espigas de trigo e hecates de grãos, quantos havia disso tudo?

A formulação do problema acima foi uma interpretação do historiador Cantor com um problema da idade média que aparece no Líber Abaci (1202) de Leonardo Fibonacci, escrito a seguir:

Há sete senhoras idosas na estrada de Roma. Cada senhora terá sete mulos; cada mulo transporta sete sacos; cada saco contém sete pães; com cada pão há sete facas; para cada faca há sete bainhas. Entre mulheres, mulos, sacos, pães, facas e bainhas, quantos estão na estrada de Roma?

Sobre a ótica do raciocínio combinatório o problema dos “Bens” sugere a aplicação de dois princípios de grande importância para a resolução de problemas em análise combinatória: o “princípio de adição” e o “princípio multiplicativo”.

Percebemos o princípio básico de contagem, chamado de “princípio de adição”, quando fazemos a união de dois conjuntos disjuntos, e, obtemos um terceiro conjunto cujo número de elementos é igual à soma dos elementos dos conjuntos anteriores. Por exemplo, o conjunto das casas com o conjunto dos gatos é $7 + 49 =$

$=56$. Por outro lado, por exemplo, o número de ratos é $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$, o que retrata o “princípio multiplicativo”.

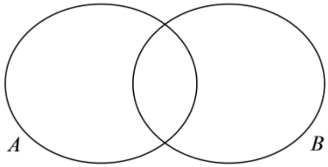
Um pouco mais sobre o papiro de Rhind

O papiro de Rhind (ou Ahmes) data de 1 650 a.C., aproximadamente. É uma fonte primária e rica do Egito antigo que contém informações de matemática, ou melhor, são 85 problemas, muitos dos quais são aplicações da matemática a problemas práticos. Esse papiro foi copiado em escrita hierática pelo Ahmes de um documento mais antigo. O egiptólogo escocês A. Henry Rhind encontrou este papiro no Egito. Tempos depois, o Museu Britânico comprou o documento, porém faltava-lhe uma parte. Em torno de quatro anos, o egiptólogo americano Edwin Smith adquiriu (também no Egito) um papiro com a parte que faltava do papiro Rhind, mas pensou que se tratava de um papiro médico e fez a doação do papiro para a Sociedade Histórica de Nova York. A Sociedade quando percebeu que não se tratava de um documento médico e continha parte do papiro de Rhind, doou a porção de papiro ao Museu Britânico na Inglaterra, completando dessa forma o papiro de Rhind.

Princípio de adição ou aditivo

Se A e B são dois conjuntos finitos com $n(A)$ e $n(B)$ elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ elementos. Denotamos $n(A)$ como sendo números de elementos de A, os demais de forma análoga. A Figura 1 Ilustração do princípio de adição.

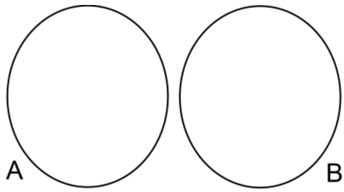
Figura 1: Ilustra um princípio básico de contagem (princípio de adição)



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Caso particular (versão mais simples do princípio aditivo), quando A e B são disjuntos, isto é, $A \cap B = \{\ \}$.

Figura 2: Ilustra o princípio de adição de dois conjuntos disjuntos



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Como resolver um problema?

Caro leitor, leia o problema com atenção. Caso necessário, uma ou mais vezes, até compreendê-lo. Identifique o que ele quer saber, as informações fornecidas e se existe alguma condição a ser obedecida. O próximo passo é fazer uma representação do problema, por exemplo: uma equação, um desenho. Isto é, você está estabelecendo um plano de solução. Nesse plano procure lembrar de algum problema mais simples que já resolveu e que pode ajudá-lo a resolver o problema em questão. Verifique também se o problema pode ser dividido em partes, muitas vezes é a melhor opção. Por último, faça os cálculos e verifique se a solução corresponde corretamente à pergunta do problema.

Exercícios resolvidos

1) No sítio do Arco-íris, onde são vendidas mudas árvores frutíferas, comprei 3 variedades de mudas de laranja e duas de limão. No meu quintal só tenho espaço para plantar uma única muda. De quantas maneiras posso fazer isso?

Resolução

Como posso plantar apenas uma única muda, devo escolher a muda de laranja 1 ou a de laranja 2 ou a de laranja 3 ou a de limão 1 ou a de limão 2. Logo, pelo princípio aditivo, isso pode ser feito de 5 maneiras distintas.

2) Numa universidade circulam dois tipos de jornais: “A Hora da Notícia” e “A Folha da Verdade”. Todo o estudante dessa universidade é leitor de pelo menos um dos jornais. Sabendo que 1800 estudantes leem “A Hora da Notícia”, 1600 leem “A Folha da Verdade” e 700 leem os dois jornais. Quantos estudantes há nessa universidade?

Resolução

Fazendo $n(H)=1800$ representar o número total de leitores do jornal “A Hora da Notícia”, e de modo análogo, $n(V)=1600$ (leitores da “A Folha da Verdade”), e $n(H\cap V)=700$ (leitores dos dois jornais). Teremos pelo princípio de adição:

$$n(H\cup V)=n(H)+n(V)-n(H\cap V)\therefore\ n(H\cup V)=$$

$$=1800+1600-700=2700.$$

Portanto, essa universidade possui 2700 estudantes.

Comentários

1º) O princípio de adição é uma maneira de se contar o número de elementos da união de dois conjuntos.

2º) O princípio de adição pode ser generalizado para contar o número da união de dois ou mais conjuntos. Temos aí “o princípio da inclusão e exclusão”.

Exercícios propostos

1) Num colégio interno de meninos, há duas modalidades de esporte: futebol e natação. Dentre eles 250 praticam futebol, 150 natação e 100 praticam futebol e natação e, não há quem não pratique pelo menos um desses esportes. Quantos alunos praticam um único esporte?

2) Numa pesquisa sobre literatura brasileira constatou-se que 360 pessoas leram A Moreninha, 330 leram Iracema, 340 leram Helena, 200 leram A Moreninha e Iracema, 220 leram A Moreninha e Helena, 210 leram Iracema e Helena, 160 leram as três obras e 50 não leram nenhuma das três obras. Quantas pessoas foram pesquisadas?

Princípio da multiplicação ou multiplicativo (PM)

Se uma ação é composta de duas etapas sucessivas e independentes e a 1º etapa ocorre de m modos e para cada um desses modos a 2º etapa ocorre de n modos, então a ação ocorre de $m \cdot n$ modos.

Podemos generalizar o PM para uma ação composta por mais de duas etapas. O princípio da multiplicação ou multiplicativo (PM) é também conhecido como princípio fundamental da contagem (PFC).

Exercícios resolvidos

1) Uma pequena fábrica de pano de pratos, oferece a seus clientes cinco modelos de estampas em seis cores diferentes. Um cliente que quiser adquirir um pano de prato tem quantas opções?

Resolução

Escolha uma estampa para o pano de prato, temos 5 opções (1ª etapa). Depois disso, para escolher uma cor existem 6 alternativas (2º etapa). A ação é composta por duas etapas, logo, pelo PM, há $5 \cdot 6 = 30$ opções de escolha de pano de pratos.

2) Em uma empresa cada funcionário tem uma senha para sua entrada. A senha é formada por uma letra do alfabeto (considere o alfabeto com 26 letras), seguida de três algarismos. Com esse sistema, quantos funcionários (no máximo) a empresa pode cadastrar?

Resolução

Escolha uma letra para a senha. Existem 26 opções (1ª etapa), escolha do 1º. algarismo para a senha, temos 10 opções (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9)

(2ª etapa), escolha o 2º algarismo, temos 10 opções (podemos escolher qualquer um dos algarismos anteriores) (3ª etapa) e escolha o último algarismo. Também há 10 opções (4ª etapa). Portanto, a ação é composta por 4 etapas, de acordo com o PM. Sendo assim, há no máximo $26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26000$ funcionários.

3) Quantos números de prefixos de telefone especiais de três ou quatro algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1,2,3,4,5 e 6?

Resolução

Seja A o conjunto de prefixos de três algarismos. Vamos obter $n(A)$.

Escolha do 1º algarismo (1ª etapa), temos 6 possibilidades, escolha do 2º algarismo (2º etapa), temos 5 possibilidades (não podemos repetir o algarismo escolhido anteriormente) e a escolha do 3º algarismo (3ª etapa), temos 4 possibilidades (não repetimos os algarismos escolhidos anteriormente). Pelo PM, vem: $n(A) = 6.5.4 = 120$

Podemos encontrar $n(A)$, através do esquema a seguir.

Possibilidades:

1º algarismo	2º algarismo	3º algarismo
6	5	4

Pelo, PM, vem: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

Seja A o conjunto de prefixos de quatro algarismos. Vamos obter $n(B)$.

Esquema

Possibilidades:

1º algarismo	2º algarismo	3º algarismo	4º algarismo
6	5	4	3

Pelo, PM, vem: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

O problema deseja saber qual é o número de elementos de A união B, isto é, $n(A \cup B)$. Como A e B são disjuntos, temos:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 120 + 360 = 480$

Logo, podemos formar 480 números de prefixos de telefone.

4) Considere os algarismos 0, 1, 2 e 3, responda:

a) quantos números de três algarismos distintos podemos formar?

b) quantos números, múltiplos de cinco de três algarismos distintos, podemos formar?

c) quantos números de três algarismos, em que o algarismo das centenas é 1 ou o algarismo das unidades é 3, podemos formar?

Resolução

a) O algarismo das centenas deve ser diferente de zero, por exemplo, 032 não é um número de três algarismos. Portanto, para o algarismo das centenas temos 3 possibilidades (1ª etapa), para o algarismo das dezenas temos também 3 possibilidades, pois já escolhemos um algarismo para as centenas (2º etapa) e para o algarismo das unidades temos 2 possibilidades (3ª etapa). Pelo PM, vem: $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$.

b) Para um número ser múltiplo de cinco é necessário que termine em zero ou cinco. Portanto, o número deve terminar em zero, então para o algarismo das unidades temos 1 possibilidade (1ª etapa); devemos começar a resolver um problema aonde aparece ou percebemos uma condição; para o algarismo das centenas temos três possibilidades (2º etapa), para o algarismo das dezenas temos 2 possibilidades. Pelo PM, vem: $1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$.

c) Números de três algarismos em que o algarismo das centenas é 1 (os algarismos não precisam ser distintos, o problema não pede)

Possibilidades:

centenas	dezenas	unidades
1	4	4

Pelo PM, vem: $1 \cdot 4 \cdot 4 = 16$

Números de três algarismos em que o algarismo das unidades é 3.

Possibilidades:

Centenas($\neq 0$)	dezenas	unidades
3	4	1

Pelo PM, vem: $3 \cdot 4 \cdot 1 = 12$

A soma destes dois resultado 28 (16+12), não dará a resposta procurada, pois existem número que foram computados duas vezes, por exemplo 123, 133. Temos que retirá-los.

Números de três algarismos em que o algarismo das centenas é 1 e das unidades 3.

	centenas	dezenas	unidades
Possibilidades:	1	4	1

Pelo PM, vem: $1 \cdot 4 \cdot 1 = 4$

Logo, o número de elementos do conjunto dos números de três algarismos em que o algarismo das centenas é 1 ou das unidades 3 é $28 - 4 = 24$.

5) A Caixa Econômica Federal administra as Loterias Federais. Entre elas a Mega-Sena, que distribui prêmios milionários. Um jogador para fazer uma aposta mínima, tem que escolher 6 números entre 60 (01 até 60), disponíveis no bilhete de aposta, não sendo permitido a repetição de números. De quantas maneiras distintas, fazendo uma aposta mínima, uma pessoa pode jogar na Mega-Sena?

Resolução

Escolha dos números

Possibilidades:

1º	2º	3ª	4º	5º	6º
60	59	58	57	56	55

Pelo, PM, vem: 60.59.58.57.56.55

Todavia, desse total existem apostas computados mais de uma vez, por exemplo, {10,12, 24, 27, 41, 60} e a mesma que {24, 41, 12, 27, 60, 10}. Assim, devemos retirá-las. Pois a ordem dos elementos, não altera o agrupamento.

Com cada agrupamento tem seis elementos, temos as Possibilidades:

1º alg.	2º alg.	3º alg.	4º alg.	5º alg.	6º alg.
6	5	4	3	2	1

Pelo, PM, vem: 6.5.4.3.2.1

Logo, o número de maneiras que podemos jogar na Mega-Sena é $\frac{60.59.58.57.56.55}{6.5.4.3.2.1} = 50063860$.

Comentário

O princípio multiplicativo é um princípio básico para a análise combinatória, no entanto para alguns problemas, sua aplicação direta pode ser trabalhosa. Por isso, mais adiante, estudaremos técnicas para obtermos resultados mais rápidos, em casos particulares estudados.

Exercícios propostos

3) Na lanchonete da escola são vendidos três tipos de refrigerante e 2 tipos de sanduíche. De quantos modos uma pessoa pode fazer um lanche, comprando um refrigerante e um sanduíche?

4) A pensão da tia Cleide oferece:

- 2 tipos de pratos de carne
- 2 tipos de saladas
- 3 variedades de bebidas

De quantos modos uma pessoa pode fazer uma refeição na tia Cleide, escolhendo um prato de carne, uma salada e uma bebida?

5) No código Morse, uma letra é composta pela sucessão de traços e pontos, podendo haver repetições dos símbolos. Determine o número de letras que podem ser representadas com 4 símbolos.

6) Com os algarismos 1, 2, 3 e 5, responda:

a) quantos números de três algarismos podemos formar?

b) quantos números de três algarismos distintos podemos formar?

c) quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar?

d) quantos números múltiplos positivos de cinco e com três algarismos podemos formar?

e) quantos números impares de três algarismos podemos formar?

7) Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados com os dígitos 0, 1, 3 e 4? Quantos desses números são múltiplos de 5?

8) Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com o nosso sistema de numeração?

9) Determine quantos múltiplos positivos de três, de quatro algarismos distintos, podemos formar com os dígitos 2, 3, 4, 6 e 9.

10) Definição: “Palíndromos são números inteiros que não se alteram quando invertida a ordem de seus elementos”.

Exemplos:

454, 3113, 92329

Considere a definição e determine o número de palíndromos de 5 algarismos.

11) Um rei tinha um belíssimo palácio com 8 portas de entrada. Determine o número de maneiras de uma pessoa entrar no palácio por uma porta e sair do mesmo por uma porta diferente.

Resolução

Para entrar no palácio existem 8 possibilidades e para sair, desconsiderando a porta por onde entrou, existem 7 possibilidades. De acordo com o PM, vem: $8 \cdot 7 = 56$.

Logo, o número de maneiras de entrar no palácio por uma porta e sair por outra é 56 vezes.

12) Um hospital tem 6 portas de entrada. Determine o número de modos distintos que essas portas podem ser abertas.

13) Uma moeda é lançada 3 vezes seguidas. Qual o número de sequências possíveis?

14) De quantas formas podemos responder a um questionário de 8 questões com 5 alternativas diferente para cada questão?

15) Quantos subconjuntos de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ podemos formar?

Resolução

Seja S um subconjunto qualquer de A.

O elemento $1 \in$ ou $\notin S$ (1ª etapa), temos: 2 possibilidades;
o elemento $2 \in$ ou $\notin S$ (2ª etapa), temos: 2 possibilidades;
o elemento $3 \in$ ou $\notin S$ (3ª etapa), temos: 2 possibilidades;
o elemento $4 \in$ ou $\notin S$ (4ª etapa), temos: 2 possibilidades

A ação é formada por 4 etapas, assim, pelo PM, vem:

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

Logo, podemos formar 16 subconjuntos.

