



UNIVERSIDADE DO GRANDE RIO
Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades
Programa de Pós-graduação em Ensino das Ciências
Curso de Mestrado Profissional

**DISTÂNCIA – AMPLIANDO SEUS HORIZONTES: UMA PROPOSTA
DE LIVRETO PARA UTILIZAÇÃO COMO ALTERNATIVA DIDÁTICA
PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA.**

RICARDO CERQUEIRA DE ABREU

Duque de Caxias

2020

**DISTÂNCIA – AMPLIANDO SEUS HORIZONTES: UMA PROPOSTA DE LIVRETO
PARA UTILIZAÇÃO COMO ALTERNATIVA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA MA-
TEMÁTICA.**

Ricardo Cerqueira de Abreu

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências da Universidade do Grande Rio, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre. Área de Concentração: Matemática.

Orientador:

Dr. Abel Rodolfo Garcia Lozano

Prof. Adjunto Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências Universidade do Grande Rio.

Duque de Caxias

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UNIGRANRIO – NÚCLEO DE COORDENAÇÃO DE BIBLIOTECAS

A162d

Abreu, Ricardo Cerqueira de.

Distância – Ampliando seus horizontes: uma proposta de livreto para utilização como alternativa didática para o ensino da matemática / Ricardo Cerqueira de Abreu. – Duque de Caxias, 2020.

110 f. : il. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básica) – Universidade do Grande Rio “Prof. José de Souza Herdy”, Escola de Educação, Ciências, Letras, Artes e Humanidades, 2020.

“Orientador: Prof. Dr. Abel Rodolfo Garcia Lozano”.

Referências: f. 92-95.

1. Educação. 2. Matemática – Ensino. 3. Geometria euclidiana. 4. Produto educacional. I. Lozano, Abel Rodolfo Garcia. II. Universidade do Grande Rio “Prof. José de Souza Herdy”. III. Título.

CDD – 370

RICARDO CERQUEIRA DE ABREU

DISTÂNCIA – AMPLIANDO SEUS HORIZONTES: UMA PROPOSTA DE LIVRETO PARA UTILIZAÇÃO COMO ALTERNATIVA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA.

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências na Educação Básica (PPGEC) da Universidade do Grande Rio como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre.

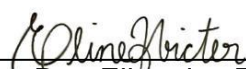
Aprovada em 31 de março de 2020, por:



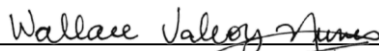
Prof. Dr. Abel Rodolfo Garcia Lozano (Orientador)
Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências
Universidade do Grande Rio (UNIGRANRIO)



Profa. Dra. Andrea Velloso da Silveira Praça
Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências
Universidade do Grande Rio (UNIGRANRIO)



Profa. Dra. Eline das Flores Victor
Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências
Universidade do Grande Rio (UNIGRANRIO)



Prof. Dr. Wallace Valtory Nunes
Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Rio de Janeiro
(IFRJ)

Dedico esse trabalho à minha família:
Minha mãe Arminda, que em todos os momentos esteve ao meu lado, ao meu irmão, Leandro, pelo apoio e carinho sempre, e ao meu pai José Vilmar, que está sempre ao meu lado zelando por mim.

“A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida.”

(Jacques Bernoulli)

AGRADECIMENTOS

Agradecer é o momento mais sublime depois de uma conquista, conquistas fazem com que você sinta que mais uma barreira foi vencida. E hoje é assim que me sinto, um vencedor por ter concluído mais uma etapa da minha formação como profissional, e acima de tudo o crescimento como pessoa;

Durante toda minha trajetória no Mestrado, algumas pessoas foram essenciais para que o sucesso fosse alcançado, e agora é a hora de agradecer a estas pessoas importantes e especiais durante essa trajetória, e que seja o início de algo bem maior, sem esquecer de viver o hoje e valorizar o fim de uma etapa.

Gostaria de agradecer primeiramente ao meu orientador Prof. Abel Rodolfo Garcia Lozano, que em todos os momentos críticos, de dúvidas existenciais, de literalmente total desespero sempre tinha uma saída para o acontecido. Pelo professor que admiro, competente, inteligente, atencioso sempre solícito aos meus anseios de desesperado.

Gostaria de agradecer a Prof.^a Eline das Flores Victor, mesmo não sendo minha orientadora, é minha professora amiga, que sempre contribuiu para que minha pesquisa pudesse tomar corpo, sempre atenciosa, atenta as minhas questões e dúvidas.

Aos meus colegas de mestrado e professores, em especial aos amigos que conheci no mestrado, Paulo e Evandro, eramos estranhos no ninho, os três alunos da matemática dividindo dúvidas, alegrias, frustrações, e muita conversa boa, que nos momentos mais críticos um amparava o outro, e sempre tinham uma palavra amiga e de incentivo que fazia tudo fluir, e sempre mostrando o lado positivo do processo.

Agradecer a minha noiva, Beatriz por aguentar literalmente meus maus momentos, aqueles que eu ficava chato e insuportável até mesmo pra eu me aturar. Meu muito obrigado.

Agradecer ao meu irmão Leandro, que sempre esteve junto de mim, e por sempre ajudar na reprodução dos materiais, me socorrendo nas suas máquinas de cópias, encadernação e corte.

Se esqueci de alguém por ventura, quero de todo meu coração agradecer por ter feito parte da minha trajetória.

E que venham novos desafios nessa caminhada que nunca se encerra.

APRESENTAÇÃO

Para iniciar este trabalho, farei uma retrospectiva sobre minha trajetória acadêmica e profissional, tais fatos motivaram a busca pelo mestrado profissional e à escolha do tema para realização do trabalho.

Bem, ao terminar o antigo 2º Grau na Escola Técnica Estadual Henrique Lage no ano de 1998, formado em Técnico em Eletrônica, veio a dúvida: o que fazer? Presentei vestibular no mesmo ano para duas Universidades Públicas: UERJ - FFP para o Curso de Licenciatura Plena em Matemática e UFF para o Curso de Engenharia Eletrônica. Claramente pode se ver que o caminho foi a Matemática. Faltando um ano para o término do curso, comecei a lecionar em uma escola privada, voltada para o Ensino Fundamental, leciono matemática na mesma unidade até os dias atuais. Após o término do curso de Licenciatura, fui convocado a assumir o cargo de docente de Matemática na Secretária de Estado de Educação do Estado do Rio de Janeiro (SEEDUC-RJ), cargo que ocupo atualmente com carga horária de 32 horas/aulas.

Depois de um tempo só lecionando, surgiu à vontade, a necessidade de andar mais na profissão, então busquei um Curso de Especialização, e a escolha foi pelo Curso de Novas Tecnologias para o Ensino da Matemática (NTEM-UFF), isto já tinha se passado seis anos de formado em Matemática. Despertando assim o interesse de continuar os estudos. Por acontecimentos, e desvios só voltei a procurar algo mais concretamente no ano de 2016, já haviam se passado quatro anos do término da Especialização.

Finalmente cheguei ao presente momento, após todas as etapas da seleção para o curso de mestrado na UNIGRARIO, e escolhido o orientador, em uma de nossas conversas a respeito do tema que trabalharíamos para o presente trabalho, depois de muito conversarmos, "BINGO" o tema escolhido foi: DISTÂNCIA. Fiquei maravilhado com as vertentes do tema, encantado como aquilo tudo estava oculto a mim. E quanto mais eu estudava, pesquisava, me reunia com colegas, com o Professor Abel, eu queria me aprofundar e descobrir.