Comentário

O conjunto vazio $\{\ \}$ e também o próprio conjunto A, estão incluídos nesses 16 subconjuntos.

16) Determine o número de subconjuntos de $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

17) As placas de automóveis possuem 3 letras seguidas de 4 algarismos. Quantas placas podem ser formadas, considerando o alfabeto com 26 letras?

18) Sejam os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, determine todos os números naturais de quatro algarismos distintos que podemos formar, obedecendo as condições:

a) o algarismo das unidades é par ou o algarismo dos milhares é ímpar.

b) são múltiplos positivos de 2 ou de 3.

19) Considere os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, responda:

a) em quantos números de três algarismos distintos aparece o 1?

b) em quantos números de três algarismos distintos não aparece o 5?

c) em quantos números de três algarismos distintos aparece o 1 e não aparece

o 5?

20) Com a reforma do quarto da Aninha, a parede de frente para a porta ficará com cinco faixas, cada faixa será pintada com uma cor, não havendo duas faixas sucessivas de mesma cor. Dispõe-se de 4 cores para pintar a parede. De quantas formas isto pode ser feito?

21) Quantos números de cinco algarismos distintos, menores de 30000, podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

22) Um coordenador de equipe de vendas, deseja formar grupos de 3 pessoas com seus 12 funcionários. Quantos grupos podem ser formados?

23) Na estamparia do senhor Haroldo, chegou um pedido para numerar 1000 camisetas de 1 até 1000. Para isso é necessário comprar uma certa quantidade de figuras dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. As figuras dos algarismos comprados serão estampadas nas camisetas. Para que não haja sobra de material, determine:

a) quantas figuras do algarismo zero têm que ser compradas?

b) quantas figuras do algarismo 1 têm que ser compradas?

c) quantas figuras do algarismo 2 têm que ser compradas?

d) quantas figuras do algarismo 3 têm que ser compradas?

e) quantas figuras do algarismo 4 têm que ser compradas?

f) quantas figuras do algarismo 5 têm que ser compradas?

g) quantas figuras do algarismo 6 têm que ser compradas?

h) quantas figuras do algarismo 7 têm que ser compradas?

i) quantas figuras do algarismo 8 têm que ser compradas?

j) quantas figuras do algarismo 9 têm que ser compradas?

Os gregos

Os grandes rios foram de fundamental importância para a maioria das grandes civilizações do passado, pois eram fontes de água, de alimentos, transporte, enfim, fonte de vida. O rio Nilo foi de suma importância para os egípcios, assim como os rios Tigre e Eufrates para os mesopotâmicos, o rio Indo para os hindus e de modo análogo assim aconteceu para outras civilizações. Porém, os gregos não se estabeleceram às margens de nenhum grande rio e sim numa região montanhosa, com pequenas ilhas, com uma costa considerada a maior em extensão do planeta em relação à superfície. A agricultura era de caráter familiar, em pequenas propriedades e os cultivos que se destacavam eram uvas e azeitonas. Mantinham um comércio desenvolvido e um sistema de transporte de navegação avançado. A Grécia foi a cultura que mais influenciou a nossa civilização ocidental

Aqui o que mais nos interessa são os problemas ou atividades que podemos associar à análise combinatória.

Euclides de Alexandria

Quase nada se sabe sobre a vida de Euclides, mas costuma-se dizer que foi morar em Alexandria, capital do Egito, quando o Egito estava sob o domínio grego, há aproximadamente 300 a.C. A história conta que em Alexandria ele liderou um grupo de pesquisa em Matemática e escreveu uma obra conhecida como "Elementos de Euclides" ou simplesmente "Elementos", formada por treze livros, contendo geometria plana e espacial, teoria dos números e Álgebra elementar. A obra "Elementos" superou todos os trabalhos que tinham sido publicados até então. Para se ter uma ideia da importância dessa obra, nenhuma outra, foi tão estudada e editada, a exceção só é feita no caso da bíblia. Qualquer estudante do segundo seguimento do ensino fundamental já estudou, pelo menos, uma parte desse trabalho, por exemplo, quando deve contato com a geometria no plano. Não há dúvida que Euclides teve a influência de Tales de Mileto (640-548 a.C.) e de Pitágoras de Samos (582-497 a.C.), quando escreveu os “Elementos”.

A proposição II do livro II de Euclides

No livro II, de Euclides, encontramos quatorze proposições e a proposição II estabelece a identidade $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. O 2º lado da identidade, isto é, o desenvolvimento do binômio, os coeficientes têm significado para a análise combinatória. Esse fato retrata a ocorrência de um dos primeiros problemas associado à análise combinatória. A obra de Euclides foi a que mais influenciou no pensamento científico.

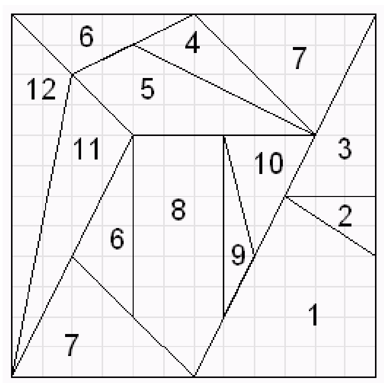
Arquimedes de Siracusa

Arquimedes, o maior matemático da antiguidade, está entre os três maiores matemáticos de todos os tempos, junto com Newton e Gauss. Nasceu na cidade grega de Siracusa (ilha da Sicília) em torno de 287 a.C. e morreu em 212 a.C. Suas contribuições não se restringe somente à matemática, mas contribuiu para as ciências como um todo.

O Stomachion

Em documentos publicados por Arquimedes, que chegaram até nós, encontramos o Stomachion (o significado da palavra em grego é o mesma para estômago), que a princípio parecia somente um jogo de quebra-cabeça, de catorze peças planas (originalmente em marfim) que formavam um quadrado, depois de encaixadas, semelhante a um tangram. Essas quatorze figuras (Figura 3) constituem o Stomachion.

Figura 3: O Stomachion



Fonte: <htt://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/probegio/gamemath/Stomachion Stomachion.htm>. Acesso 17/11/2014.

O historiador de matemática, Reviel Netz, vinculado à Universidade de Stanford, Califórnia, interpretou o Stomachion como um objeto elaborado por Arquimedes com fins combinatórios. De acordo com Netz, a intenção de Arquimedes era saber de quantas formas diferentes poderiam ser encaixadas as catorze peças para a formação de um quadrado. A solução desse problema dá 17152 modos ou, não. Considerando as soluções obtidas por reflexões, rotações e simetria, 268. Este número só foi encontrado em 2003, com o uso da informática, por matemáticos e estatísticos, mas ninguém sabe se Arquimedes conseguiu esse resultado. O que nos parece é que ele se dedicou por muito tempo na análise do Stomachion. A importância do fato é que ele revela um dos documentos mais antigos a respeito do raciocínio combinatório.

Os chineses

As civilizações da China são, provavelmente, mais antigas do que as do Egito e Mesopotâmia. Seu desenvolvimento se deu às margens dos rios Yang-Tze e Howang Ho (ou Amarelo). A criação de animais não se desenvolveu tanto quanto a sua agricultura e era governada pelos imperadores fundadores de dinastias.

A matemática dessa época era bem desenvolvida, mas existe pouco material de natureza primária que veio até nós. Esse fato foi devido a qualidade dos matérias que usavam para escrever, como fibra de entre casca de árvores e bambus.

Os hindus também usavam esses materiais para suas escritas, que são bastante perecíveis e, além disso, em 213 a.C., o então imperador chinês, mandou queimar todos os livros. Mais tarde muitos livros foram reconstruídos de memória, pelos escribas reais, que tinham a função de registrarem fatos e feitos.

Diferente dos chineses e hindus, os mesopotâmicos e os egípcios escreviam seus feitos em materiais não perecíveis. Os mesopotâmicos registravam seus feitos em tábuas de argila cozida. Já os egípcios escreveram seus documentos em pedras ou papiros (uma espécie de papel).

Existe uma tradição que considera o início do império chinês em 2750 a.C., aproximadamente; por outro lado, outros avaliadores afirmam que as civilizações primitivas da China surgiram por volta do ano 1000 a.C. Além disso, existe uma dificuldade de datar os documentos matemáticos da antiguidade da China, devido ao fato de que cada obra construída envolver vários autores e em períodos distintos. As obras mais antigas de matemática na China nos trazem informações que podemos associar ao que chamamos hoje de análise combinatória.

Encontramos as seguintes informações sobre a China antiga:

- A criação de dois sistemas de numeração.

- Os mais antigos exemplo de quadrados mágicos.
- Cálculos de raízes quadradas e cúbicas.
- A mais antiga apresentação preservada do chamado triângulo aritmético de Pascal e a possibilidade do teorema do binômio já ser conhecido pelos chineses a bastante tempo.

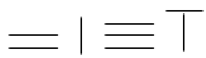
Sistemas de numeração

Os chineses já apresentavam dois sistema de numeração, desde os tempos primitivos. O científico, também conhecido como sistema de numerais em barras que é essencialmente posicional e de base 10, que teve um caráter importante para a matemática chinesa antiga. Foi o sistema de numeração mais avançado do mundo do passado. Esse sistema é fundamentalmente posicional e de base dez, como mostra a Figura 4. No sistema de numerais em barras, aparecem as representações dos algarismos de 1 a 9. Respectivamente, quando figuram em posições ímpares, isto é, unidades simples, centenas, dezenas de milhar e assim por diante. Por outro lado, na Figura 5, aparecem as representações dos nove primeiros algarismos de 1 a 9, respectivamente, quando os algarismos aparecem em posições pares, isto é, dezenas, milhares, centenas de milhar e assim por diante. No lugar de zero era um espaço vazio, porém a partir da dinastia de Sung (960 – 1126), um círculo começou a ser usado como zero.

Figura 4: Dígitos de 1 a 9 quando aparecem em posições ímpares

Figura 5: Dígitos de 1 a 9 quando aparecem em posições pares

Figura 6: Representação do número 2136 em numeais em barras



No outro sistema de numeração, que poderíamos chamá-lo de sistema de agrupamentos multiplicativo, predominava o princípio multiplicativo. Esse sistema é caracterizado com símbolos distintos para os algarismos de um a nove e símbolos aditivos para as potências de dez. De forma que nas escritas os algarismos em posições ímpares, considerando-os da esquerda para à direita ou de baixo para cima, são multiplicados pelo sucessor.

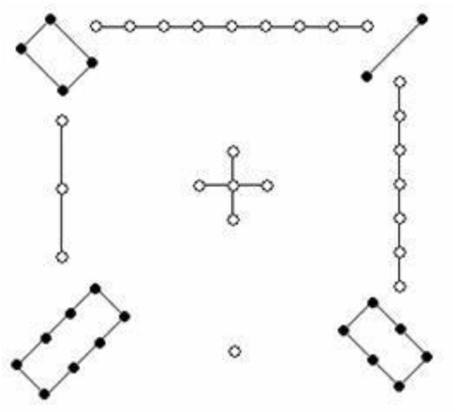
Para representar o número 87 532, nesse sistema escreve-se o símbolo de 10 000 antecedendo o algarismo para 8, em seguida o de 1 000 antecedendo o algarismo 7, o de 100 antecedendo o algarismo para 5, o de 10 antecedendo de 3 e, finalmente, o algarismo para 2. Destacamos que os múltiplos de 10, 100, 1 000 e 10 000 são figurados de acordo com o princípio multiplicativo. Assim, podemos dizer que o princípio multiplicativo era conhecido na China antiga; há quase 3 mil anos. Afirmar a data precisa não possível, ou seja, é conjectural, pois como já foi citado, datar os documentos da China desse tempo é complicado.

Os Chineses realizavam as operações aritméticas básica em tábuas de contar, ou melhor, os chamados suan pan, que nós conhecemos popularmente como ábaco chinês. O ábaco chinês era formado por contas móveis ao logo de varas ou arames paralelos e estabelecidos em tabuleiro.

Quadrados mágicos

Os quadrados mágicos mais antigos surgiram, provavelmente, na China. Qualquer abordagem matemática chinesa antiga não deixa de mencionar o quadrado mágico, chamado de Lo Shu. O I-King ou Livro das Permutações (1182-1135 a.C.) é um dos clássicos da matemática chinesa, nele aparece o exemplo mais antigo de quadrado mágico, como mostra a Figura 7. Conta a lenda que o imperador Yu, por volta de 2200 a. C., foi quem o viu, desenhado por meio de nós em cordas, nós pretos para números pares e nós brancos para os ímpares, na carapaça de uma tartaruga divina, às margens do rio Amarelo.

Figura 7: Quadrado mágico denominado de Lo Shu



Fonte: <mat.ufg.br.>mini>miriam.rosa.pdf>. Acesso 04/09/2015.

A representação do Lo Shu (quadrado mágico), a princípio, estava associada às nove salas do palácio Mítico de Ming Thang.

Veja outra representação simplificada para o quadrado mágico, na Figura 8, de ordem 3, numa notação numeral moderna.

Figura 8: Quadrado mágico 3×3

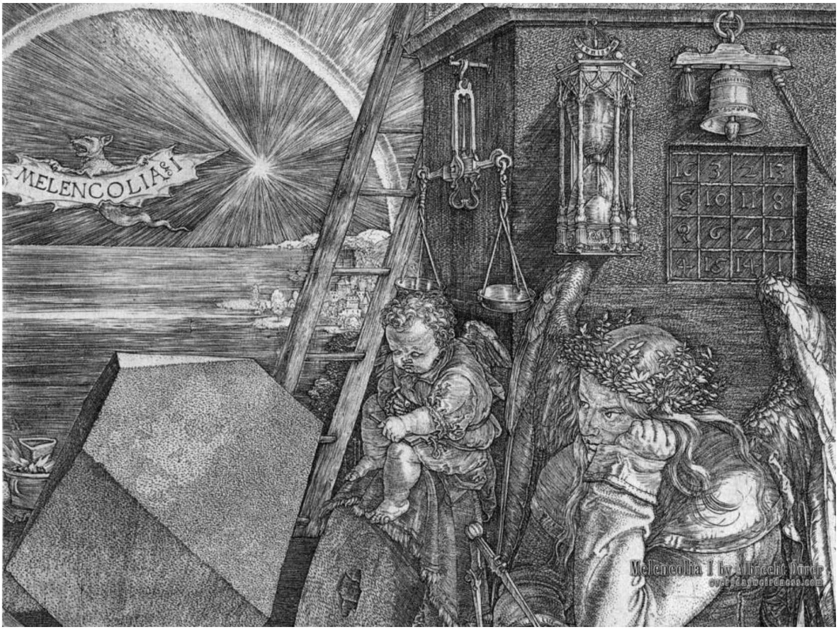
4	9	2
3	5	7
8	1	6

A Figura 8 é um arranjo quadrado de numerais, com 9 inteiros distintos, colocados de modo que os números de uma linha qualquer, de uma coluna qualquer ou de uma das diagonais possuem o mesmo valor, ou seja, a mesma soma ou constante mágica do quadrado, no caso a constante mágica do quadrado é 15. Quando fixamos condições para contagem dos arranjos, estamos considerando situações que estudamos em análise combinatória.

Os quadrados mágicos não ficaram limitados à China. Chegaram ao Japão, Oriente Médio, Índia. No séc. IX apareceu na Arábia, Índia séc. XI, ou antes, para os hebreus séc. XII, na Europa séc. XV, graças ao escritor bizantino Manuel Moschopoulos. Em muitas situações, os quadrados mágicos, ou arranjos quadrados de numerais, estavam associadas ao misticismo e em outras como passatempo. No séc. XIII, já eram conhecidas regras para as construções de quadrados mágicos de ordem ímpar. Em 1686, o estudo desses quadrados se estendeu para três dimensões. A partir do séc. XIX, surgiram aplicações desses quadrados em probabilidades e análise e, recentemente, aplicações no planejamento de experimento, com os quadrados greco-romanos.