Como o tema poderia ser inserido no meu contexto, precisava trazer o tema para mim, para o meu cotidiano. E como fazer isto? Esta foi uma de várias indagações que me ocorreram. Como resposta a esta indagação, veio a ideia de criar um material

que pudesse ser usado por professores de matemática, que muitos como eu não conhecia o tema, e poderia ser um estopim para novas descobertas, e um diferencial e sua prática docente.

RESUMO

ABREU, Ricardo Cerqueira de. **Distância – Ampliando seus horizontes**: Uma proposta de livreto para utilização como alternativa didática para o ensino da matemática. 2020. p.110. Dissertação (Mestrado). Pós-Graduação em Ensino das Ciências. Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades, Universidade do Grande Rio, UNIGRANRIO, Duque de Caxias. Rio de Janeiro. 2020.

O presente trabalho tem como objetivo desenvolver um produto educacional que possa auxiliar professores de matemática da educação básica em sua prática docente, para que eles possam abordar e aprofundar os conceitos de distância. Nesse intuito foi realizada uma pesquisa qualitativa, baseada na Técnica de Grupo Focal para discutir a utilização de materiais extraclasse por Professores de Matemática no ensino da Geometria na Educação Básica. Como instrumentos metodológicos de coleta de dados, foram utilizados uma oficina pedagógica no teste do protótipo do Produto Educacional, dois questionários semiestruturados e as discussões do grupo focal durante a validação do Produto Educacional. Os resultados obtidos nos mostram que a utilização de materiais extraclasse deve ser de maneira contextualizada no cotidiano dos alunos, gerando um melhor ensino dos conteúdos propostos. Esperasse que o presente trabalho possa contribuir para despertar o interesse por novas pesquisas, divulgando as Geometrias não Euclidianas, aprimorando a utilização de materiais extraclasse, e na tentativa de contextualizar os conteúdos no ensino da matemática na educação básica.

Palavras-chave: Matemática. Distância. Grupo focal. Oficina. Produto educacional.

ABSTRACT

ABREU, Ricardo Cerqueira de. **Distance - Expanding your horizons**: A booklet proposal for use as a didactic alternative for the teaching of mathematics. 2020. p. 110. Dissertation (Master's degree). Postgraduate in Science Teaching. School of Sciences, Education, Letters, Arts and Humanities, University of Greater Rio, UNIGRAN-RIO, Duque de Caxias. Rio de Janeiro. 2020.

The present work aims to develop an educational product that can assist teachers of mathematics of basic education in their teaching practice, so that they can approach and deepen the concepts of distance. In this sense, a qualitative research, based on the Focal Group Technique, was carried out to discuss the use of extraclass materials by Mathematics Teachers in the teaching of Geometry in Basic Education. As methodological instruments of data collection, a pedagogical workshop was used in the test of the educational product prototype, two semi-structured questionnaires and the discussions of the focus group during the validation of the Educational Product. The results obtained show us that the use of extraclass materials should be contextualized in the students' daily lives, generating a better teaching of the proposed contents. I hope that the present work can contribute to the awakening of interest in new research, disseminating non-Euclidean Geometries, improving the use of extraclass materials, and the attempt to contextualize the contents in the teaching of mathematics in basic education.

Keywords: Math. Distance. Focal group. Workshop. Educational product.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DCE – PR	Diretrizes Curriculares do Paraná
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FFP	Faculdade de Formação de Professores
GF	Grupo Focal
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
SEED	Secretaria de Estado da Educação do Paraná
PPGEC	Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências
TCLE	Termo de Consentimento de Livre e Esclarecido
UERJ	Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UFF	Universidade Federal Fluminense
UNIGRANRIO	Universidade do Grande Rio “Prof. José de Sousa Herdy”

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Postulado das paralelas	37
Figura 2 - Postulado das Paralelas simplificado	37
Figura 3 - Desigualdade Triangular	39
Figura 4 - Distância de XY	39
Figura 5 - Distância entre XZ.....	40
Figura 6 - Distância entre os pontos A e B	41
Figura 7 - Distância entre os pontos A e B (Distância de Manhattan)	42
Figura 8 - Grafo Padrão.....	44
Figura 9 - Cidades e suas distâncias	46
Figura 14 – História da Matemática.....	50
Figura 15 - O Quinto Postulado de Euclides	51
Figura 16 - Conceito de distância	51
Figura 17 - Conceito de Distância Euclidiana	52
Figura 18 - Conceito de Distância de Manhattan.....	52
Figura 19 - Conceito de Distância Geodésica	53
Figura 10 - Capa do livreto	62
Figura 11 - Questão ENEM 2013 - Distância Euclidiana	63
Figura 12 – Algoritmo de Dijkstra	64
Figura 13 – Sugestões de Leitura.....	65
Figura 20 - Resposta do participante A Questão 2, questionário 1	67
Figura 21 - Resposta do participante B, Questão 2, questionário 1	68
Figura 22 - Resposta do participante C, Questão 2, questionário 1	68
Figura 23 - Resposta do participante D, Questão 2, questionário 1	68
Figura 24 - Resposta do participante E, Questão 2, questionário 1	69
Figura 25 - Resposta do participante A, questão 2, questionário 2.	74
Figura 26 - Resposta do participante B, Questão 2, questionário 2	75
Figura 27 - Resposta do participante C, Questão 2, questionário 2	75
Figura 28 - Resposta do participante D, Questão 2, questionário 2	76
Figura 29 - Resposta do participante E, Questão 2, questionário 2	76
Figura 30 - Resposta do participante F, Questão 2, questionário 2.....	76
Gráfico 1 - Respostas da Questão 1, questionário 1	66

Gráfico 2 - Respostas da questão 3, questionário 1.....	70
Gráfico 3 - Respostas da questão 5, questionário 1.....	72
Gráfico 4 - Respostas da questão 3, questionário 2.....	78
Gráfico 5 - Respostas da questão 5, questionário 2.....	80

LISTA DE QUADROS E TABELAS

Quadro 1 - Etapas das fases de uma revisão sistemática.....	26
Quadro 2 - Protocolo da Revisão Sistemática	27
Quadro 3 – Resultados da busca	28
Quadro 4 - Axiomas e Postulados de Euclides.....	36
Quadro 5 - Definição de métrica.....	38
Quadro 6 - Vértices Adjacentes.....	44
Quadro 7 - Distância entre Cidades	45
Quadro 8 - Roteiro da Oficina.....	48
Quadro 9 - Características de um Grupo Focal	57
Quadro 10 - Questão 1 do questionário preliminar.....	66
Quadro 11 - Questão 2 do questionário preliminar.....	67
Quadro 12 - Questão 3 do questionário preliminar	70
Quadro 13 - Questão 4 do questionário preliminar.....	71
Quadro 14 – Questão 5 do questionário preliminar	72
Quadro 15 - Questão 6 do questionário preliminar.....	73
Quadro 16 - Questão 1 do questionário pós-oficina	74
Quadro 17 - Questão 2 do questionário pós-oficina	74
Quadro 18 - Questão 3 do questionário pós-oficina	75
Quadro 19 - Questão 4 do questionário pós-oficina	78
Quadro 20 - Questão 5 do questionário pós-oficina	79
Quadro 21 - Questão 6 do questionário pós-oficina	81
Quadro 22 - Resposta do participante 8.....	86
Quadro 23 - Resposta do participante 5.....	86
Quadro 24 - Resposta do participante 1.....	86
Quadro 25 - Resposta do participante 3.....	87