Na Figura 9, aparece uma gravura de 1500, aproximadamente, e ao lado direito, na parte superior, um quadrado mágico.

Figura 9: A Melancolia de Albrecht Düer



Fonte: <htt://zelmar.blogspot.com.br/2011/08/e-uma-tristeza.html> . Acesso 17/11/2014

Cálculos de raízes quadradas e cúbicas

Num comentário do primeiro século ao “Chi-Chang Suan-Shu” ou ”Nove capítulos sobre a arte matemática” (livro de matemática chinês, talvez o mais influente), podemos encontrar regras para obtenção de raízes quadradas e cúbicas.

Esclarecemos que a matemática da época não tinha a riqueza do simbolismo que temos hoje. Os problemas de matemática eram resolvidos por escritos e por meio de uso de regras, mas é lógico que os escritos matemáticos antigos, não diferem em sua essência ou conteúdo quando nós os abordamos hoje. O que muda é apenas a “roupagem moderna” de abordagem. Convém comentar que a matemática chinesa antiga, não tinha demonstrações no sentido grego.

É interessante saber que a extração de raízes era feita usando a extensão do binômio $(a+b)^n$, onde n é inteiro positivo, o que pode ser feito de muitas maneiras. Já tínhamos comentado que o binômio foi um dos primeiros problemas ligado à análise combinatória, porém suas aplicações não se restringem somente à combinatória.

Vamos ver, como exemplo, a extração da raiz quadrada de 38, por aproximação, fazendo uso da “roupagem moderna”.

Conhecida a identidade $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b(2a+b)$ e tomando-se $(a+b)^2 = 38$, temos que encontrar $a+b$. Daí: $38 = (a+b)^2 = a^2 + b(2a+b)$.

Para obtermos a, temos que encontrar o maior valor inteiro positivo de a , de forma que a^2 não supere 38. Logo, encontramos $a=6$.

O próximo passo é achar b. Fazendo uma sequência de aproximação, começando com $b_0 = 0$, iremos obter, $b_1, b_2, b_3,$ e assim por diante, até onde acharmos conveniente a aproximação.

Em $38 = a^2 + b_1(2a + b_0)$, fazendo $b_0 = 0$, vamos obter b_1.

$$b_1 = \frac{38 - a^2}{2a + b_0} = \frac{38 - 6^2}{2 \cdot 6 + 0} = 0{,}166666 \ ,$$

$$b_2 = \frac{38 - a^2}{2a + b_1} = \frac{38 - 36}{12 + 0{,}166666} = 0{,}164383 \ ,$$

$$b_3 = \frac{2}{12 + 0{,}164383} = 0{,}164414 \ , \ b_4 = \frac{2}{12 + 0{,}164414} = 0{,}164414$$

. Logo, a raiz quadrada de 38 é $6{,}164414 \cdots$

De modo semelhante podemos encontrar raízes cúbicas, quárticas, etc.

A extração de raízes, fazendo uso do binômio $(a+b)^n$ é uma das muitas aplicações dos binômios. Porém, as aplicações do binômio que tenham um significado combinatória que é o nosso maior interesse.

Triângulo aritmético e Teorema do binômio

O triângulo aritmético é uma tabela de números, vindos dos coeficientes do desenvolvimento dos binômios $(a+b)^0$, $(a+b)^1$, $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, $(a+b)^5$ e assim por diante, formando uma tabela numérica triangular, onde os coeficientes são dispostos, sucessivamente de cima para baixo, e ilimitado para baixo ou até a linha que desejarmos. A seguir temos a Figura 10 que representa o triângulo aritmético.

Figura 10: Triângulo aritmético

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

E assim por diante.

O triângulo aritmético recebe vários nomes de acordo com o lugar do mundo. Por exemplo, os franceses ou ocidentais chamam de triângulo de Pascal, na Itália de triângulo de Tartaglia, na China de Yang Hui e, ainda, além desses nomes, outras denominações aparecem como triângulo de Tartaglia-Pascal, triângulo aritmético de Pascal ou triângulo combinatório.

Regras de construção

- Toda linha começa e termina por 1.
- A soma de dois elementos consecutivos de uma linha é igual ao elemento localizado na linha

seguinte, embaixo do segundo número somado (identidade combinatória).

Os coeficientes (ou também conhecidos como coeficientes binomiais) das expressões binomiais formam as linhas do triângulo de Pascal. Além disso, podemos extrair desse triângulo várias identidades, com diversas aplicações, entre elas muitas em matemática.

Um dos livros valioso da China datado entre 1261 e 1275, foi escrito por Yang Hui, que representa uma espécie de extensão dos Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática. Encontramos nele a mais antiga apresentação preservada do chamado triângulo aritmético de Pascal. Outro clássico chinês, escrito por Chu Shi-kié, em torno de 1303, contém uma aparição do triangulo aritmético, posterior a este e aponta a possibilidade do teorema do binômio já ter sido conhecido pelos chineses a um certo tempo. Pois Chu fala, no seu livro, como se o triângulo fosse conhecido bem antes do seu tempo.

Os hindus

Os indianos dos primeiros tempos, entre 3000 e 1500 a.C., habitavam na região do rio Indo, perto das margens do deserto de Thar. A Índia antiga era formada de grande número de pequenos principados desunidos. Pouco se sabe sobre a matemática desses antigos habitantes, devido à falta de documentos da época. Mas através de escavações arqueológicas de algumas de suas cidades, encontramos informações preciosas, principalmente nas cidades de Harapa e Mohenjo Daro. Com base nessas escavações temos provas de que foi uma civilização bem desenvolvida e isso aconteceu na época das construções das pirâmides egípcias. Em Mohenjo Daro foi encontrada redes de esgoto, piscinas públicas, entre outras construções. Já existia por lá, um sistema de contagem, pesos e medidas. Tudo isso revela a garantia de conhecimentos de matemática. Sofreram diversas invasões e foram exterminados, provavelmente pelos Arianos (bandos de nômades) por volta de 1500 a.C. Embora a matemática indiana tenha começado em torno de 3 000 a.C., foi somente através da religião védica (donde vem o hinduísmo), entre 1500 a 600 a.C., que apareceu uma matemática geométrica, voltada para a construções de altares para seus deuses. Foi dessa religião que apareceram a resolução de problemas não triviais. Com o declínio da religião védica, surgiram duas outras protestantes dos sacrifícios cruentos dos rituais da primeira, o budismo e Jainísmo.

Os jainas

Os jainas passavam por longos treinamento e estudavam a **ganitanuyoga,** ou matemática, que fazia parte da vida religiosa que levavam.

A **vikalpa** (ou combinatória) foi um dos temas preferidos de estudo dos jainas. Devido ao fato deles terem uma concepção atomística do mundo físico, davam uma atenção especial à combinatória. O átomo, ou parmanu, era considerado indivisível e atemporal. Possuía cor, cheiro, gosto e textura, de modo que somente essas qualidades podiam ser mudadas. Os seus átomos dispõem de 5 tipos de cor, 2 cheiros distintos, 5 gostos possíveis e 8 tipos de textura.

Problema Combinatório

Quantas são as combinações de 2 que podem ser feitas com 3 sabores (gostos) distintos, doce, salgado e azedo?

Já tínhamos falado acerca de materiais perecíveis usados nas escritas de algumas das antigas civilizações. No caso da Índia, eles escreviam além dos já citados, em folhas de palmeiras, por isso muitas obras da índia antiga não sobreviveu e das que sobreviveram, na maioria das vezes, não aparecem o nome do autor.

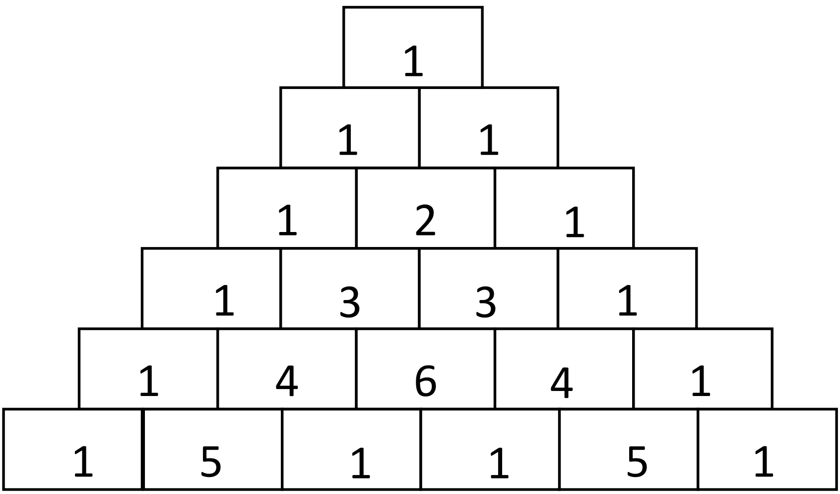
Na literatura jaina encontramos livros que têm combinatória e triângulo aritmético. Os livros Bhagabati Sutra (300 a.C.) e Sthananga Sutra (200 a.C.), ambos sem o nome do autor e tratam de combinatória, através de regras para o cálculo de combinações e arranjos. Mas também encontramos livros do janaísmo com nome do autor e assunto ligados à análise combinatória e o triângulo aritmético, como Chanda Sutra (200 d.C.) de autoria de Pingala, o Ganita Sara Samgraha (850 d.C.) de Mahavira e o Mritasanjivani (950 d.C.) de Halayudha. Nesse último, encontramos assuntos que já tinham sidos tratados por Pingala, como o denominado triângulo aritmético (ou meruprastara, em homenagem ao Monte Meru) e a regra de Pingala – regra usada para a construção de um triângulo aritmético - a 450 anos, depois de Pingala.

Regra de Pingala

A regra de Pingala para a construção o triângulo é assim descrita:

Desenhe um quadradinho; abaixo dele desenhe dois outros, de maneira que se unam no ponto médio da base dele; abaixo desses dois, desenhe outros três e assim sucessivamente. A seguir, escreva 1 no primeiro quadradinho e nos da segunda linha. Na terceira linha escreva 1 nos quadradinhos dos extremos, e no meio escreva a soma dois dos números imediatamente acima deles (por exemplo, na quinta linha, temos: $4 = 1 + 3, 6 = 3 + 3, 4 = 3 + 1$), Figura 11. Prossiga fazendo o mesmo nas demais linhas até onde quiser.

Figura 11: Triângulo construído com a Regra de Pingala



Sistema de numeração hindu

Encontramos a primeira referência específica a respeito dos números hindus, datando de 662, escrito pelo bispo sírio Severus Sebokt, admirador das descobertas astronômicas, dos métodos de cálculo e da computação dos hindus. Sebokt se irritava com aqueles que só faziam fé na cultura grega e menosprezavam as de outros povos.

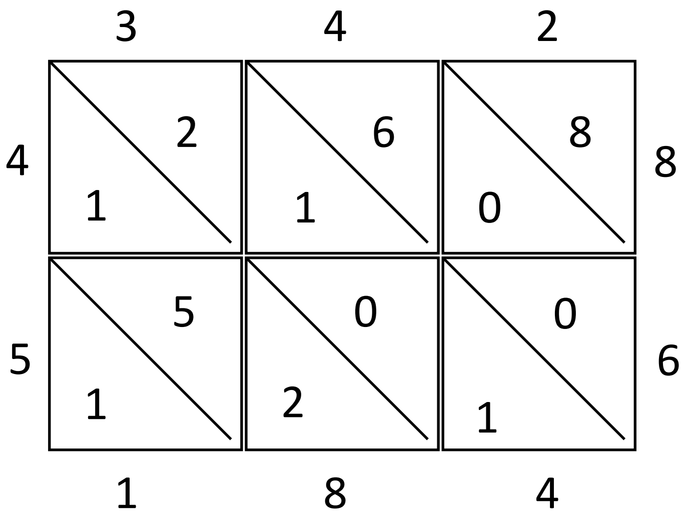
O sistema de numeração hindu estava associado a três princípios básicos, ou seja, base decimal, uma notação posicional (ou relativa) e uma forma cifrada para cada um dos dez numerais. Esses princípios não são de origem hindu, porém a parte brilhante que cabe aos hindus foi a ideia de juntá-los pela primeira vez, para a formação de seu sistema de numeração e assim foi construído o moderno sistema de numeração.

A adição e a multiplicação dos hindus eram bem parecidas com as fazemos hoje. Para a multiplicação, eles usavam um esquema denominado de multiplicação em reticulado (ou em células, ou em gelosia, entre outros nomes). Um exemplo, para termos uma noção do que vem atrás disso

Queremos o produto 342 por 54.

Considere:

Figura 12: Multiplicação em reticulado



- Acima do reticulado temos 342 que é o multiplicando
- A esquerda temos 54 o multiplicador
- Os produtos parciais ocupam as células quadradas

Exemplo: na linha 1 e coluna 1, encontramos 12, que vem da multiplicação de 4 por 3

- Os algarismos das diagonais são somados
- O produto final está abaixo e a direita do reticulado, ou seja, 18468

Aqui também podemos perceber o “nosso” princípio da multiplicação.

Bhaskara

Bhaskara Acharya viveu entre 1114 a 1185, na Índia, foi considerado o maior matemático de sua época. Trouxe também contribuições para a análise combinatória, em sua obra mais conhecida, denominada Lilavati (significa Graciosa). Nessa obra apareciam problemas semelhantes aos que aparecem em livros didáticos de hoje, sendo que esses problema eram criados com uma quantidade pequena de objetos (elementos). No trabalho de Bhascara, é relevante ressaltarmos que aparecia claramente a preocupação em diferenciar os agrupamentos em que a ordem dos elementos é importante (os arranjos) e agrupamentos em a ordem dos elementos não tem importância (as combinações). Pois os dias de hoje a análise combinatória considera a existência desses dois tipos de agrupamentos como fundamentais.

Tipos de agrupamentos

Um agrupamento de elementos é qualquer conjunto ordenado ou não desses elementos. Para a análise combinatória existem somente dois tipos fundamentais de agrupamentos. Não tenha dúvida também de que em leitura já feita, nós nos deparamos com esses agrupamentos; que são denominados de acordo com a importância ou não da ordem, em arranjos ou combinações.

- Arranjos – A ordem dos elementos em cada agrupamento é importante.

Exemplo: No Lo Shu (quadrado mágico da Figura 8), qualquer modificação da posição de um ou mais elemento (número) é um arranjo.

No Stomachion de Arquimedes cada forma diferente de encaixar as catorze peças para a formação de um quadrado é um arranjo.

- Combinações – A ordem dos elementos em cada agrupamento não é importante.

Exemplo: Quantas são as combinações de 2 sabores, que podem ser feitas com 3 sabores (gostos) distintos: doce, salgado e azedo?

Representando doce por D, salgado por S e azedo por A. Podemos obter algumas combinações.

{A, D} = {D, A}, ou seja, representam a mesma combinação (a ordem não é importante)

{A, D} $\neq$ {A, S}, esses agrupamentos diferem pela natureza dos elementos.

Arranjos simples

Em um campeonato de futebol, em que participam apenas quatro times: Flamengo, Botafogo, Fluminense e Vasco, serão premiados apenas os dois primeiros colocados. Considerando que não há empate, determine o número de possibilidades da premiação.

Resolução

Vamos designar Flamengo por A, Botafogo por B, Fluminense por C e Vasco por D. Sendo que o par ordenado (A, B) representa Flamengo em primeiro lugar e Botafogo em segundo lugar. Assim, de modo análogos temos:

(A, B) $\neq$ (B, A), a ordem dos elementos é importante, ou seja, eles diferem pela ordem.

(A, B) $\neq$ (C, D), diferem pela natureza dos elementos que os compõem.

Dois agrupamentos se diferem pela ordem dos elementos ou pela natureza dos elementos.

As premiações possíveis são: (A, B), (A, C), (A, D), (B, A), (B, C), (B, D), (C, A), (C, B), (C, D), (D, A), (D, B) e (D, C). Tais pares ordenados são chamados de arranjos simples de quatro elementos tomados dois a dois.

Denotamos o número de arranjos simples de 4 elementos tomados dois a dois por A_4^2 ou $A_{4,\,2}$, assim podemos escrever $A_{4,\,2} = 12$.

Logo, existem 12 possibilidades de premiação.

Definição

Seja A um conjunto formado por n elementos e p um número natural não nulo, tal que $p \leq n$. Denominamos de arranjo simples de n elementos tomados p a p, toda sequência (ou agrupamento ordenado) de p elementos distintos, escolhidos em A.

O número total de arranjos simples de n tomados p a p, denotamos por A_n^p ou $A_{n,\,p}$.

Permutações simples

Arnaldo, Vinícius e Solange são três amigos e gostariam de uma fotografia deles juntos, lado a lado. De quantas maneiras isso pode ser feito?

Resolução

Consideremos Arnaldo, Vinícius e Solange, respectivamente A, V e S. Assim: A escolha de AVS é diferente de VAS, pois a ordem é importante.

As maneiras que eles podem ficar juntos, lado a lado, são: AVS, ASV, SAV, SVA, VAS e VSA. Tais agrupamentos são chamados de permutações simples de três elementos. Denotamos o número de permutações simples de 3 elementos por P_3, assim podemos escrever $P_3 = 6$.

Logo, isso pode acontecer de 6 maneiras.

Definição

Seja A um conjunto com n elementos, denominamos de permutação simples de n elementos, todo arranjo simples desses elementos tomados n a n. O número total de permutações simples de n elementos denotamos por P_n.

Comentário

Perceba que $P_n = A_{n,n}$, ou seja, o que queremos dizer é que o número de permutações simples de n elementos é um caso particular do número de arranjos simples de n elementos tomados p a p, onde $p = n$.

Combinações simples

Dos quatros melhores alunos da turma A, dois serão selecionados por sorteio para visitarem o IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) do Rio de Janeiro. De quantos modos se pode escolher dois alunos entre os quatro?

Alunos: A_1, A_2, A_3, A_4

A escolha dos alunos A_1 e A_2 é a mesma de A_2 e A_1, ou seja, $\{A_1, A_2\} = \{A_2, A_1\}$ representam o mesmo agrupamento.

Vamos formar todos os agrupamentos de dois elementos (alunos) com os quatro.

$\{A\ , A_2\}, \{A_1, A_3\}, \{A_1, A_4\}, \{A\ , A_3\}, \{A_2, A_4\}, \{A_3, A_4\}$

Dizemos, então, que temos seis combinações simples de quatro elementos tomados dois a dois.

Dois agrupamentos diferem pela natureza dos elementos, a ordem não importa. Denotamos o número de combinações simples de 4 elementos tomados 2 a 2, por C_3^2, $C_{3,\,2}$ ou $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ assim podemos escrever $C_{3,\,2} = 6.$

Definição

Seja A um conjunto formado por n elementos e p um número natural não nulo, tal que $p \leq n.$ Denominamos de combinação simples de n elementos tomados p a p, todo subconjunto (ou agrupamento não ordenado) de p elementos de A.

O número de combinações de n elementos tomados p a p, denotamos por C_n^p, $C_{n,\,p}$ ou $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$.

A princípio todos os exemplos que vimos aqui parecem bem simples, e de fato são. Porém, quando o número de elementos é maior e ainda obedecendo a certas condições, poderemos ter problemas que exigirão alta dose de criatividade, além de utilizarmos uma ou mais técnicas de contagem (PM, Arranjo, Permutações ou Combinações) para resolvê-los.

Capítulo 3: Acontecimentos e matemáticos europeus a partir do século XVII

O século XVII para a matemática é especial, mais conhecido como século do gênio. Várias contribuições para a matemática surgiram, assim como a invenção da geometria analítica, do cálculo, da teoria das probabilidades, e muitos novos campos de pesquisa em matemática apareceram. Embora ainda não existissem grupos de matemáticos organizados; a Itália, França e Inglaterra já contavam com grupos profissionais de matemáticos que se intercomunicavam. A manifestação súbita da matemática do século XVII foi devida, em grande parte, sem margem de dúvida, aos avanços sociais, políticos e econômicos vivenciados pela sociedade da época. Destacaremos neste capítulo os principais acontecimentos e matemáticos europeus que contribuíram, a partir desse século, para o desenvolvimento da análise combinatória, que aliás foi um século de grande desenvolvimento do nosso tema de estudo, devido seu entrosamento com a teoria das probabilidades. Definiremos aqui fatorial e, com a ajuda do princípio multiplicativo, mostraremos o cálculo do número de arranjos simples, do número de permutações simples e do número de combinações simples.

Os jogos

As culturas primitivas, em sua maioria, praticavam atividades com algum tipo de dados. Em períodos bem remotos, encontra-se um jogo denominado astrágalo, que é o antecessor do atual dado (hexaedro regular). O astrágalo é um osso, ou melhor, um ossinho encontrado na pata traseira de certos animais, como o carneiro e a cabra. Possui quatro faces distinguíveis e quando lançado ao chão, repousa-se sobre uma das faces. Vários jogos eram realizados com astrágalos. Entre eles encontra-se um jogo bem comum que basta usar quatro peças e observar as faces que aparecem para cima. Depois de jogarem as peças em uma superfície plana; com valores atribuídos às combinações, normalmente as mais valiosas eram as que apresentavam mais faces distintas.

Entre os judeus o jogo era proibido e repreendido sob pena de morte. Por outro lado, em Roma e na Grécia o entusiasmo pelo jogo era tanto que houve necessidade de proibi-lo em certos períodos.

O jogo de cartas, denominado atualmente como baralho, pode ter surgido na China, Índia ou Egito. Mas nem todas as pessoas tinham acesso às cartas, devido a seu custo. Foi somente no século XV, a partir da invenção da imprensa, que este jogo passou a ser mais popular. Devemos salientar também que com a imprensa houve uma aceleração na divulgação dos novos conhecimentos.

Muito tempo se passou até haver uma associação dos jogos com a matemática. Tais práticas só passaram a ocorrer, de maneira mais formal (com um certo tratamento matemático) no séc. XVII, com o grande matemático Pascal e seus contemporâneos. Não se pode afirmar que antes do século XVII não houvesse algumas provas, mas a partir desse século tais práticas (ou tratamento matemático dado ao jogo) começaram a se intensificar entre matemáticos consagrados.

Figura 13: Blaise Pascal

Fonte: <https://bgstrialofgod.wordpress.com/blaise-pascal/ >. Acesso 17/11/2014

Probabilidades e Análise Combinatória

Um dos amigos de Pascal, Antoine Gombaud, o Chevalier de Méré (1607-1684), frequentador presente das mesas de jogo; enviou a ele alguns problemas sobre jogos, a fim de que fossem examinados por Pascal. Este teve muito interesse pelos problemas e resolveu também enviá-los ao amigo matemático Pierre de Fermat (1601-1665), para o estudo dos problemas. A partir daí, começou a se estabelecer trocas de correspondência entre esses matemáticos, e acredita-se que essas trocas contribuíram para a elaboração da teoria da probabilidade, o que hoje denominamos de probabilidades finitas.

Com a necessidade de determinar o número de possibilidades existentes nos jogos, surge o desenvolvimento de novas técnicas de contagem, ou melhor, a análise combinatória. Esta começa a ter um tratamento matemático (ou formalizado), que até então não havia acontecido.

Este grande desenvolvimento da análise combinatória ocorreu devido aos problemas surgidos com os jogos de azar. Entre esses referidos jogos, encontram-se os jogos de cartas, dados e moedas. A teoria das probabilidades foi um ponto fundamental para o aparecimento de novas técnicas de contagem em análise combinatória.

Embora, a princípio, os matemáticos desse tempo não estivessem atraídos por estes novos assuntos (a teoria das probabilidades e a análise combinatória), porque a atenção da maioria deles estava voltada à criação do cálculo, assunto de grande aplicabilidade, em que Newton e Leibnitz são considerados os pais. Por outro lado e de modo natural, a teoria das probabilidades continuou seu desenvolvimento devido às várias aplicações que surgiam, como por exemplo, estudar situações como taxas de mortalidade, prêmios de seguros e muito mais.

A palavra “azar”

Dentro do nosso contexto a palavra “azar” não tem o significado comum dado de “má sorte” e sim como sinônimo de “acaso”. Que por sua vez fica entendido como conjunto de forças, não determinadas ou controladas, normalmente, que influenciam no resultado de um experimento ou fenômeno. Como, por exemplo, o lançamento de uma moeda, pode ocorrer cara ou coroa, de modo que se tentarmos repetir o experimento, em condições análogas à primeira, o resultado pode ser diferente. Em outras palavras, somente depois de sua realização podemos saber o resultado fiel do experimento. A ideia de acaso para os povos antigos, estava ligada às intervenções divinas ou sobrenaturais. Se um dado lançado caiu desse modo, assim foi a vontade de Deus ou dos deuses.

Girolamo Cardano

Girolamo (Jerônimo) Cardano (1501-1576) nasceu em Pávia, Itália. Era médico por profissão, dedicou-se à matemática, deixou vários livros escritos; entre eles o De Ludo Aleae (Sobre os jogos de azar), publicado em1663. O livro expõe conselhos sobre os jogos, ou um manual do jogador, e as primeiras noções sobre probabilidades.

Pascal e contemporâneos

Blaise Pascal (1623-1662), filho do matemático Ètienne Pascal (1588-1640), nasceu na província francesa de Auvergne e desde novo revelava-se habilidoso para a matemática. Embora, por ordem de seu pai, a educação inicial estava limitada ao estudo de línguas, no intervalo do recreio e de modo oculto, por sua própria vontade, em poucas semanas, Pascal estudou geometria e descobriu diversas das propriedades das figuras geométricas. O pai de Pascal ficou tão feliz com a nova atividade do filho que lhe deu de presente um exemplar dos Elementos de Euclides. Aos quatorze anos, Pascal já participava de reuniões informais da Academia de Mersenne em Paris.

Os resultados das correspondências entre Pascal e Fermat, causadas por De Méré, não foram publicadas por eles. Porém, em 1657, o matemático holandes Chistiaan Huygens (1629-1695), com base nas correspondências entre os franceses, publicou um pequeno folheto, intitulado " De Ratiociniis in Ludo Aleae" (ou Sobre o Raciocínio em Jogos de dados). Enquanto isso acontecia, Pascal realizava uma ligação do estudo das probabilidades com o triângulo aritmético em 1653.

O traiaté du triangle arihmétique de Pascal já existia antes de Pascal. Os hindus em 200 a.C., os chineses em torno de 1250 e muitas outras pessoas de nacionalidades distintas o conheciam antes de Pascal. Mas foi Pascal que estudou as diversas relações que envolviam os números do triângulo e muitas destas relações foram desenvolvidas por ele.

A construção do triângulo aritmético no tempo de Pascal (veja Figura 14) é diferente da que usamos hoje.

Figura 14: Traiaté du triangle arihmétique de Pascal

$$\begin{array}{llllll} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & \\ 1 & 3 & 6 & \cdots & & \\ 1 & 4 & \cdots & & & \\ 1 & \cdots & & & & \\ \cdots & & & & & \end{array}$$

Uma de suas propriedades é: que a partir da segunda linha, qualquer elemento é dado pela soma dos elementos da linha anterior, situado acima dele ou à esquerda. Como exemplo, $6 = 3 + 2 + 1, 4 = 3 + 1$.

Pascal ficou conhecido no mundo ocidental por causa do desenvolvimento e aplicações que realizou com as propriedades do triângulo. Por isso o triângulo recebeu o nome no ocidente de triângulo de Pascal. Uma das primeiras aparições do princípio de indução matemática é encontrado no tratado de Pascal sobre o triângulo.

Uma das aplicações realizada por Pascal foi a determinação dos coeficientes binomiais da expressão de $(x + y)^n$.

Pascal para resolver problemas de probabilidade, que eram necessários para obter o número de combinações de n elementos tomados p de cada vez (ou p a p), ele expressava verbalmente e, corretamente afirmava como obter. Fazendo uso do simbolismo moderno. Pascal afirmava que:

$$\frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Salientamos que o simbolismo algébrico teve avanços no século XVII, porém neste quesito Pascal estava atrasado no seu tempo.

O símbolo $n!$

O símbolo $n!$ (leia: fatorial de n), foi introduzido pela primeira vez em 1808, pelo professor Chistian Kramp (1760-1820) de Estrasburgo, França, cuja intenção era simplificar a escrita.

Fatorial

Definimos fatorial de n ou n fatorial, indicamos por $n!$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, como sendo $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, isto é, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Exemplo

5! = 5.4.3.2.1 = 120 ou podemos escrever que 5! = 5.4!

Propriedade dos fatoriais

$n! = n \cdot (n-1)!$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$.

Para os casos particulares, $n = 0$ e $n = 1$, acontece:

$1! = 1$, pois $n = 2$, temos
$2! = 2\,(2-1)! \Leftrightarrow 2! = 2 \cdot 1! \Leftrightarrow 2 \cdot 1 = 2 \cdot 1! \Leftrightarrow 1 = 1!$

$0! = 1$, pois $n = 1$, temos $1! = 1 \cdot (1-1)! \Leftrightarrow 1! = 1 \cdot 0! \Leftrightarrow 1! = 0! \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 = 0!$

Exercícios resolvidos

1) Simplifique e calcule:

a) $\dfrac{9!}{8!}$ b) $\dfrac{10!}{4!\,6!}$ c) $\dfrac{5! + 4!}{4!}$

Resolução

a) $\dfrac{9!}{8!} = \dfrac{9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 9$

b) $\dfrac{10!}{4!\,6!} = \dfrac{10 \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{6!}} = 210$

c) $\dfrac{5!+4!}{4!} = \dfrac{5 \cdot 4! + 4!}{4!} = \dfrac{\cancel{4!}\,(5+1)}{\cancel{4!}} = 6$

2) Simplifique:

a) $\dfrac{(n+1)!}{n!}$ b) $\dfrac{(n+1)!-n!}{n!}$

Resolução

Supondo que os fatoriais existem, temos:

a) $\dfrac{(n+1)!}{n!}=\dfrac{(n+1)\cdot n!}{n!}=n+1$

b) $\dfrac{(n+1)!-n!}{n!}=\dfrac{(n+1)\cdot n!-n!}{n!}=\dfrac{n!(n+1-1)}{n!}=n$

3) Exprima por meio de fatoriais:

a) $16\cdot 9\cdot 5$

b) 120

c) $(n+1)(n+2)$

Resolução

a)

$16\cdot 9\cdot 5=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5=2\cdot 3\cdot 5\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 2=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=6!$

b) $120=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5=5\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 2=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=5!$

c)

$$(n+1)(n+2)=(n+2)(n+1)\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}=$$
$$=\frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}=\frac{(n+2)!}{n!}$$

4) Resolva a equação $(n-3)!=24$.