Quadro 26 - Resposta do participante 3.....	87
Tabela 1 - Distância das viagens partindo de A, e voltando a origem	46
Tabela 2 - Forma preferencial de acesso à conteúdos extraclasse pelos participantes da pesquisa.....	81
Tabela 3 - Idade dos Professores Participantes	82
Tabela 4 - Graduação dos Professores	84

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	19
2 OBJETIVOS	24
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	25
3.1 A utilização de materiais extraclasse no Ensino da Matemática	25
3.2 Geometria Euclidiana	35
3.3 Distância	38
3.3.1 Distância Euclidiana	40
3.3.2 Distância de <i>Manhattan</i>	42
3.3.3 Distância Geodésica	43
4 METODOLOGIA DE VALIDAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL	48
4.1 Validação e construção do Produto Educacional	48
4.1.1 Amostra	54
4.1.2 Coleta de dados	54
4.1.3 Análise de dados	55
4.2 Validação do Produto Educacional	55
4.2.1 Amostra	59
4.2.2 Coleta de dados	59
4.2.3 Análise de dados	60
5 PRODUTO EDUCACIONAL	61
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES	66
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	89
REFERÊNCIAS	92
ANEXOS	96
APÊNDICES	101

1 INTRODUÇÃO

Ao longo de nossa trajetória escolar, a Geometria estudada é baseada nas definições da Geometria Euclidiana, por consequência, o estudo da distância entre dois pontos, somos limitados a observação apenas no que tange a Geometria Euclidiana. (KALEFF; NASCIMENTO, 2004). Deste modo, conclui-se que a Distância Euclidiana é a única distância existente, iremos ao decorrer do trabalho, apresentar outras abordagens sobre o tema, e mostrar que em algumas situações ela não pode ser aplicada, e como consequência, a menor distância entre dois pontos não terá uma reta como sua representação geométrica.

Esta afirmação pode ser evidenciada em Kaleff e Nascimento (2004), quando os autores destacam que os conhecimentos geométricos são advindos exclusivamente da Geometria Euclidiana, e relata o desenvolvimento de outras teorias a partir de reconsiderações conceituais ao longo dos tempos, em virtude de novos conhecimentos com o desenvolvimento da Matemática e da ciência da Computação.

Na Educação Básica, o conceito de distância abordado, é o de Distância Euclidiana, isto pode ser evidenciado por conta do Mito de Euclides, de acordo com Davis e Hersh (1985):

É a crença de que os livros de Euclides têm verdades sobre o universo, claras e indubitáveis. Partindo de verdades evidentes, por si próprias e procedendo por demonstrações rigorosas, Euclides chega a conhecimento certo, objetivo e eterno. Mesmo agora parece que a maior parte das pessoas com instrução acredita no mito de Euclides. Até o meio ou fim do século dezanove, o mito reinava sem desafios. (DAVIS; HERSH, 1985, p. 366)

Ao longo do trabalho mostraremos algumas outras definições de distância, que são diferentes da Euclidiana, são oriundas das Geometrias não Euclidianas, ou ainda distâncias que fogem do conceito geométrico. As aplicações e conceitos podem ser utilizados como diferencial na busca da melhor compreensão, oferecendo uma gama de exemplos e aplicações de distâncias enriquecendo sua prática. O professor poderá fazer uso para suas pesquisas, para seu estudo, e assim agregando conhecimento, tornando a Geometria algo mais palpável, e observar com mais clareza os exemplos como algo aplicado ao seu contexto, e podendo ser ponto de partida para investigações futuras.

Um dos requisitos mais importantes a serem levados em consideração pelo professor no processo de ensino, é o de desenvolver meios de dinamizar a assimilação de conteúdos por parte dos alunos. Cabe ao professor planejar e refletir sobre quais são os melhores métodos e/ou abordagens a serem utilizadas para o ensino do tema a ser estudado, portanto, “o professor deverá ser um verdadeiro estrategista, o que justifica a adoção do termo estratégia, no sentido de estudar, selecionar, organizar e propor as melhores ferramentas facilitadoras para que os estudantes se apropriem do conhecimento” (ALVES, 2004, p. 69).

A pesquisa sobre o tema proposto se justifica, primeiramente, por conta do destaque da importância da Matemática em várias ciências, e por conta deste fato, a Geometria em suas abordagens distintas são relevantes para vida cotidiana de acordo com Parâmetros Curriculares Nacionais no nível médio.

A Matemática, por sua universalidade de quantificação e expressão, como linguagem portanto, ocupa uma posição singular. No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que a Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver. (BRASIL, 1999, p. 15)

Em seu trabalho, Toledo (2018), quando relata de sua atividade na Geometria do Táxi (Distância de *Manhattan*) utilizando polígonos e malha quadriculada, ao fazer a análise das atividades realizadas pelos alunos de maneira individual, obteve resultados satisfatórios em relação a proposta da atividade, e pela compreensão durante as aulas dos conteúdos envolvidos.

Em relação a material extraclasse, Toledo (2018), relata sobre sua experiência com os alunos na construção do jogo, e sua apresentação na feira cultural onde descreve o alcance de um grande número de pessoas jogando em um curto período, podendo haver adaptações para um tabuleiro de dimensões reduzidas, para ser utilizado na mesa do aluno, conseqüentemente, seu uso em sala de aula. E destaca que: “Claro que o trabalho do professor será maior do que o do cotidiano, porém a inovação

na educação é um assunto tratado nacionalmente, e muitas vezes um simples jogo de tabuleiro, um novo assunto, uma nova visão do espaço e da matemática podem propiciar isso.” (TOLEDO, 2018, p. 65).

Ficou evidenciado que o interesse do aluno foi maior quando existiu contextualização do conteúdo em seu cotidiano, de uma maneira mais clara, em uma situação real de suas vidas. Em relação a esta observação de Toledo (2018) em seu trabalho, a autora atinge um dos objetivos dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática no nível médio, que é “aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas” (BRASIL, 1999, p. 42).

De acordo com Martinez (2016), os benefícios da utilização de material extraclasse para o ensino da Matemática, propiciam uma melhor compreensão dos alunos, e complementa. “Para motivar o aluno do ensino fundamental e médio, devem-se acrescentar atividades que envolvam sua realidade, jogos de que ele possa participar com seus colegas, atividades contextualizadas, outras atividades que o incentivem e atividades inovadoras.” (MARTINEZ, 2016, p. 69).

Podemos destacar uma observação de Martinez (2016), referentes aos resultados obtidos no que trata do envolvimento e interesse do aluno em relação a criação das atividades propostas, evidenciando o “gostar” de estudar, ou seja, quanto mais os alunos participam e se envolvem na criação, e desenvolvimento das atividades, mais se sentem bem ao estudar.

De acordo com Brum e Da Silva (2015), que a produção de conhecimento é vista de forma linear, e aliena, em relação ao que tange o ensino, reforçando que Geometria não Euclidiana é exclusivamente para poucos privilegiados. Com isso não contempla o processo de construção, os erros, os conhecimentos superados, e ainda o entendimento de modelos. Limitando o entendimento do mundo que nós vivemos, deixando à deriva a contextualização no cotidiano.