Resolução

n é natural e $n\geq 3$ (para a existência dos fatoriais):

$(n-3)!=24$

$(n-3)!=3\cdot 2\cdot 2\cdot 2$

$(n-3)!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

$(n-3)!=4!$

$n-3=4$

$n=4+3\Rightarrow n=7$

$S=\{7\}$

5) Obter o número natural que é a solução da equação:

$$\frac{(n+2)!(n-2)!}{(n+1)!(n-1)!}=4$$

Resolução

Para a existência dos fatoriais devemos ter $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$.

$$\frac{(n+2)!(n-2)!}{(n+1)!(n-1)!} = 4$$

$$\frac{(n+2)\left(n+1\right)!(n-2)!}{(n+1)!(n-1)\left(n-2\right)!} = 4$$

$$\frac{n+2}{n-1} = 4$$

$$n+2 = 4n-4$$

$$2+4 = 4n-n$$

$$6 = 3n \Rightarrow n = 2$$

Exercícios propostos

24) Simplifique e calcule:

a) $\frac{7!}{6!}$ b) $\frac{6!}{4!}$ c) $\frac{10!}{7!}$ d) $\frac{12!}{5!6!}$

e) $\frac{7!5!}{6!4!}$ f) $\frac{11!9!}{3.10!7!}$ g) $\frac{20!}{18!2!}$ h) $\frac{101!+102!}{100!}$

25) Exprima por meio de fatoriais:

a) $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$ b) 1320 c) $\left(n-2\right)\left(n-3\right)$

26) Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{n!}{(n+1)!}$ b) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$ c) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$

d) $\dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$ e) $\dfrac{n!+(n+1)!}{n+2}$

27) Resolva as equações:

a) $\dfrac{(x+1)!}{(x-1)!}=42$ b) $\dfrac{(x-1)!}{(x-3)!}=12$ c) $\dfrac{x!}{(x-2)!}=30$

d) $(3x-2)!=24$ e) $(x-2)!=2(x-4)!$

28) Obter n na equação $n!=6\cdot(n-2)!$

Como posso obter $n!$ usando a calculadora científica?

Digite n (número natural), aperte a tecla "shift", a tecla "x^{-1}" e por último o sinal $=$ (igual) e teremos o resultado desejado. Por outro lado, algumas calculadoras já trazem no teclado $n!$.

Cálculo do número de arranjos simples

Agora, vamos obter uma fórmula para calcular o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p, com $p \leq n,$ isto é, uma fórmula para $A_{n,p}$.

$A_{n,p}$ pode ser calculado pelo PM, assim, temos:

Para a 1ª etapa temos n possibilidades

Para a 2ª etapa temos $(n-1)$ possibilidades

Para a 3ª etapa temos $(n-2)$ possibilidades

E, assim por diante até a pª etapa, isto é, $n(-(p-1))$

$$A_{n,p} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots (n-(p-1))}_{p-\,fatores}$$

ou

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2).(n-3) \cdots (n-p+1)) \quad (1)$$

Multiplicando e dividindo o 2º termo da igualdade por $\frac{(n-p)!}{(n-p!)}$, temos:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2).(n-3) \cdots (n-p+1)) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$A_{n,p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-3) \cdots (n-p)!}{(n-p)!}$$

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \qquad (2)$$

Comentário

As fórmulas (1) e (2) são equivalentes, porém a segunda está mais simplificada com a notação de fatorial.

Exercícios resolvidos

1) Usando a fórmula $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$, determine:

a) $A_{4,\,2}$ b) $A_{7,\,3}$

Resolução

a) $A_{4,\,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 12$

b) $A_{7,\,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 210$

2) Quatro pessoas entraram num ônibus e encontraram cinco lugares de assentos não ocupados. De quantas maneiras essas quatro pessoas podem se assentarem nos assentos não ocupados?

Resolução

As disposições (ordem) que as quatro pessoas sentam nos bancos é importante, portanto estamos diante de um problema de arranjos. Daí:

$$A_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1!} = \frac{120}{1} = 120$$

Logo, essas pessoas podem se assentarem de 120 maneiras diferentes.

Exercícios propostos

29) A senha de acesso ao meu computador é formada por duas vogais distintas, seguidas de três algarismos pares distintos. Quantas são as possíveis senhas de acesso?

30) Um carro possui cinco lugares. Cinco pessoas entram neste veículo mas, destas, apenas uma sabe dirigir. De quantas maneiras diferentes essas pessoas podem se assentarem?

31) Obtenha o valor de n, sabendo que $A_{n,\,3} = A_{n,\,2}$.

32) Com os algarismos 1, 3, 4, 5 e 6, quantos números múltiplos de 5 de 4 algarismos distintos podemos formar?

33) Mateus, Rafael, Olga, Kelly e Viviane formam uma fila. De quantos modos a fila pode ser formada, sendo Kelly a 1ª da fila?

34) Quantas funções injetoras podem ser definidas $f: A \to B$, onde $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 5, 7, 8\}$?

Cálculo do número de permutações simples

Sabemos que $P_n = A_{n,n}$, isto é, o número de permutações simples de n é igual ao número de arranjos simples de n elementos tomados n a n.

Assim: $P_n = A_{n,n} = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = \dfrac{n!}{1} = n!$

Daí : $P_n = n!$

Comentário

Perceba a conveniência de $0! = 1$, no caso acima.

Exercícios resolvidos

1) Fabrício, Rodrigo, Antônio e Cristina são amigos e juntos abriram uma empresa. O nome da empresa tem as letras iniciais do nome de cada um deles. Determine o número de nomes possíveis dessa empresa.

Resolução

A ordem das letras F, R, A e C (iniciais dos nomes) é importante. Como temos 4 letras distintas, o número de nomes possíveis dessa empresa é $P_4 = 4! = 24$.

2) Quantos anagramas tem a palavra AMOR?

Resolução

Anagrama de uma palavra é qualquer ordenação de suas letras pode ter significado ou não.

Exemplos de anagramas da palavra amor: ROMA, OMAR, MRAO, AMOR**,** etc.

Como a palavra tem 4 letras, o número de anagramas é $P_4 = 4! = 24$.

Outra resolução

Ação formada por 4 etapas

	Possibilidades
1ª. etapa (escolha da 1ª. letra do anagrama):	4
2ª. etapa (escolha da 2ª. letra do anagrama):	3
3ª. etapa (escolha da 3ª. letra do anagrama):	2
4ª. etapa (escolha da 4ª. letra do anagrama):	1

Pelo PM, vem: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

3) Considere a palavra UNIVERSO, responda:

a) quantos anagramas podemos formar?

b) quantos anagramas começam com U?

c) quantos anagramas terminam com vogal?

d) quantos anagramas começam com consoantes?

e) quantos anagramas apresentam as letras V, E e R juntas e nessa ordem?

f) quantos anagramas apresentam as letras V, E e R juntas?

Resolução

a) A palavra UNIVERSO tem 8 letras distintos. O problema trata de permutações simples de 8 elementos. Assim:

$$P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$$

Logo, podemos formar 40320 anagramas.

b) Fixando a letra U na 1ª posição, façamos as permutações simples das outras 7 letras.

$$\underbrace{U}_{\downarrow} \quad \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{\downarrow}$$

Possibilidades: 1 $\qquad\qquad$ P_7

Pelo PM, vem: $1 \cdot P_7 = 7! = 5040$

Logo, há 5040 anagramas que começam com U.

c) Para a última posição temos 4 possibilidades (U, I, E ou O) e para as demais façamos as permutações das 7 que sobraram. Assim:

$$\underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{\downarrow}\ \underbrace{E, I, O, U}_{\downarrow}$$

Possibilidades: P_7 4

Pelo PM, vem: $P_7 \cdot 4 = 7! \cdot 4 = 20160$

Logo, 20160 anagramas terminam por vogal.

d) Para a 1ª posição temos 4 possibilidades (N, V, R e S) e para as demais façamos as permutações das 7 que sobraram. Assim:

$$\underbrace{N, R, S, V}_{\downarrow}\ \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{\downarrow}$$

Possibilidades: 4 P_7

Pelo PM, vem: $4 \cdot P_7 = 4 \cdot 7! = 20160$

Logo, 20160 anagramas.

e) Consideremos "VER" sendo apenas uma letra. Assim temos que obter as permutações simples de 6 letras. Daí:

$P_6 = 6! = 720$

Logo, 720 anagramas.

f) Consideremos “VER” como uma só letra, temos P_6, porém temos que permutar as letras de “VER”, sendo assim, pelo PM temos: $P_6 \cdot P_3 = 6! \cdot 3! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4320$

Logo, 4320 anagramas.

4) Escritos em ordem crescente os números resultados das permutações do número 12345, que lugar (número da posição) ocupará o número 43521?

Resolução

12345, 12354, ..., 43521

1ª 2º ?

$$\underbrace{1, 2\ ou\ 3}_{\downarrow} \qquad \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{\downarrow}$$

Possibilidades: 3 P_4

Pelo PM, vem: $3 \cdot 4! = 3 \cdot 24 = 72$

$$\underbrace{4}_{\downarrow}\ \underbrace{1\,ou\ 2}_{\downarrow}\ \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_}_{\downarrow}$$

Possibilidades: 1 2 P_3

Pelo PM, vem: $1 \cdot 2 \cdot P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 6 = 12$

$$\underbrace{4}_{\downarrow}\ \underbrace{3}_{\downarrow}\ \underbrace{1\,ou\ 2}_{\downarrow}\ \underbrace{\_\_\ \_\_}_{\downarrow}$$

Possibilidades: 1 1 2 P_2

Pelo PM, vem: $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2! = 4$

$$\underset{\downarrow}{\underbrace{4}}\ \underset{\downarrow}{\underbrace{3}}\ \underset{\downarrow}{\underbrace{5}}\ \underset{\downarrow}{\underbrace{\_\_\ \_\_}}$$

Possibilidades: 1 1 1 P_2

Pelo PM, vem: $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2! = 2$

$72 + 12 + 4 + 2 = 90$

Logo, ocupa 90^o lugar.

Sugestão: Resolva novamente o problemas anterior fazendo uso somente do princípio multiplicativo.

Exercícios propostos

35) Dada a palavra BRASIL, responda:

a) quantos anagramas podemos formar?

b) quantos anagramas que iniciam com a letra R podemos formar?

c) quantos anagramas possuem a sílaba BRA?

36) Permutando os algarismos do número 1357, formamos números. Ao colocar esses números em ordem crescente, qual o número que ocupa a 22º posição?

37) Determine de quantas maneiras podemos dispor em fila indiana 4 mulheres e 4 homens, de modo que as mulheres sempre fiquem juntas.

38) De quantos modos podemos organizar na prateleira de uma estante 3 livros de matemática, 4 livros de história e 2 livros de física, de modo que os livros de mesmo assunto fiquem juntos?

39) Escritos em ordem crescente todos os números de 4 algarismos distintos obtidos com os algarismos 2, 3,5 e 7, que lugar ocupa o número 5723?

40) Formados e colocados em ordem crescente todos os números de 5 algarismos distintos, obtidos com 1, 3, 5, 6 e 7, que posição ocupa o número 61375?

41) Quantos anagramas podemos obter da palavra ALICE de modo que a letra L venha antes da letra A?

Issac Newton

O inglês Isaac Newton (1642-1727) nasceu no dia de natal, no ano em que morreu Galileu. Em 1661, por influência de um tio por parte materna, que estudou em Cambridge, veio a estudar no Trinity College.

Praticamente nos anos 1665 e 1666, devido à peste, o Trinity College ficou fechado. Então, nesse período Newton foi para casa e realizou quatro de suas principais descobertas, ou seja, o teorema binomial, o cálculo, a lei da gravidade e a natureza das cores.

A maior contribuição de Newton para o desenvolvimento da análise combinatória foi a fórmula para a expansão do “binômio de Newton “(teorema binomial) como conhecemos hoje, descoberto em 1664, talvez em 1665. Os coeficientes binomiais para as potências inteiras já eram conhecidos por muitos matemáticos a pelo menos cinco séculos antes de Pascal. Mas eles não usavam a notação exponencial de René Descartes (1596-1650). Esse fato impedia de realizar a transição de potências inteiras para fracionárias. A sugestão de potências fracionárias também foi dada por Michael Stifel (1486?-1567) e Girard Desargues (1591-1661), entretanto somente com Jhon Wallis (1616-1703) os expoentes fracionários começaram a ser usados.

O teorema binomial descrito, explicado e mostrado por Newton foi enviado em duas cartas a Henry Oldenbure (1615-1677), secretário da Royal Society, em 1676. Nessas cartas Newton anuncia pela primeira vez o teorema para calcular diretamente $(1+x)^n$, sem ter que recorrer ao desenvolvimento de $(x+1)^{n-1}$, ou ainda, mais especificamente, o que ele fez foi mostrar que cada coeficiente pode ser obtido usando o anterior. Além disso, Newton generaliza o resultado para $(x+y)^q$, onde q é um número racional. A partir daí, a fórmula obtida para seu desenvolvimento passou a ser denominada de fórmula do binômio de Newton. O teorema binomial não foi publicado por Newton, mas por Wallis em 1685, que atribuiu todo o mérito a Newton.

A forma de expressão dada por Newton (e Wallis), não foi apenas uma substituição de expoente inteiro por fracionário, mas resultado de várias tentativas e erros relativos a divisão e radicais com quantidades algébricas.

Outros grandes matemáticos do tempo de Pascal e que vieram após Pascal se dedicaram também ao desenvolvimento da análise combinatória. Matemáticos como, Euler, Jacques Bernoulli, Laplace e outros.

Leonhard Euler

Leonhard Euler (1707-1783) nasceu na Basiléia, Suíça. Seu pai um pastor calvinista, com certa vocação para a matemática ensinou-lhe os fundamentos da matemática e conseguiu que o filho viesse a estudar com Johann Bernoulli, irmão de Jacques Bernoulli. Euler estudou quase todos os ramos da matemática pura e aplicada. Não é exagero dizer que quase toda linguagem e notação usada hoje na matemática, principalmente a nível universitário, devemos a ele.

Em Combinatória, Euler contribuiu com a notação $\left[\frac{n}{p}\right]$, para representar a expressão

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n+p-1)}{1\cdot 2\cdots n} \quad \text{equivalente a} \quad \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Porém a notação $\left[\dfrac{p}{q}\right]$, modernamente é $\dbinom{n}{p}$ (leia: n sobre p).

Cálculo do número de combinações simples

Considerando o problema da “Mega-Sena” (p. 9), podemos constatar que em cada agrupamento (subconjunto ou combinação) de 6 elementos (números), no exemplo dado {10,12, 24, 27, 41, 60}, são gerados $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2.1$(ou $6!$) vezes o número de combinações de 60 elementos tomados 6 a 6.

Em símbolos, temos: $A_{60,6} = 6! \cdot C_{60,6} \Rightarrow C_{60,6} = \dfrac{A_{60,6}}{6!}$

Para o cálculo de $C_{n,p}$ $(p \leq n)$, vamos generalizar com base no que foi visto.

Cada combinação de n elementos tomados p a p corresponde $p!$ arranjos, que são obtidos pela permutação dos elementos da combinação.

Em símbolos, temos: $A_{n,\,p} = p! \cdot C_{n,p} \Rightarrow C_{n,\,p} = \dfrac{A_{n,p}}{p!} =$

$$\frac{\dfrac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!.p!}$$

ou $C_{n,\,p} = \dfrac{n\,!}{p!\,\left(n-p\right)!}$

Explicação do símbolo $C_{0,\,0}$

Fazendo uso da fórmula $C_{n,p} = \dfrac{n\,!}{p\,!\left(n-p\right)!}$, para o cálculo de $C_{0,\,0}$, temos:

$$C_{0,\,0} = \frac{0\,!}{0\,!\left(0-0\right)!} = \frac{0\,!}{0\,!\,0\,!} = 1$$

O resultado nos diz que o número de subconjuntos do conjunto vazio é 1, isto é, o conjunto vazio é o único subconjunto dele mesmo.