Segundo Brum e Da Silva (2015, p. 12),

[...] a linguagem cotidiana é muitas vezes responsável pela disseminação de explicações não científicas, onde o estudante apresenta significado para imagens, símbolos, modelos e representações geométricas, permitindo uma compreensão do mundo que o cerca, a prática de ensino formal de Geometria em todos os níveis privilegia a memoriza-

ção de fórmulas e técnicas de resolução de problemas ainda fomentada nos alicerces da Geometria Euclidiana, ou seja, um ensino ainda centrado no plano e na exposição do professor.

Tomemos como início para nossa pesquisa, a seguinte hipótese: “ A utilização de um material extraclasse, no ensino de distância, mais especificamente, as distâncias: Euclidiana, *Manhattan* e Geodésica, contribui para o ensino da Matemática na Educação Básica.”;

O presente estudo tem natureza de confirmação de teorias dos autores citados na revisão de literatura, onde foi realizado o protocolo de revisão sistemática de acordo com Paula (2014).

O trabalho será dividido em sete seções, incluindo a introdução como primeira seção. A seção 2, temos descritos os OBJETIVOS, nela é realizada a descrição dos mesmos, sendo subdivididos em Objetivo Geral e Específicos.

Na seção 3, é abordada a fundamentação teórica, tópico que norteará todas as etapas da pesquisa, e para tal, foi dividida em três subseções:: Revisão Sistemática de Literatura, realizada com Artigos, dissertações, e publicações de revistas referentes a utilização de materiais extraclasse para o ensino de Matemática na Educação Básica; pela abordagem histórica da Geometria Euclidiana e o surgimento das Geometrias não Euclidianas; e por uma terceira subseção, chamada de distância, subdivida em três subseções sobre distância: Euclidiana, *Manhattan* e Geodésica.

Na seção 4, é apresentada a METODOLOGIA da pesquisa.

A seção 5, é referente ao PRODUTO EDUCACIONAL, nela é feita a descrição do produto, realizada a validação, trabalhada a metodologia para validação, informada a amostra da pesquisa, os instrumentos de coleta de dados e a análise dos dados obtidos pós-coleta.

Na seção 6, temos as DISCUSSÕES E RESULTADOS, neste tópico são trabalhados os resultados dos respondentes dos questionários semiestruturados respondidos na Oficina Pedagógica, são realizadas as observações relatadas pelos participantes da atividade, onde foi apresentado o protótipo do produto para adaptações da versão final. E onde são analisados os dados extraídos através das discussões realizadas no Grupo Focal *Online* de forma assíncrona, através do *GOOGLEGROUPS*.

Na oitava e última seção do trabalho, as CONSIDERAÇÕES FINAIS, onde são realizadas as observações pelo pesquisador em relação à pesquisa, retomando alguns conceitos, informando sobre a possibilidade de futuras pesquisas e, ou continuidade da mesma sobre o tema, propiciando uma maior divulgação.

Com o crescimento das publicações nas ciências no mundo, na próxima seção é apresentada uma Revisão Sistemática de literatura, no intuito de investigar a produção sobre a utilização de materiais extraclasse no Ensino da Matemática na Educação Básica.

2 OBJETIVOS

O objetivo da presente pesquisa é desenvolver um produto educacional que possa auxiliar professores de matemática da educação básica em sua prática docente, para que os mesmos possam abordar e aprofundar os conceitos de distância.

Objetivos Específicos:

- Disponibilizar os diferentes conceitos de distância e compará-los, as distâncias a serem conceituadas são: Euclidiana, *Manhattan* e Geodésica;
- Selecionar exercícios da aplicação de tais conceitos com base nas provas do ENEM, de questões elaboradas pelo pesquisador, e utilização de questões obtidas na pesquisa, na construção de um livreto para professores na educação básica para o ensino das distâncias.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção, trataremos da fundamentação teórica do nosso trabalho, o que trará todo nosso embasamento da pesquisa. Esta fundamentação será dividida em três tópicos.

O primeiro tópico será uma revisão sistemática, ou seja, a base teórica que nos dará sustentação ao nosso trabalho no que tange a utilização de materiais extraclasse com o tema de geometrias não-euclidianas na educação básica.

O segundo tópico de nossa fundamentação é o tópico de Geometria Euclidiana, onde foi feito um apanhado histórico sobre a sua criação, seus principais estudiosos e seus axiomas que embasam toda a sua teoria.

O terceiro tópico é sobre o conceito de distância em abordagens diversas, tais como: Distância Euclidiana, Distância de *Manhattan* e Distância Geodésica, que fazem parte do estudo de Geometrias não-euclidiana.

3.1 A utilização de materiais extraclasse no Ensino da Matemática

A metodologia de pesquisa escolhida para revisão de literatura foi a revisão sistemática, que segundo, Sampaio e Mancini (2007) definem como uma forma de pesquisa que utiliza como fonte de dados a literatura sobre o tema, sendo extremamente útil para integrar estudos, uma vez que a informação está bem difundida nos livros e principalmente na internet, sendo necessária uma maior integração dos conteúdos.

Uma revisão sistemática, assim como outros tipos de estudo de revisão, é uma forma de pesquisa que utiliza como fonte de dados a literatura sobre determinado tema. Esse tipo de investigação disponibiliza um resumo das evidências relacionadas a uma estratégia de intervenção específica, mediante a aplicação de métodos explícitos e sistematizados de busca, apreciação crítica e síntese da informação selecionada. (SAMPAIO; MANCINI 2007, p. 84)

A revisão sistemática se justifica de acordo com Lopes e Fracoli (2008), pelo aumento da produção científica mundial, com isso é possível fazer uma busca por resultados anteriores sobre a mesma questão abordada pelo pesquisador, ou seja, utiliza-se a revisão para evidenciar a produção científica a respeito do tema proposto.

Os critérios estabelecidos de forma correta, faz ser possível utilizar-se “da literatura pertinente ao problema, possibilita a familiarização com os textos e, mediante esse processo, identificar os autores, ideias e teses anteriormente estabelecidas sobre o problema pesquisado” (SANTOS, 2012, p. 93).

A revisão sistemática engloba uma série de etapas, onde é subdividida em três partes: Planejamento, condução e síntese. (KITCHENHAM, 2004). De acordo com Kitchenham (2004), Mergel (2014) no **Quadro 1**, faz uma descrição das etapas das fases da revisão sistemática.

Quadro 1 - Etapas das fases de uma revisão sistemática.

Planejamento:	Identificação da necessidade de uma Revisão Sistemática; Desenvolvimento do protocolo de revisão.
Condução:	Identificação da pesquisa; Seleção de estudos primários; Avaliação da qualidade dos estudos; Extração dos dados; Síntese dos dados.
Síntese:	Criação do relatório de revisão.

Fonte: Mergel (2014)

O objetivo desta revisão sistemática foi investigar a produção científica em publicações referentes ao tema da pesquisa para nortear o trabalho. A pergunta de partida é: **Como a utilização de materiais extraclasse podem contribuir para o ensino da Matemática no que tange distância na Educação Básica?**

A priori, vamos criar um protocolo de revisão sistemática, este nos dará critérios para realizar nossa busca. O primeiro critério a ser seguido é a delimitação da pergunta que norteará nossa revisão, em seguida a intervenção. Os critérios estão descritos no **Quadro 2** a seguir, relacionados com o tema da pesquisa:

Quadro 2- Protocolo da Revisão Sistemática

Questão da Pesquisa – A utilização de materiais extraclasse, metodologias e ferramentas contribuem para o ensino de matemática no que tange distância na Educação Básica?	
Intervenção	Trabalhos que apresentem estudos a utilização de material extra classe, metodologias que apoiem o ensino de geometria, abordando os conceitos de distância.
Efeito	A partir dos resultados da busca, discutir a utilização de materiais extraclasse, no apoio ao ensino das teorias de distância na educação básica.
Controle	Não definido
Medida de desfecho	Quantidade de publicações encontradas sobre a utilização de materiais extraclasse no ensino de distância.
População	Publicações sobre a utilização de materiais extraclasse no ensino de distância na educação básica.
Problema	A utilização do livreto sobre distância como apoio ao ensino de geometria, abordando os conceitos de distância na educação básica.
Aplicação	Incentivar as discussões sobre a utilização de materiais extraclasse, metodologias que possam auxiliar no ensino da matemática na educação básica, com ênfase em distância.

Fonte: Adaptado de Paula (2014)

A base de dados escolhida para revisão, foi o Google Acadêmico, devido a indexação em seu banco de dados nos estudos sobre o ensino de distância em suas várias abordagens, a utilização de materiais extraclasse, metodologias e técnicas no apoio ao ensino na educação básica desses conceitos, delimitou-se a busca num período de 10 anos, tomando como partida o ano de 2008.

Para realizar a revisão foram utilizadas as *strings*: Distância; Geometria Euclidiana; Geometria Não Euclidiana; Ensino; materiais extraclasse. Foram obtidas 508 publicações, foi realizado um refinamento na busca, agora criando a exclusão das *strings*: informática; topologia; encontro; congresso; computador; tecnologia, que não estão relacionadas diretamente com o tema da pesquisa, e após esse refinamento foram obtidas 45 publicações, após análise e feita a exclusão de 38 publicações, devido à não ligação com o tema proposto, foram selecionadas 7 publicações, listadas no **Quadro 3** a seguir:

Quadro 3 – Resultados da busca

Autores	Título do trabalho	Ano
TOLEDO, M. L.	Uma abordagem sobre a Geometria Não-Euclidiana para o Ensino Fundamental.	2018
MARTINEZ, A. L. S	Uso de atividades didáticas contextualizadas para estimular o aprendizado de geometria.	2016
LOIOLA, C. A. G.; COSTA, C. S.	As Cônicas na Geometria do Táxi.	2015
BRUM, W. P; DA SILVA, S.D.C.R	Livros didáticos de matemática: análise dos recursos didáticos auxiliares para a aprendizagem de conceitos Elementares de geometria não euclidiana.	2015
CALDATTO, M. E; PAVANELLO, R. M.	O processo de inserção das geometrias não euclidianas no currículo da escola paranaense: a visão dos professores participantes.	2014
LEIVAS, J. C. P.	Geometrias não Euclidianas: ainda desconhecidas por muitos.	2013
CÉSAR, S. M. C	Mini Curso de Geometria Táxi	2010

Fonte: Dados da Pesquisa

Logo após foi feita a seleção dos trabalhos, seguindo os critérios da revisão de literatura, e realizada a análise dos trabalhos, algumas informações foram extraídas dos resultados: Autor, título do trabalho, objetivo do trabalho, metodologia, resultados e discussões.

No primeiro trabalho temos a dissertação de Toledo (2018), intitulada: **Uma abordagem sobre a Geometria Não-Euclidiana para o Ensino Fundamental.** a autora faz uma abordagem da Geometria Euclidiana, Geometria do Táxi e Geometria Esférica, tendo como seu público-alvo alunos do Ensino Fundamental.

O principal objetivo deste trabalho é propor atividades acerca da Geometria Esférica e da Geometria do Taxi, buscando instigar professores de Matemática e alunos da Educação Básica, do ensino médio e fundamental, a trabalharem em sala de aula com estas Geometrias, visando a melhoria dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. (TOLEDO, 2018, p.12)

Em seu trabalho, Toledo (2018), tem ainda como objetivo a divulgação das Geometrias Não-Euclidianas, ampliando o campo de exploração do aluno do Ensino Fundamental buscando uma maior compreensão sobre o tema proposto, e envolvimento

na propagação de conhecimentos. Em busca de ampliar este campo, realizou a apresentação de definições, postulados e resultados específicos da Geometria Euclidiana, Esférica e do Táxi.

A metodologia do trabalho foi de tal modo que o aluno realizasse questionamentos sobre os postulados de Euclides, em especial o Quinto Postulado, e para isto, realizou-se atividades de Geometria do Táxi, de Geometria Esférica e ainda a Oficina Caça *Pokemon*. A culminância do trabalho ocorreu em uma apresentação da oficina na feira interdisciplinar no dia 8 de outubro de 2017, no Colégio Rembrandt Coc, na cidade de Bauru – São Paulo.

Como resultado das atividades propostas em sala de aula, os alunos associaram positivamente os conceitos matemáticos trabalhados com sua realidade social, dando mais significado aos conceitos aprendidos, tornando o ensino de geometria mais dinâmico e atrativo.

No segundo trabalho, encontramos a dissertação de Martinez (2016), intitulada: **Uso de atividades didáticas contextualizadas para estimular o aprendizado de geometria.**

No trabalho Martinez (2016), tem como objetivo avaliar qual é o estímulo do aprendizado do aluno em Geometria, se é dado a partir da exploração, de análise, desenvolvimento e aplicação de atividades didáticas com enfoque em contextualizar sua realidade social.

Para motivar o aluno do ensino fundamental e médio, devem-se acrescentar atividades que envolvam sua realidade, jogos de que ele possa participar com seus colegas, atividades contextualizadas, outras atividades que o incentivem e atividades inovadoras. (MARTINEZ, 2016, p.59)

A metodologia adotada pelo autor foi de caráter qualitativo, “Optou-se pela análise quantitativa das respostas às 5 primeiras perguntas e pela análise qualitativa das respostas à sexta pergunta, ancorando-se na metodologia de análise de conteúdo proposta por Bardin.” (MARTINEZ, 2016, p. 77).

De acordo com Martinez (2016), existem algumas barreiras a serem transpostas para contextualização do ensino da geometria.

[...] o trabalho de forma contextualizada esbarra em algumas dificuldades, tais como: a forma passiva do professor de trabalhar somente

com o livro didático; a falta de recursos materiais nas escolas; o desinteresse dos professores em relacionar a matemática com outras disciplinas; a necessidade de aperfeiçoamento do professor, que, em muitos casos, carece de incentivo. (MARTINEZ, 2016, p.83)

Ainda Martinez (2016), conclui que os resultados do ponto de vista estatístico descritivo e ainda com as análises de conteúdos os alunos se sentiram mais motivados para o estudo da geometria quando contextualizado à sua realidade, portanto, para o estudo da matemática. Sugere que a avaliação em matemática deva ser de uma maneira formativa, interdisciplinar que contemple uma contextualização, observando os conhecimentos e dificuldades dos estudantes durante o processo e intervindo se assim for necessário, e não somente de uma maneira tradicional e somativa.