Exercícios resolvidos

1) Usando a fórmula $C_{n,\,p} = \dfrac{n\,!}{p\,!\left(n-p\right)!}$, determine:

a) $C_{6,\,3}$ b) $C_{7,\,4}$ c) $C_{4,\,0}$

Resolução

a) $C_{6,\,3} = \dfrac{6\,!}{3\,!\left(6-3\right)!} = \dfrac{6\,!}{3\,!\,3\,!} = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\,!}{3\cdot 2\cdot 1\,3\,!} = 20$

b) $C_{7,4} = \dfrac{7!}{4!(7-4)!} = \dfrac{7!}{4!3!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

c) $C_{4,0} = \dfrac{4!}{0!(4-0)!} = \dfrac{4!}{0!4!} = \dfrac{4!}{1 \cdot 4!} = 1$

2) O Hortifruti Bem-Viver resolveu inovar, vendendo salada de frutas a seus clientes. O “Bem-Viver” dispõe sempre de 10 opções de frutas para a salada. De quantas maneiras diferentes um cliente pode fazer seu pedido, escolhendo seis opções de frutas?

Resolução

$F_1, F_2, F_3, \cdots, F_{10}$ representam as frutas que podem ser pedidas para formar um pedido de salada de frutas. Por exemplo $\{F_1, F_3, F_5, F_6, F_8, F_9\}$ é um pedido de salada. Como a ordem dos elementos não é importante, estamos diante de um problema de combinações simples.

Temos que encontrar o número de combinações de 10 elementos tomados de 6 em 6, isto é, $C_{10,6} = \dfrac{10!}{6!(10-6)!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 87 \cdot 6!}{6! \cdot 4!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$

Logo, o cliente pode fazer seu pedido de 210 maneiras.

3) Não sabemos de onde vêm os jogos de cartas, mas provavelmente, vieram de uma das antigas civilizações: China, Egito ou Índia. Modernamente o jogo de carta é

conhecido como baralho. Esse jogo (baralho) contém 52 cartas, que são distribuídas em 4 naipes (ouros ♦, copas ♥, espadas ♠ e paus ♣), sendo que cada naipe tem 13 cartas (1 ás, 3 figuras (dama, valete e rei) e 9 cartas numeradas de 2 a 10). Considerando as 52 cartas, responda:

a) quantos agrupamentos podemos formar com 2 figuras?

b) quantos agrupamentos de 5 cartas, em que aparece exatamente 1 figura, podemos formar?

c) quantos agrupamentos de 5 cartas, não contendo nenhum rei, podemos formar?

d) quantos agrupamentos de 5 cartas podemos formar, de modo que cada agrupamento contenha pelo menos 1 figura?

Resolução

a) Se um baralho tem 4 naipes e cada naipe 3 figuras, então um baralho possui $4 \cdot 3 = 12$ figuras.

Em cada agrupamento de 2 figuras a ordem dos elementos não é importante. Estamos diante de problema de combinações simples de 12 elementos tomados 2 a 2. Assim:

$$C_{12,\,2} = \frac{12\,!}{2\,!\left(12-2\right)!} = \frac{12\,!}{2\,!\,10\,!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10\,!}{2 \cdot 1 \cdot 10\,!} = 66$$

Logo, 66 agrupamentos.

b) Escolha de 1 figura para o agrupamento (1ª etapa), temos: $C_{12,\,1}$ ou 12 possibilidades. Agora vamos escolher 4 cartas em um conjunto de 40 (52-12) que não são figuras (2ª etapa): $C_{40,\,4}$ possibilidades. Ação formada por duas etapas, assim, pelo PM, vem: $C_{12,\,1} \cdot C_{40,\,4} = 12 \cdot 9880 = 1096680$.

c) Como em cada naipe aparece 1 rei, temos 4 reis em um baralho. Daí, também se conclui que 48 (52-4) cartas de um baralho não são reis.

Queremos as combinações simples de 48 cartas tomadas 5 a 5. Assim:

$$C_{48,\,5} = \frac{48!}{5!\left(48-5\right)!} = \frac{48!}{5!\,43!} = \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 43!} = 1712304$$

Logo, 1712304 agrupamentos.

d) Agrupamentos de 5 cartas com as 52 cartas de um baralho (ordem não importa) ou combinações de 52 cartas tomadas 5 a 5, isto é, $C_{52,\,5}$ possibilidades. Estes agrupamentos estão incluídas as cartas que não apresentam nenhuma figura e as cartas que aparecem pelo menos uma figura.

Os agrupamentos de 5 cartas em que não apresentam nenhuma figura são as combinações de 40 (52-12) cartas tomadas 5 a 5, isto é, $C_{40,\,5}$ possibilidades.

O problema pede $C_{52,\,5} - C_{40,\,5}$ que é o número de agrupamentos que contém pelo menos 1 figura. Assim:

$$C_{52,\,5} = \frac{52\,!}{5\,!\left(52-5\right)!} = \frac{52\,!}{5\,!\,47\,!} = 2598960$$ e

$$C_{40,\,5} = \frac{40\,!}{5\,!\left(40-5\right)!} = \frac{40\,!}{5\,!\cdot 35\,!} = 658008$$

2598960-658008=1940952

Logo, 1940952 agrupamentos

Outra resolução para o item d

possibilidades

Agrupamentos de 5 cartas em que uma é figura: $C_{40,\,4} \cdot C_{12,\,1}$ =1096680

Agrupamentos de 5 cartas em que duas são figuras: $C_{40,\,3} \cdot C_{12,\,2}$ =652080

Agrupamentos de 5 cartas em que três são figuras: $C_{40,\,2} \cdot C_{12,\,3}$ =171600

Agrupamentos de 5 cartas em que quatro são figuras: $C_{40,\,1} \cdot C_{12,\,4}$ =19800

Agrupamentos de 5 cartas em que cinco são figuras: $C_{40,\,0} \cdot C_{12,\,5}$ = 792

Total de agrupamentos que contém pelo menos uma figura: 1940952

Logo, 1940952 agrupamentos.

4) Tenho 5 irmãos, quero convidar, pelo menos um irmão para jantar comigo. De quantas maneiras distintas posso fazer isso?

Resolução

Posso convidar 1 irmão de: $C_{5,\,1}$ ou 5 maneiras

Posso convidar 2 irmãos de: $C_{5,\,2}$ ou 10 maneiras

Posso convidar 3 irmãos de: $C_{5,\,3}$ ou 10 maneiras

Posso convidar 4 irmãos de: $C_{5,\,4}$ ou 5 maneiras

Posso convidar 5 irmãos de: $C_{5,\,5}$ ou 1 maneira

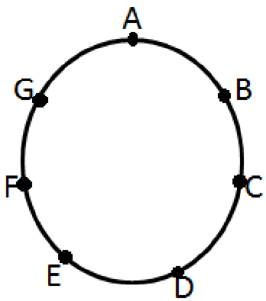
$5+10+10+5+1=31$

Logo, posso fazer isso de 31 maneiras.

Exercícios propostos

42) Daniele foi numa sapataria e encontrou seis modelos de calçados que lhe agradaram, porém só tem dinheiro para comprar dois modelos. De quantas formas Daniele pode escolher dois modelos de sapato?

43) Quantos triângulos podemos formar com 7 pontos distintos de uma circunferência?



44) Uma equipe médica deve ser formada por 4 médicos e 6 enfermeiros, escolhidos entre seis médicos e 10 enfermeiro. De quantas maneira essa equipe pode ser formada?

45) Um clube tem 22 jogadores de futebol, entre eles quatro são goleiros e só jogam numa posição fixa no campo; os demais jogam em qualquer posição, menos como goleiro. Quantos times com 11 jogadores podem ser formados?

46) Dos seis professores de matemática, entre eles estão Cláudio e Elailson, de uma escola, quatro formarão uma comissão para elaboração de uma prova. Determine o número de comissões distintas que podem ser formadas, em que aparecem Cláudio e Elailson.

47) No aniversário de casamento de Vinícius haviam 20 pessoas. Cada pessoa presente cumprimentou todas as outras. Quantos apertos de mão houve nesse aniversário?

48) Qual o número de diagonais do hexágono convexo?

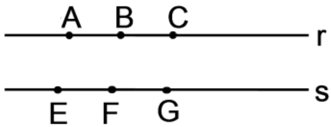
49) Em uma confraternização de pessoa de uma empresa, cada pessoa cumprimento todas as demais; houve um total de 210 apertos de mão. Quantas pessoas estavam na confraternização?

50) Uma empresa ofereceu estágio a 5 alunos do curso técnico de Química e a 4 alunos do curso técnico de Controle Ambiental. Ao terminar o estágio, a empresa pretende contratar 6 técnicos, sendo pelo menos 3 de Química. De quantas formas isso pode ser feito?

51) Numa escola 12 alunos e 8 alunas desejaram organizar uma festa. Para isso, entre eles, formaram uma

comissão de 7 pessoas, 4 alunos e 3 alunas, para conversarem com a direção da escola. Dentre o total de alunos estavam Lucas e Carolina. Determine o número de comissões que podem ser formadas, em que participa Lucas e não participa Carolina.

52) Quantos triângulos podemos formar com os pontos destacados das retas r e s da figura abaixo, sendo r paralela a s?



53) Sobre uma reta r marca-se 5 pontos e em outra reta s, paralela a primeira, marca-se 4 pontos distintos. Quantos triângulos podemos formar com vértices nesses pontos?

54) Em uma circunferência marca-se 7 pontos distintos, responda:

a) quantos quadriláteros podemos formar com vértices nesses pontos?

b) quantos pentágonos podemos formar com vértices nesses pontos?

c) quantos hexágonos podemos formar com vértices nesses pontos?

d) quantos heptágonos podemos formar com vértices nesses pontos?

55) Das 52 cartas de um baralho, quantos agrupamentos de 5 cartas podemos formar, de forma que cada agrupamento contenha exatamente 3 ases?

56) Uma construtora tem 3 engenheiros e 6 técnicos. Há necessidade de formar grupos de trabalho com 5 pessoas, sendo que cada grupo deve conter por 2 engenheiros e 3 técnicos. Determine o número de grupos de trabalho que essa construtora pode formar.

57) Um professor de matemática dispõe de 7 questões de álgebra, 5 de geometria e 4 de aritmética. De quantas maneiras distintas o professor pode elaborar um teste que tenha 3 questões de álgebra, 2 de geometria e 2 de aritmética?

Jaques Bernoulli

Jaques Bernoulli (1654-1705) conhecido também por James (forma aglicizada) ou Jakob (em alemão) nasceu e morreu na Basiléia, Suíça. Pertenceu a família Bernoulli que mais produziu matemáticos de renomes na história. Os matemáticos Bernoullis juntos com Leibniz, deixaram contribuições escritas, principalmente, em artigos e em revistas.

O mais antigo documento substancial sobre a teoria das probabilidades é o Ars Conjectadi (ou Arte de conjecturar), um clássico, escrito por Jaques Bernoulli e publicado em 1713. Essa obra está dividida em quatro partes, a primeira parte contém o trabalho de Huygens, ou seja, De ludo aleae, com comentários de Bernoulli, na segundo parte encontramos uma teoria geral de permutações e combinações, com a utilização do teorema binomial e multinomial, além da primeira prova adequada do teorema binomial para potências inteiras positivas e essa prova foi dada por indução matemática. As outras duas últimas partes, são dedicadas a resolução de problemas de probabilidades.

Gottfried Wilhelm Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nasceu em Leipzig, Alemanha. Estudou direito, teologia, filosofia e matemática na universidade. Como já foi citado, um dos criadores do cálculo. Começou a desenvolver a *characterisca generalis*, ou seja, concepção de uma matemática universal.

A contribuição de Leibniz para a Análise Combinatória foi devido a generalização do teorema binomial para o teorema multinomial, que consiste em realizar a expansão de

$$(x + y + \cdots + z)^n$$

Pierre Simon de Laplace

Pierre Simon de Laplace (1749-1827), de origem humilde, protestante, com trabalhos importantes realizado em astronomia e matemática. Foi um dos principais matemáticos da Revolução Francesa. Desempenhou em papel modesto no Comitê de Pesos e Medidas. Laplace se dedicou a teoria das probabilidades mais que qualquer outro. Escreveu diversos artigos sobre probabilidades, de modo que esses resultados foram anexados no clássico Théorie Analytique dês Probabilités em 1812. O clássico considera todos os aspectos e todos os níveis da teoria.

Em relação a teoria das probabilidades, certa vez Laplace se pronunciou:

"É notável que uma ciência que começou com considerações sobre jogos de azar se tivesse elevado ao nível dos mais importantes assunto do saber humano".

Abraham De Moivre

Abraham De Moivre (1667-1754), um francês Huguenote, que foi para a Inglaterra, depois da revogação do Édito de Nantes em 1685. Ganhava a vida na Inglaterra como professor particular de matemática.

Muitos matemáticos tiveram interesse pela teoria das probabilidades no início do século dezoito; entre eles De Moivre, que publicou a "*Doctrine of Chances*" (Doutrina do acaso), que continha questões sobre dados, o problema de pontos, retiradas de bolas de cores distintas de um saco, entre outros jogos. Desses problemas, alguns já tinham surgidos em *Ars conjectandi*, de Jacques Bernoulli; a obra continham também muita coisa sobre a teoria das probabilidades. É interessante dizer que à publicação de De Moivre, de modo geral, obtinha resultados da teoria das permutações e combinações usando os princípios de probabilidades. Porém hoje fazemos o contrário.

Em seguida, descrevemos um exemplo como isso acontecia.

Achar o número de arranjos de duas letras escolhidas entre as letras u, v, x, z, w.

Probabilidade de escolher uma letra particular é: $\frac{1}{5}$

Probabilidade de escolher outra letra específica ser a segunda: $\frac{1}{4}$

Daí, a probabilidade de aparecerem essas duas letras nessa ordem é: $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

De onde se conclui que o número de arranjos possíveis, duas a duas, é 20.

Em 1730, De Moivre publicou um outro volume intitulado *Micellanea Analytica*, com contribuições à probabilidades e também pela cooperação com o desenvolvimento do lado analítico da trigonometria. De Moivre só não superou Laplace em suas contribuições à teoria das probabilidades.

Cálculo do número de permutações com elementos repetidos

Vamos formar todos os anagramas da palavra OVO.

OVO, OOV, VOO

Se todas as letras fossem distintas (por exemplo O_1 e O_2) teríamos $P_3 = 6$ anagramas, ou seja:

O_1VO_2	O_2VO_1
O_1O_2V	O_2O_1V
VO_1O_2	VO_2O_1

Como duas dessas letras são iguais temos $\frac{P_3}{2!}$ permutações de 3 elementos onde 2 são iguais.

Indicamos o número de permutações de 3 elementos onde 2 são iguais por P_3^2, isto é, $P_3^2 = \frac{P_3}{2!} = \frac{3!}{2!} = 3$.

Generalizando

Com n elementos, onde α elementos são iguais, o número de permutações é dado por:

$$P_n^\alpha = \frac{n!}{\alpha!}$$

Podemos generalizar ainda mais, para n elementos, onde α são iguais de um tipo, β são iguais de um outro tipo, o número de permutações é dado por:

$$P_n^{\alpha,\beta} = \frac{n!}{\alpha!\beta!}$$

E assim por diante.

Exercícios resolvidos

1) Obtenha o número de anagramas da palavra PAPAGAIO.

Resolução

A palavra considerada tem 8 letras, das quais três letras A, duas letras P, uma letra G, uma letra I e uma letra O. Assim:

$$P_8^{2,\,3} = \frac{8\,!}{2\,!\,3\,!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\,!}{2\cdot 1\cdot 3\,!} = 3360$$

Logo, 3360 anagramas.

2) Dada a palavra ATUAL, responda:

a) quantos anagramas podemos formar?

b) quantos anagramas começam com a letra A?