No próximo trabalho, Loiola e Costa (2015), com o artigo intitulado: **As Cônicas na Geometria do Taxi**, teve como objetivo principal a apresentação das cônicas sobre a ótica de uma Geometria Não-Euclidiana, abordando a Geometria do Táxi seus conceitos e particularidades. Seu trabalho foi baseado em uma pesquisa bibliográfica, onde o autor realizou uma pesquisa sobre a história das geometrias, partindo da sua criação com a Geometria Euclidiana, até a descoberta e criação de novas geometrias, as Geometrias não-euclidianas, com seus principais nomes citados pelo autor: Giovanni Girolamo Saccheri, hoje é conhecido como precursor das Geometrias Não-Euclidianas; Nikolay Ivanovich Lobachevsky que hoje a geometria descoberta por ele é chamada de Geometria Hiperbólica; Janos Bolyai com sua Geometria não-euclidiana. Loiola e costa ainda destacam sobre os matemáticos Bolyai e Lobachevsky:

Tanto Bolyai quanto Lobachevsky não conheciam o trabalho um do outro e como afirma Mlodinow "... infelizmente, ninguém tampouco sabia. Matemáticos essencialmente obscuros, quando falaram ninguém deu ouvidos". Bolyai nunca mais publicou nenhum outro trabalho e Lobachevsky se tornou reitor da Universidade de Kazan. (LOIOLA; COSTA, 2015, p.183)

A metodologia utilizada para a execução do trabalho foi uma pesquisa bibliográfica sobre geometria não euclidiana, intitulada de Geometria do Táxi e suas particularidades nas cônicas.

O que tange suas conclusões, o autor diz que:

[...] este trabalho fornece ao professor do Ensino Básico uma forma de observar a matemática sob um aspecto integrador e crítico, possibilitando que o mesmo possa refletir sobre os processos de ensino e as possibilidades que a Geometria fornece como objeto de aprendizagem. (LOIOLA; COSTA, 2015, p. 190).

Ainda em suas conclusões, o autor faz a ligação entre a Geometria do Táxi e a Geografia urbana por suas características de ser a geometria natural das cidades, e suas noções, em consonância com os PCN's proporcionando motivação para o aluno, quebrando paradigmas, incentivando outras abordagens da Geometria e desenvolvendo aprendizagem.

No quarto trabalho, os autores Brum e Da Silva (2015), com o artigo intitulado: **Livros didáticos de matemática: análise dos recursos didáticos auxiliares para a aprendizagem de conceitos Elementares de geometria não euclidiana**, tem como objetivo uma análise dos recursos didáticos utilizados em seis livros didáticos de Matemática, sobre o que tange os conteúdos de Geometria não-Euclidiana, em sua utilização por professores de ensino médio, na rede pública de Florianópolis, Santa Catarina no ano de 2013.

Um fator destacado pelo autor, tange o fato de que muitas vezes os professores se apoiam nos livros didáticos exclusivamente como destaca:

Apesar da necessidade de utilização de outras metodologias e instrumentos de ensino, os livros didáticos provavelmente continuarão a exercer um papel determinante na maioria das escolas brasileiras. Assim, a análise dos livros didáticos torna-se necessária para verificar se os conteúdos estão sendo trabalhados de forma correta, livres de concepções errôneas ou discriminatórias, e ainda, se trazem instrumentos para facilitar a aprendizagem por parte dos alunos. (BRUM; SILVA, 2015, p. 3).

Em sua análise, Brum e Da Silva (2015), utilizaram como metodologia uma pesquisa documental de caráter qualitativo, os resultados mostraram que os livros analisados fazem a reprodução de um modelo memorístico de ensino, não privilegiando a contextualização e participação do aluno no processo de aprendizagem :

Em síntese, os livros analisados reproduziram o modelo tradicional de ensino: leitura de textos e resolução de exercícios. De uma forma ge-

ral, não há incentivo à pesquisa e à educação científica e nem a preocupação em correlacionar conteúdos no campo da Geometria. (BRUM; DA SILVA, 2015, p.13)

O autor ainda destaca que na sala de aula, professor e aluno se relacionam o tempo todo, e este relacionamento de forma intensa pode favorecer a aprendizagem do estudante.

No trabalho de Caldato e Pavanello (2014), intitulado: **O Processo de Inserção das Geometrias Não Euclidianas no Currículo da Escola Paranaense: a visão dos professores participantes**, objetivou a investigação de como aconteceu o processo de elaboração do currículo no estado do Paraná, partindo da visão de professores que tiveram participação no processo, deixando evidente como aconteceu a inserção das Geometrias Não Euclidianas no currículo.

Como Metodologia para o trabalho, Caldato e Pavanello (2014), para dar voz aos professores se propuseram em apurar de como se deu a participação dos mesmos no processo da inserção das Geometrias Não Euclidianas no Currículo da Escola Paranaense.

[...] Sendo assim, nos propusemos a dar voz aos – explicitar a visão de – agentes do processo de elaboração das DCE-PR Matemática atuantes em diferentes posições do sistema educacional paranaense (CALDATTO; PAVANELLO, 2014, p.46)

Para realizar esse trabalho de dar voz aos professores, Caldato e Pavanello (2014), utilizaram entrevistas individuais e apresentaram aos colaboradores um esboço da pesquisa para clareza das informações de interesse dos professores. Foi feito um tratamento das entrevistas onde se deu em duas etapas: transcrição e textualização, ou seja, passagem na íntegra da oralidade registrada no instante das entrevistas incluindo todos os vícios de linguagens, gírias e repetições; e a textualização onde é feito o tratamento destas entrevistas, se retirando questionamentos do entrevistador, vícios de linguagem, gestos e expressão de sentimentos do entrevistado com o intuito de deixar as informações mais claras e a entrevista mais fluída

Os autores Caldato e Pavanello (2014), destacam que os professores participaram do processo de elaboração do currículo, porém, sua participação não é vista nas Diretrizes Curriculares de Matemática, como pode ser visto abaixo:

[...] que a participação dos professores não foi determinante para as decisões tomadas no processo de elaboração das Diretrizes Curriculares de Matemática e a inserção das Geometrias Não Euclidianas no documento decorreu da decisão de elemento(s) da equipe técnica de Matemática, não se sabe sob que influência. (CALDATTO; PAVANELLO, 2014, p.42)

No sexto trabalho, temos Leivas (2013), intitulado: **Geometrias não Euclidianas: ainda desconhecidas por muitos**, teve como objetivo investigar os conhecimentos de um grupo de alunos, onde sua amostra foi de noventa alunos de graduação em matemática, dezessete de mestrado e um de doutorado, todos os alunos realizam seus cursos em instituições gaúchas que possuíam curso de Licenciatura em Matemática, mestrado e doutorado na área de ensino. Quanto aos alunos de mestrado e doutorado, pode ser visto de acordo com dados da pesquisa, que sua formação ocorreu entre os anos de 1980 até 2010.

Leivas (2013, p. 651), justifica sua pesquisa: “[...] No levantamento sobre a oferta de alguma disciplina que aborde geometrias não euclidianas, concluiu que, em apenas dois projetos desses cursos, o tema é contemplado minimamente.”. Deste modo, julgou que fosse pertinente aprofundar o conhecimento, para que pudessem ser sugeridas ações, tanto no currículo de formação docente, e nas formações continuadas.

A metodologia utilizada na pesquisa foi qualitativa. Fazendo uso de um questionário estruturado, composto por três itens: no primeiro foi solicitado que o participante informasse a formação: graduação, especialização, mestrado, doutorado ou professor atuante; no segundo item foi a caracterização do problema-objeto espaço ambiente, de tal modo que os respondentes tivessem o livre pensar em relação as geometrias, e não somente na geometria plana e espacial, como comumente é realizada na formação inicial e nos cursos de formação continuada; e no terceiro item que partiu do problema-objeto, formado por sete sentenças, com a orientação de : “[...] dado um triângulo em um espaço geométrico qualquer, atribua valor V para a afirmação que for verdadeira ou F para a falsa. Se julgar conveniente, argumente sua resposta” (Leivas, 2013, p. 652)

De acordo com os resultados, os respondentes em sua grande maioria, utilizaram dos conceitos da Geometria Euclidiana para tal, e os poucos que justificaram suas respostas não fizeram menção as Geometrias não Euclidianas.

Leivas (2013, p. 669), diz que:

[...] foi possível comprovar a hipótese de que nos cursos de formação de professores, no RS, há pouca informação a respeito de Geometrias Não-Euclidianas. Dessa forma, o docente que atua na escola básica não incorpora à sua prática outras noções a menos das euclidianas, não adquirindo uma formação mais ampla para seu exercício profissional.

Deste modo, o autor diz ser impossível o estímulo aos estudantes e novas aprendizagens de conteúdos no intuito de despertar para temas afins do conhecimento humano, ligados as áreas onde a Matemática exerce papel fundamental. (LEIVAS, 2013)

No sétimo trabalho, temos o trabalho de César (2010), intitulado: **Mini Curso de Geometria do Táxi**, o objetivo do presente trabalho é a introdução da Geometria do Táxi, criando um paralelo entre a Geometria Euclidiana, com o intuito da aplicação das duas Geometrias em situações do cotidiano dos alunos.

A metodologia adotada foi abordar conceitualmente a Geometria do Táxi, diferenciando a mesma da Geometria Euclidiana, mas mostrando que ela é advinda da Euclidiana, divergindo apenas na métrica, posteriormente, o estudo de questões geométricas que o desfecho será em aplicações práticas. Apresentando durante o trabalho, aplicações em sala de aula para Geometria do Táxi. Não foram apresentados resultados para o Mini Curso.

Em análise das publicações obtidas como resultados da revisão sistemática, podemos constatar a importância da utilização de materiais utilizados como facilitadores de ensino na educação básica, esses materiais devem ser contextualizados ao cotidiano do aluno, para que o ensino seja palpável, atrativo e relevante.

Logo após análise, o que se pode perceber é que a produção científica englobando a utilização de materiais extraclasse no ensino de matemática, mais especificamente distância em diversas teorias na educação básica se faz relevante, realizando a contextualização junto ao cotidiano do aluno, e dando ênfase no conceito de distância que é conhecido na maioria das vezes em sua abordagem em Geometria

Euclidiana, sendo deixado a margem outras teorias advindas das Geometrias não Euclidianas. Pela escassez de publicações sobre o tema relacionados, é reafirmada a relevância do presente estudo, dando ênfase na sua utilização na Educação Básica.

3.2 Geometria Euclidiana

Para darmos início, vamos conhecer um pouco sobre Geometria, e para tal, responder: Quem foi Euclides? Euclides da cidade de Alexandria, foi escritor, mestre, matemático da escola platônica, e sempre lembrado, como Pai da Geometria, tem seu nascimento estimado na Síria por volta de 360 a.C e sua morte 295 a.C, seus estudos foram em sua grande parte em Atenas. Em todos os tempos é tido como um dos mais significativos estudiosos. (PIVATTO; SCHUHMACHER, 2013). Euclides apresenta sua obra “Os Elementos” por volta do ano de 300 a.C, a obra é composta por um grupo de axiomas e postulados. (COUTINHO, 2001, p.34)

Como salienta Coutinho (2001, p.35), “A geometria de Euclides foi a primeira teoria matemática a ser axiomatizada, sendo por cerca de dois mil anos considerada como a única geometria possível”. Em sua obra, Euclides utiliza fundamentos axiomáticos de uma teoria matemática, observando a abstração e imposição na apresentação de uma teoria de uma forma estritamente dedutiva. (BICUDO, 2009)

Diz-se que uma teoria é axiomática, ou seja, segue o método axiomático, quando é construída partindo de axiomas, que são afirmativas aceitas sem comprovação. (COUTINHO, 2001). Ainda de acordo com Coutinho (2001, p,33), “Um conjunto de axiomas é consistente se não conduzir a teoremas contraditórios, isto é, a um teorema e a sua negação. Exemplificando: uma geometria que demonstre o teorema de Pitágoras e, por outro lado, conduza a sua negação, não é consistente”

No **Quadro 4** a seguir, estão enunciados os Axiomas e Postulados de Euclides, segundo Coutinho (2001).

Quadro 4 - Axiomas e Postulados de Euclides

AXIOMAS	POSTULADOS
1. Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.	1. Uma linha reta pode ser traçada de um ponto a outro, escolhidos à vontade
2. Se quantidades iguais são adicionadas a iguais, os totais são iguais	2. Uma linha reta pode ser prolongada indefinidamente
3. Se quantidades iguais são subtraídas de iguais, os restos são iguais.	3. Um círculo pode ser traçado com centro e raio arbitrários.
4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais.	4. Todos os ângulos retos são iguais
5. O todo é maior do que qualquer de suas partes.	5. Se uma reta secante a duas outras forma ângulos, de um mesmo lado dessa secante, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas retas se prolongadas suficientemente encontrar-se-ão em um ponto desse mesmo lado

Fonte: Adaptado de COUTINHO (2001)

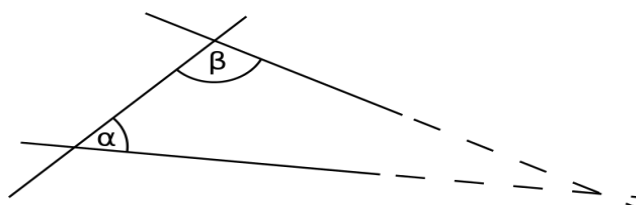
O quinto postulado de Euclides tem sua equivalência ao postulado das paralelas, segundo Struik (1989, p. 92), “O quinto postulado do livro I (a relação entre “axiomas e postulados” não é muito clara em Euclides) é equivalente ao chamado “axioma das paralelas”, de acordo com o qual, por um ponto passa uma recta paralela a uma recta dada e uma só”.

De acordo com Struik (1989) e Bongiovani (2010), o quinto postulado de Euclides atualmente é utilizado como postulado das paralelas.

[...] Em 1795, o enunciado do quinto postulado de Euclides foi substituído por um outro, equivalente, chamado hoje de postulado das paralelas. Tal formulação é devida a Playfair: “Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única paralela à reta dada.” Todavia, esse postulado já havia sido considerado por Proclus em sua obra Comentários sobre o primeiro livro dos elementos de Euclides. (BONGIOVANI, 2010, p.32);

Temos logo abaixo a **Figura 1**, que representa o quinto postulado de Euclides e em seguida a **Figura 2**, representando graficamente o postulado das Paralelas, e atualmente é apresentado da seguinte forma: “*Por um ponto P exterior a uma reta m , consideradas em um mesmo plano, existe uma única reta paralela à reta m* ” (COUTINHO, 2001, p. 35)

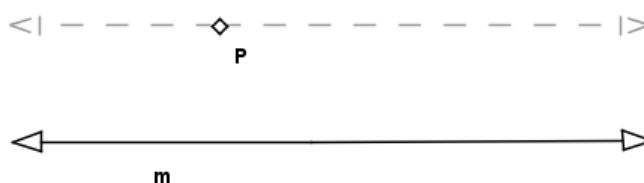
Figura 1 - Postulado das paralelas



Fonte: Disponível em: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ed/Parallel_postulate_en.svg/650px-Parallel_postulate_en.svg.png Acesso em: 10 de Jan 2019.