Resolução

a) A palavra ATUAL tem 5 letras, das quais, duas letras A, as demais letras só aparecem uma vez. Assim:

$$P_5^2 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 60$$

Logo, podemos formar 60 anagramas.

b) Fixando a letra A e fazemos as permutações das demais letras distintas, temos:

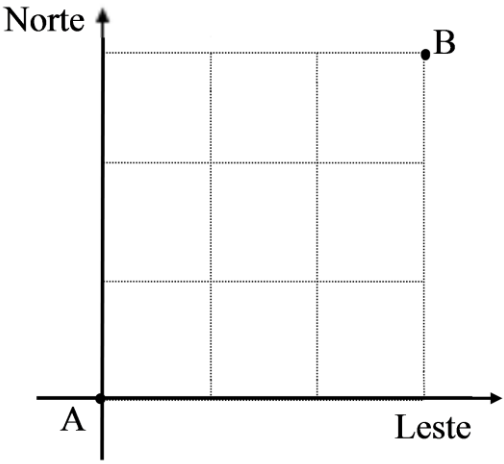
$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Outra resolução

1ª etapa (escolha da letra A) 1 possibilidade; 2º etapa (escolha as demais letras) 24 possibilidades. Como foi uma ação composta por duas etapas, de acordo com o PM, vem: $1 \cdot 24 = 24$.

Logo, o número de anagramas que começam com a letra A é 24.

3) Quantos caminhos existem para sair de um ponto A e chegar a um ponto B, caminhando uma unidade de cada vez para o Norte ou para o leste, conforme a figura?



Resolução

Considere n indo para o norte e l indo para leste.

Um caminho possível, saindo de A e chegando a B, nas condições dadas, é $n\,n\,n\,n\,l\,l\,l.$ O número de permutações desses 7 elementos, onde 4 são iguais a n e 3 iguais a l é igual ao número de caminhos de sair de A e chegar a B, isto é:

$$P_7^{4,\,3} = \frac{7\,!}{4\,!\,3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\,!}{4\,!\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 35$$

Logo, existem 35 caminhos.

4) Um vendedor ambulante vende panos de pratos do mesmo modelo, porém com 5 opções de cores: branca,

amarela, verde, lilás ou rosa. De quantas maneiras possíveis um cliente pode comprar 3 panos de prato?

Resolução

O cliente pode comprar os três panos de prato da mesma cor, ou quem sabe dois de mesma cor e o terceiro de outra, ou ainda, comprar cada um de uma cor diferente. Fazendo B o número de panos de prato na cor branca, A o número de panos de prato da cor amarela, V o número. de panos de prato na cor lilás e R número de panos de prato na cor rosa.

B, A, V, L e R são números naturais que podem variar, cada um, de zero a três. A solução do problema é equivalente ao número de solução da equação

$$B + A + V + L + R = 3$$

$\bullet \mid \bullet \mid \bullet \mid \quad \mid$ ou 1 1 1 0 0 (significa 1 pano branco, 1 azul, 1 verde, nenhum lilás e nenhum rosa). De modo análogo, temos outras soluções:

$\bullet \; \bullet \mid \quad \mid \; \bullet \; \mid \quad \mid$ ou 2 0 1 0 0

$\mid \bullet \bullet \bullet \mid \quad \mid \quad \mid$ ou 0 3 0 0 0

As permutações de 7 símbolos, com 3 iguais a $\bullet$ e outros 4 iguais a $\mid$ é:

$$P_7^{3,\,4} = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1\,4!} = 35$$

Logo, um cliente pode comprar de 35 maneiras.

Comentários

1º) A representação de B, A, V, L e R, poderia ter sido feita, respectivamente, por x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5.

2º) Usamos 4 traços para separar 5 incógnitas, para 6 incógnitas usaríamos 6 traços e podemos continuar pensando dessa forma.

Exercícios propostos

58) Quantos anagramas da palavra ARARUAMA, começam com a letra A?

59) Dada apalavra ALIANÇA, responda:

a) qual o número de anagramas da palavra que começam pela letra A?

b) qual o número de anagramas da palavra que começam e terminam pela letra A?

c) qual o número de anagramas da palavra que começam por vogal e terminam por vogal?

d) qual o número de anagramas da palavra que começam por L e terminam pela letra I?

60) Permutando de todas as formas possíveis os algarismos do número 4344232, quantos números distintos podemos formar?

61) Uma moeda é lançada 5 vezes, em quantas dessas sucessões aparecem 3 caras e 2 coroas?

62) Um dado é lançado 4 vezes, determine quantas sequências diferentes de resultados em que três faces são iguais a 2 e uma igual a 5.

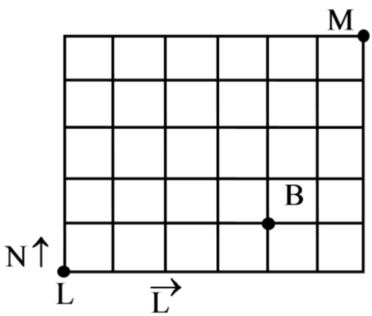
63) Uma palavra é formada por uma letra B, 2 letras N e n letras A. Permutando as letras dessa palavra obtemos 60 anagramas. Qual o valor de n?

64) Quantos números pares obtemos permutando-se as algarismos 1, 2, 2, 3, 3 e 4?

65) Quantas soluções inteiras não-negativas tem a equação $x + y = 5$?

66) Obter número de soluções inteiras não-negativas da equação $x + y + z = 7$.

67) A figura a seguir representa um condomínio, onde L, B e M indicam as casas de Luíza (L), Beatriz (B) e Mateus (M). Luíza vai à casa de Mateus estudar matemática, mas antes vai passar pela casa de Beatriz. Determine o número de caminhos diferentes que Luíza pode fazer, caminhando uma unidade de cada vez para o norte ou para leste?



68) De quantas formas diferente podemos dividir 9 bombons entre 3 pessoas, sendo que qualquer uma delas pode não receber bombons ou receber todos os bombons? (Os bombons dados devem ser inteiros)

69) Uma confeitaria vende três tipos especiais de doces. De quantas formas uma pessoa pode comprar 4 doces especiais?

Capítulo 4: Aspectos do nosso tempo e a moderna teoria dos grafos

Embora a nossa preocupação esteja voltada à análise combinatória do ensino médio, não podemos deixar de expor uma noção sobre algumas das novas e poderosas técnicas de contagem que surgiram e são estudadas a nível universitário. Os tipos de problemas combinatórios que foram surgindo, levaram à necessidade de criação dessas novas técnicas para atacá-los. Entre essas novas e importantes técnicas, encontram-se a das funções geradoras, a teoria das partições, o princípio de Dirichlet, o princípio da inclusão-exclusão. Por último, apresentaremos como foi o início da moderna teoria dos grafos.

Nas últimas décadas a análise combinatória vem tendo um crescimento muito grande. Suas aplicações são cada vez mais vinculadas ao cotidiano, a fenômenos naturais, às questões do mundo real que estão cada vez mais complexas.

A origem das funções geradoras

Estudamos os arranjos, as permutações e as combinações que são técnicas de contagem mais usadas e com várias aplicações. Contudo, ainda existem outras técnica de contagem importantes como as funções geradoras.

As funções geradoras estão no rol das principais ferramentas para resolver problemas de contagem, em destaque aqueles em que os objetos selecionados podem ser repetidos. Esta técnica originou-se nos trabalhos de Abraham De Moivre. Muitos outros matemáticos aplicaram esta técnica em seus trabalhos; entre eles, L. Euler que a usou, principalmente na teoria de partições, S. Laplace em probabilidades e N. Bernoulli (1687-1759) em estudos de permutações caóticas.

Em estudos já realizados, sabemos como obter o número de raízes inteiras não-negativas de uma equação da forma $x_1 + x_2 + x_3 = b$ $(b \in \mathbb{N})$. Agora a novidade é impor restrição as raízes de uma equação dessa forma.

Vamos resolver o problema: Obter o número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 8$, onde $x_1, x_2 \in \{1, 2, 3\}$ e $x_3 \in \{4, 5\}$.

Resolução

Para cada variável vamos considerar os polinômios:

$P_1 = x^1 + x^2 + x^3; P_2 = x^1 + x^2 + x^3$ e $P_3 = x^4 + x^5$. Note que os expoentes de x em P_1 e P_2 são elementos de $\{1, 2, 3\}$ e os expoentes de P_3 são elementos de $\{4, 5\}$.

A soma das variáveis da equação é 8 e para cada variável a raiz está no conjunto dos expoentes dos polinômios P_1, P_2 e P_3.

Façamos o produto $P(x) = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$. Assim:

$$P(x)=\left(x+x^2+x^3\right)\cdot\left(x+x^2+x^3\right)\cdot\left(x^4+x^5\right)$$

Após a multiplicação e a redução dos termos semelhantes, encontramos:

$$P(x)=x^6+3x^7+5x^8+5x^9+3x^{10}+x^{11}$$

A equação $x_1+x_2+x_3=8$ tem 5 soluções, de acordo com as restrições dadas, isto é, $x_1, x_2\in\{1, 2, 3\}$ e $x_3\in\{4, 5\}$.

Note que 5 é o coeficiente do termo x^8 e fazendo $x^8=x^1\cdot x^2\cdot x^5$, nós encontramos uma das soluções da equação $(1, 2, 5)$, ou seja, $x_1=1, x_2=2$ e $x_3=5$; fazendo $x^8=x^2\cdot x^2\cdot x^4$, temos outra solução $(2, 2, 4)$. Percebemos que a maneira de obter x^8, fornece-nos uma solução da equação. Assim, fazendo $x^8=x^1\cdot x^3\cdot x^4$, $x^8=x^2\cdot x^1\cdot x^5$ e $x^8=x^3\cdot x^1\cdot x^4$, encontramos, respectivamente, as demais soluções: $(1, 3, 4)$, $(2, 1, 5)$ e $(3, 1, 4)$.

Diz-se que o polinômio $P(x)=x^6+3x^7+5x^8+5x^9+3x^{10}+x^{11}$, é a função geradora do problema dado. A função geradora $P(x)$, gera o número de soluções para qualquer equação da forma $x_1+x_2+x_3=b$, onde $b\in\{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ e considerando as restrições dadas as variáveis. Por exemplo: $x_1+x_2+x_3=6$ tem uma solução, pois o coeficiente de x^6 é 1; $x_1 + x_2 + x_3 = 10,$ tem 3 soluções, o coeficiente de x^{10} é 3.

Sequência de Fibonacci

Considere a sequência $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \cdots, x, y, x+y, \cdots)$.

Observamos que cada termo da sequência, a partir do terceiro, é obtido pela soma dos dois anteriores. Essa sequência é denominada de sequência de Fibonacci, cuja origem está no livro Líber Abaci, escrito em 1202, pelo matemático Leonardo Fibonacci (cerca de 1180-1250), também conhecido como Leonardo de Pisa. Que foi o matemático mais talentoso da Idade Média.

Nos séculos que se sucederam a sequência, diversas propriedades foram encontradas. Os matemáticos Abraham de Moivre, Daniel Bernoulli e Jaques Philipe Marie Binet, mostraram como encontrar diretamente os números de Fibonacci, sem ter a necessidade de calcular um por um, até onde quisermos. A realização do feito, deve-se a De Moivre que usou pela primeira vez uma técnica poderosa: a das funções geradoras. Euler desenvolveu mais ainda essa técnica e a utilizou para resolver problemas de partições de um inteiro.

Teoria das partições

Uma pergunta feita a Euler, através de uma carta do matemático francês Phillipe Naudê; onde está escrito:

De quantas formas um número inteiro pode ser escrito como soma de inteiros? Com esta pergunta, foi dada a largada para a “Teoria das Partições” ou como diria Euler, seu fundador “Partitio Nuraerorum”.

Uma partição de inteiro positivo n é uma coleção de inteiros positivos cuja soma é n; denotamos por $p(n)$ o número de partições de n.

Partições de 3

$1+1+1$

$1+2$

3

Logo, o número de partições de 3 é 3, isto é, $p(3)=3$.

Partições de 4

$1+1+1+1$

$1+1+2$

$2+2$

!+3

4

Logo, $p(4)=5$.

Partições de 20

$p(20)=627$.

Existe uma fórmula, somente alcançada no século XX, para a obtenção de $p(n)$; que veio do resultado dos matemáticos S. Ramanujan, G. H. Hardy e H. Rademacher. Contudo, salientamos que o matemático indiano Ramanujan coube as principais ideias para obter a fórmula.

Princípio de Dirichlet

Peter Gustav Lejenune Dirichlet (1805-1859) nasceu em Düren, na Alemanha; foi ex-aluno de Gauss, trabalhou com matemáticos do seu país e da França. Em 1834, formulou o “Princípio de Dirichlet”, também conhecido como “Princípio das gavetas” ou ainda “Princípio das gavetas de Dirichlet”.

Como já citamos, existem basicamente em análise combinatória. os problemas de contagem e os de existências. Sendo que o segundo problema tem a preocupação em determinar a existência ou não de conjuntos que satisfazem a certas condições. O princípio de Dirichlet é uma ferramenta poderosa e simples, para resolver vários problemas de existência em combinatória. Seu enunciado evidencia que: Se n objetos forem colocados em no máximo $n-1$ gavetas, então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos.

Considerando o princípio anterior, pode-se afirmar que numa sala com 13 pessoas, pelo menos duas entre elas fazem aniversário no mesmo mês.

Princípio da inclusão e exclusão

O princípio da inclusão e exclusão também resolve vários problemas de existência em combinatória. O princípio é uma fórmula para encontramos o número de elementos da união de conjuntos finitos. Já estudamos a fórmula na sua versão mais simples para dois conjuntos A e B, é:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Veremos aqui mais um exemplo de como podemos usar esse princípio.

Quantos números inteiros de 1 até 200, são divisíveis por 3 ou 7?

Resolução

Utilizemos a notação $[x]$ para indicar o maior inteiro menor ou igual ao real x.

Consideremos também que A é o conjunto dos naturais divisíveis por 3, de 1 até 200. B conjunto dos naturais divisíveis por 7, de 1 até 200.

Queremos $n(A \cup B)$, ou seja:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Assim:

$n(A)=\left[\frac{200}{3}\right]=66$ divisores de 3, $n(B)=\left[\frac{200}{7}\right]=28$ divisores de 7 e $n(A\cap B)=\left[\frac{200}{21}\right]=9$ divisores de 3 e 7, ao mesmo tempo.

$n(A\cup B)=66+28-9=85$

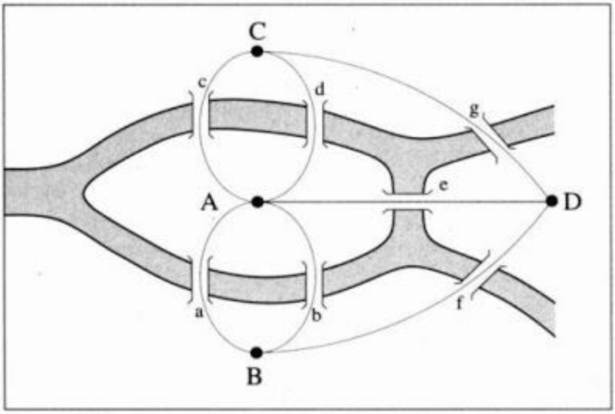
Logo, são 85 números.

O começo da teoria das grafos

Em 1736, Euler foi o primeiro matemático a resolver um problema conhecido como “o problema das sete pontes de Königsberg”; que provocou muitos debates na época. O problema consistia na seguinte pergunta: Seria possível um passeio pela cidade de Königsberg, passando uma vez e somente uma por cada ponte e voltar ao ponto de partida?

A cidade de Königsberg, na Alemanha, é famosa pelas sete pontes que cruzam o rio Pregel, de modo que essas pontes fazem a ligação entre duas ilhas, conforme a Figura 15.

Figura 15: pontes de Königsberg



Fonte: <http://autoentusiastas.com.br/2010/08/folguedo-pontes-e-navegador-de-posicionamento-global-por-satelite/>. Acesso 17/11/2014

Euler provou, em1735, que a questão das pontes de Königsberg não tem resposta positiva. A partir desse problema foi gerada a teoria das grafos, onde os primeiros matemáticos que estudaram o assunto e alcançaram bons resultados foram, além de Euler, G. Kirchhoff (1824–1887) e A. Cayley (1821-1895). Essa teoria é relativamente recente na história da matemática e de grande aplicabilidade; pois é utilizada para a resolução de diversos problemas que podem ser modelados matematicamente. Como, exemplos, problemas de Educação, Engenharia Elétrica, Medicina, Agronomia, Odontologia, de Pesquisa Operacional, de Armazenamento em Bancos de dados nos computadores e incluindo problemas de matemática pura.

Diante do exposto, afirmamos que a análise combinatória não é uma matemática pronta e acabada, muito pelo contrário. Renova-se com amplas e diversificadas técnicas de contagem, além de um número cada vez maior de aplicações, algumas apresentadas neste trabalho. Podemos considerar aplicações na formação de senhas, em química, física, biologia, economia, ciências sociais, na confecção de um retrato falado, nas loterias federais e muitas outras. Devemos tudo isso à criação humana, pois ao longo da História, muitos homens das Ciências ou não, colaboraram para alcançar o patamar de desenvolvimento que temos hoje.

Exercícios variados de combinatória

A seguir vem um variedade de exercícios combinatórios que o ajudarão na consolidação e aprofundamento do estudado da análise combinatória.

70) Um “bit” é um dos algarismos 0 ou 1, na linguagem de um computador digital. Uma palavra, nessa linguagem, é uma sequência de “bits”. Determine o número de “palavras” distintas de 10 “bits”.

71) O rei Dário da Babilônia dividiu o país em províncias e escolheu homens igualmente preparados para serem autoridades. Para a última província o rei tinha a sua disposição 10 homens, dentre eles Ciro, a quem o rei já tinha determinado que seria um dos ministros da província. O rei precisava de um para o cargo de governador, 6 para ministro e 3 para prefeito. De quantas maneiras o rei pode formar essa equipe de autoridades?

72) Obter $A_{n,4}$, sabendo que $C_{n,4} = 504$.

73) De quantos modos posso formar uma fila, lado a lado, com duas mulheres e cinco homens, de modo que as duas mulheres nunca apareçam juntas?

74) Quantos anagramas da palavra $SAGRADA$ começam e terminam por A?

75) Em uma instituição de ensino trabalham 15 professores de matemática. A instituição pretende formar uma equipe com três destes professores para a elaboração de uma prova, destinada à olimpíada de matemática institucional. Determine:

a) de quantas formas a equipe de professores pode ser formada?

b) de quantas formas a equipe de matemática pode ser formada, sendo que um determinado professor, dentre os 15, fará parte de todas equipe de 3 formadas?

76) Uma sala tem 5 lâmpadas, que podem ser acessas independentes uma da outra. De quantos modos pode ser iluminada essa sala?

77) Num campeonato de judô há dez competidores. Cada competidor terá que lutar com cada um dos demais competidores. Determine o número de lutas que deve ocorrer, entre os competidores.

78) Um dado é lançado 6 vezes. Determine o número de sequências que aparecem quatro faces iguais a 2 e duas faces iguais a 6.

79) Quantas funções $f : A \to B,$ podem ser definidas, onde $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$?

80) Quantas funções bijetoras $f: A \to B,$ podem ser definidas, onde $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$?

81) Quantos números naturais há entre 1000 e 9999 cujos algarismos são distintos?

82) O técnico da seleção brasileira de futebol tem a sua disposição para formar o time que entrará em campo, 3 goleiros, 4 zagueiros, 6 meios de campo e 4 atacantes. Determine de quantos modos é possível colocar a seleção em campo, com 1goleiro, 3 zagueiros, 4 meios de campo e 3 atacantes.

83) Determine o número de todos os números naturais de 5 algarismos, tais que o algarismo 4 aparece 2 vezes e o algarismo 5 aparece 3 vezes.

84) Considere o quadro abaixo:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & S \\
 & & & & S & I \\
 & & & S & I & M \\
 & & S & I & M & O \\
 & S & I & M & O & N \\
S & I & M & O & N & E
\end{array}$$

De quantos modos podemos formar a palavra "$SIMONE$"

começando de um S e indo sempre para a direita ou para baixo.

85) Na pastelaria do Onésimo vende pastéis com opções de recheio de carne, queijo, camarão ou banana, não sendo dada a opção de mistura de recheios. De quantas formas uma pessoa pode comprar 7 pastéis?

86) Um dos jogos das Loterias Federais é a Quina, onde o apostador pode apostar em 5, 6 ou 7 números, de 1 até 80 (o premio é dado a quem acertar 3, 4 ou 5 dos números escolhidos). Determine o número de apostas distintas que um apostador pode fazer, escolhendo (ou apostando) em 7 números.

87) Sobre uma circunferência, tomam-se 10 pontos distintos. Quantos quadriláteros podemos formar com vértices em 4 desses pontos?

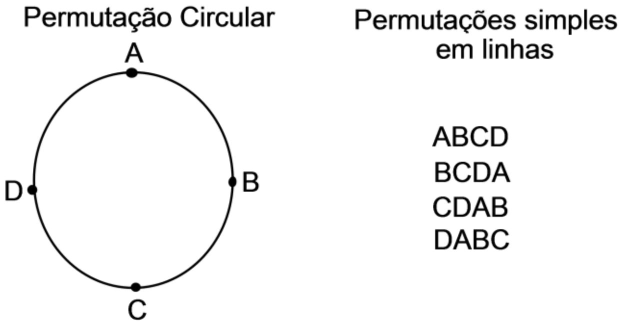
88) Uma moeda é lançada 4 vezes sucessivas. Determine o número de sucessos de faces obtidas.

89) Uma urna contém 10 bolas das quais 6 são vermelhas e 4 brancas. De quantos modos podemos retirar 6 bolas da mesma urna, das quais 3 são brancas?

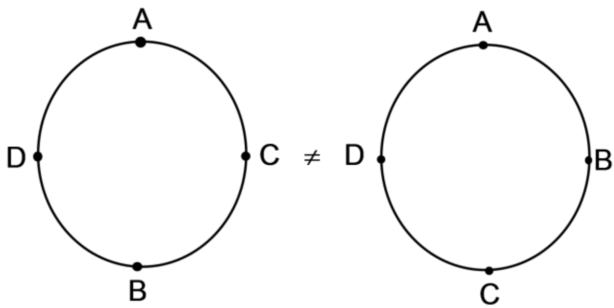
90) De quantos modos podemos dispor 4 pessoas ao redor de uma mesa redonda?

Resolução

Quando temos elementos dispostos ao redor de um circulo, temos uma permutação circular.



Uma permutação circular gerou quadro permutações simples em linhas



Para saber se duas permutações circulares são idênticas, pegamos o mesmo elemento das duas e permutamos (sempre a partir de um mesmo elemento), percorremos no sentido anti-horário, encontramos as mesmas sequências de elementos.

Através de uma regra de três, temos:

permutações circulares de 4 elementos (indicamos por: $P_{c(4)}$)	permutações simples em linha de 4 elementos
1	4
$P_{c(4)}$	$4!$

$$1 \cdot 4! = P_{c(4)} \cdot 4$$

$$P_{c(4)} = \frac{4!}{4} = \frac{4 \cdot 3!}{4} = 3! \qquad \therefore \; P_{c(4)} = 6$$

Generalizando

Através de uma regra de três, vem:

Permutações circulares	Permutações simples em

de n elementos distintos	linha de n elementos distintos

$$1 \text{ ———— } n$$
$$P_{c(n)} \text{ ———— } n!$$

$$P_{c(n)} \cdot n = n! \cdot 1 \Rightarrow P_{c(n)} = \frac{n!}{n} = \frac{n \cdot (n-1)!}{n} = (n-1)!$$

$$P_{c(n)} = (n-1)!$$

91) De quantos modos 7 crianças podem formar uma roda?

92) Qual é o número de maneiras que 12 pessoas podem sentar ao redor de uma mesa circular?

93) Uma prova de atletismo será disputada em uma pista circular, onde os juízes podem ser distribuídos de 120 maneiras distintas. Qual o número de juízes que terá esta prova?

94) Uma família é formada pelo pai, a mãe, dois meninos e três meninas foram a um restaurante, sentaram em torno de uma mesa redonda, o pai e a mãe sempre ficam

juntos. De quantos modos diferentes a família pode ter ficado ao redor da mesa?

95) Determine o número de divisores naturais de 108.

Resolução

$108 = 2^2 \cdot 3^3$

Os divisores naturais de 108 são da forma $2^x \cdot 3^3$, onde $x \in \{0, 1, 2\}$ e $y \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Exemplo

$2^0 \cdot 3^2$ é divisor de 108 (ou $2^2 \cdot 3^3$)

$2^2 \cdot 3^1$ é divisor de 108 (ou $2^2 \cdot 3^3$)

Para encontrarmos o número de divisores de 108, temos que encontrar o número de pares ordenados (x, y). Assim:

$$\begin{matrix} (x, & y) \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$

Possibilidades: 3 4

Pelo PM, vem: $3 \cdot 4 = 12$

Logo, 12 é o número de divisores de108.

96) Qual o número de divisores naturais do número 360?

97) Obter o valor do número natural n, sabendo que $N = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^n$ possui 24 divisores naturais.

98) No meu trabalho tem 4 pessoas que gostam de jogar baralho. De quantas formas distintas posso convidar uma ou mais dessas pessoas para um jogo, após o expediente?

99) A academia de atividades físicas do professor Cláudio tem 600 alunos e entre diversas atividades, oferece 3 modalidades de lutas: KICK-BOXING(k), MUAY-THAY(M) e JIU-JITSU(J). Sabendo que 85 alunos praticam K, 100 M, 90 J, 40 K e M, 50 M e J, 45 K e J, 30 K, M e J, responda:

a) quantos alunos praticam somente K?

b) quantos alunos praticam somente M?

c) quantos alunos praticam somente J?

d) quantos alunos não praticam nenhuma das três modalidades de lutas?

100) Numa lagoa existem cinco espécies de peixes: tilápia, lambari, acará, pacu e apapá. Determine:

a) de quantos modos distintos uma pessoa pode fazer uma peixada com três dessas espécies?

b) de quantos modos distintos uma pessoa pode fazer uma peixada com três dessas espécies, incluindo sempre o acará?

Respostas dos exercícios

Capítulo 2

1) 200. 2) 560. 3) 6. 4)12. 5)16. 6) a) 64; b) 24; c) 6; d)16; e) 48. 7) 18; 6 respectivamente. 8) 648. 9)72. 10) 900. 12) 63. 13) 8. 14) 5^8. 16) 32.

17) 175 760 000. 18) a) 84; b) 60. 19) a) 52; b) 48; c) 30. 20) 324. 21) 240. 22) 220. 23) a)193; b) 301; c) 300; d) 300; e) 300; f) 300; g) 300; h) 300; i) 300; j) 300.

Capítulo 3

24) a) 7; b) 30; c) 720; d) 5544; e) 35; f) 264; g) 190; h) 10403.

25) a) $\frac{20!}{16!}$; b) $\frac{12!}{9!}$; c) $\frac{(n-2)!}{(n-4)!}$.

26) a) $\frac{1}{n+1}$;b) n; c) $(n+2)(n+1)$; d) $(n+2)(n+1)n$; e) $n!$

27) a) $\{6\}$; b) $\{5\}$; c) $\{6\}$; d) $\{2\}$; e) $\{4\}$. 28) $n=3$. 29) 1200. 30) 24. 31) $n=3$. 32) 24. 33) 24. 34) 60. 35) a)720; b) 120; c) 24. 36) 7351. 37) 2880. 38) 1728. 39) 17. 40) 74. 41) 72. 42) 15. 43) 35. 44) 3150. 45) 175032. 46) 6. 47) 190. 48) 9 49) 21. 50) 74. 51) 5775. 52) 18. 53) 70. 54) a) 35; b) 21; c) 7; d) 1. 55) 4512. 56) 60. 57) 2100. 58) 70.

59) a) 360; b) 120; c) 240; d) 20. 60) 210. 61) 10. 62) 4. 63) 3. 64) 90. 65) 6. 66) 36. 67) 75. 68) 55. 69) 15.

Capítulo 4

70) 1024. 71) 504. 72) 126. 73) 3600. 74) 120. 75) a) 455; b) 91. 76) 31. 77) 45. 78) 15. 79) 64; 80) 6. 81) 4536. 82) 720. 83) 10. 84) 32. 85) 120. 86) 3176716400. 87) 210. 88) 16. 89) 35 91) 720. 92) $11!$. 93) 6. 94) 240. 96) 24. 97) 3 98) 15. 99) a) 30; b) 40; c) 25; d) 430. 100) a) 10; b) 6.

REFERÊNCIAS

BACHX, A.C., Poppe, L.M.B., Tavares. R.N.O. **Prelúdio à Analise Combinatória**.Companhia Editora Nacional, 1975. 234p.

BASTOS, A.C. **Ensino da Análise Combinatória a Partir de uma Abordagem Histórica e Resolução de Problemas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino das Ciências na Educação Básica). Universidade do Grande Rio – UNIGRANRIO – RJ, 2015.

BIGGS, N. L. The roots of combinatorics. **Revista História Mathemática**. Vol. 6.1979, p. 109-136.

BOYER, CARL B. **História da Matemática**. 2. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blüche/Edusp, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC / SEF, 1997. 142p.

DOMININGUES, H. H. **Fundamentos de aritmética**. São Paulo, Atual, 1991.

DOMINGUES, H. H., **A gênese da teoria das probabilidades**. In Iezz et al. Matemática: 2°. Série, 2º. grau, 8 ed. rev. São Paulo, atual, 1990, p.155), EVES, HOWARD. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Higino H. Domingues. Campinas. Unicamp, 1995.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar. V. 5**: Combinatória, Probabilidade.São Paulo. Atual, editora, 1977.

LAMONATO, M., PASSOS, C. L. B. Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino de matemática. **Zetetiké** – FE/Unicamp – v. 19, no 36 – jul/dez 2011.

LOPES, J. M.; REZENDE, J. T. C. Uma Proposta para o Estudo de Probabilidade no Ensino Médio. **Zetetiké** – FE/Unicamp – v. 19, n. 36 – jul/dez 2011.

GUNDLACH, B. H. **História dos números e numerais** / Bernard H. Gundlach; trad. Hygino H. Domingues. – São Paulo: Atual, 1992. – (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula; v. 1)

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. – 2º ed. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011 – 208 p. (Tendências em Educação Matemática).

MORGADO, A. C., CARVALHO, J. B. P., CARVALHO, C. P.,FERNANDES P. **Análise Combinatória e Probabilidade**, 9 ed. Rio de Janeiro – SBM, 2006.

IFRAH, G. **Os números: história de uma grande invenção**. Tradução de Stella Maria de Freitas Senra: revisão técnica Antonio José Lopes, Jorge José de Oliveira. – 11 ed. – São Paulo: Globo, 2005.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problema**. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro. Interciência, 2006.

SANTOS, J. P. O., MELLO, M. P. e MURARI, I. T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. Rio de Janeiro. Editora Ciência Moderna Ltda, 2007.

TAHAN, M. **Antologia da Matemática, 2º. Volume**, 2º. Edição. - São Paulo, edição Saraiva, 1965.

TAVARES, C.S.; BRITO, F.R.M. Contando a História da Contagem. **Revista do professor de Matemática** SBM V-57, junho,2005.

<http//www.mat.ufrgs.br/~potosil/histo2b.html>.

Acesso em 11/12/2013

<http://www.malhatlantica.pt/mathis/india/bhaskaraii.htm>.

Acesso em 11/12/2013