Na **Figura 2**, a interpretação geométrica do postulado das paralelas, é a seguinte: por um ponto P exterior a uma reta m dada, só existe uma única reta passando por P e paralela à reta m .

Figura 2 - Postulado das Paralelas simplificado



Fonte: Construção do Autor

Euclides com a utilização de seus postulados e axiomas em sua obra Elementos, fez a construção de toda a geometria ensinada nas escolas até os tempos de hoje, inclusive o Teorema de Pitágoras é característico da geometria de Euclides. (COUTINHO, 2001, p. 35)

Por conta da inquietude ao longo dos tempos de alguns filósofos representados por Kant, fizeram a argumentação com a ideia de se há a possibilidade apenas de uma geometria que seja única, determinados postulados ou noções comuns seriam teoremas, ou seja, seriam consequência de proposições primeiras.(COUTINHO, 2001) e complementa “[...] Foi dentro desse raciocínio que renomados matemáticos

tentaram provar o 5º Postulado de Euclides, pois consideravam esse postulado o menos intuitivo e de redação mais complicada”.(COUTINHO, 2001, p.36)

Toda essa movimentação dos matemáticos como Bolyai, Lobachevsky, Gauss e Riemann, na tentativa de provar que o Quinto Postulado era um teorema, que seria consequência de outras proposições, formularam as bases da criação de geometrias diferentes da geometria de Euclides, e não tão aceitas como a Euclidiana. (COUTINHO, 2001, p.36)

3.3 Distância

O conceito de distância é aplicado em várias áreas, tais como Geografia, Medicina, Física, Informática, ou seja, as ciências em geral utilizam o conceito de distância para exemplificar proximidade de corpos, conjuntos, similaridade, entre inúmeras outras aplicações.

De acordo com Lopes (2012, p.14), a “Distância é o número que caracteriza a separação entre dois objetos”. Para que seja considerada uma distância, algumas condições de espaços métricos devam ser satisfeitas.

Segundo Lima (1977, p. 1), no **quadro 5** a seguir, define métrica como:

Quadro 5 - Definição de métrica

Uma métrica num conjunto M é uma função $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, que associa cada par ordenado de elemento $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado de distância de x a y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para qualquer $x, y, z \in M$;

$$d1) d(x, x) = 0;$$

$$d2) \text{ Se } x \neq y \text{ então } d(x, y) > 0;$$

$$d3) d(x, y) = d(y, x);$$

$$d4) d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

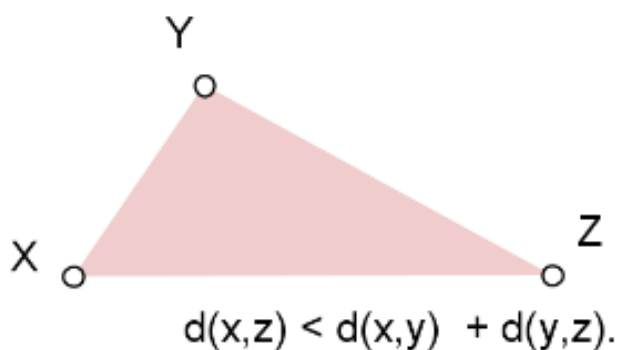
Fonte: Lima (1977, p. 1)

Analisando as condições do Quadro 4, pode-se ver que em d1) e d2) as condições $d(x, y) \geq 0$ e que $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$, a condição d3) diz que a distância $d(x, y)$ é uma função simétrica das variáveis x, y . A desigualdade

triangular está representada na condição d4); sabendo que no plano euclidiano a soma das medidas dos lados de um triângulo não pode ser menor que o terceiro lado.

A desigualdade triangular no plano euclidiano, é possível visualizar sua representação geométrica nas figuras 3 e 4, a seguir:

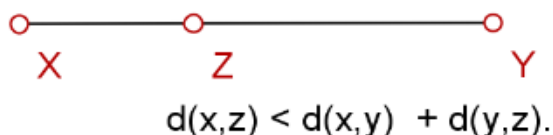
Figura 3 - Desigualdade Triangular



Fonte: Lima (1977)

O entendimento geométrico da **Figura 3**, diz que a soma de dois lados quaisquer do triângulo é sempre maior que o terceiro lado.

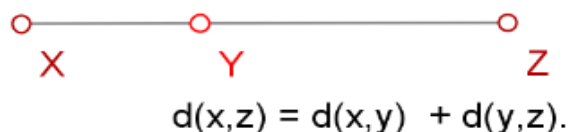
Figura 4 - Distância de XY



Fonte: Lima (1977)

A **Figura 4** nos mostra que a distância do ponto X até o ponto Z, estando entre X e Y, é menor que a soma das distâncias entre \overline{XY} e \overline{YZ} .

Figura 5 - Distância entre XZ



Fonte: Lima (1977)

A **Figura 5**, nos mostra que a distância de X até Y, e de Y até Z será mínima quando o ponto Y estiver no segmento \overline{XZ} .

De acordo com Gomide e Reis (2013), espaço métrico é um fundamento matemático para a compreensão de distância de forma intuitiva.

A noção de espaço métrico é o fundamento matemático sobre o qual se apoia a ideia intuitiva de “distância”. De fato, uma distância qualquer entre dois pontos é compreendida intuitivamente como um caminho (em geral, um segmento de reta) que liga tais pontos; a expressão matemática deste caminho, deste “pedaço de espaço retilíneo”, é um número real maior ou igual a zero. Mas a intuição de distância não precisa, necessariamente, estar presa à ideia de um segmento de reta finito e expresso por um número real. (GOMIDE; REIS, 2013, p.197)

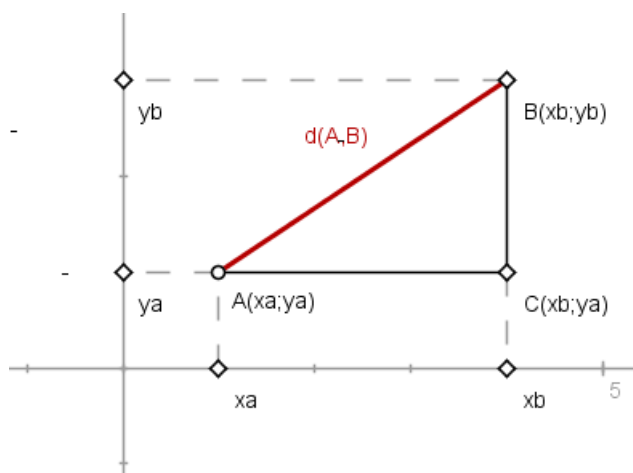
Logo após esta seção de introdução sobre distância, iremos definir as distâncias que são objetos desse estudo, que são elas: Distância Euclidiana, Distância de *Manhattan* e Distância Geodésica.

3.3.1 Distância Euclidiana

Consideremos o plano em \mathbb{R}^2 , onde é formado por duas retas perpendiculares, sendo uma horizontal e outra vertical, uma denominada Eixo das Abscissas e outra, Eixo das Ordenadas, respectivamente. Os pares ordenados no plano, são indicados por $A(x_a, y_a)$, onde x_a é a abscissa do ponto A e y_a é a ordenada do ponto A.

Sejam $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$ dois pontos, a distância entre os pontos A e B é obtida através das projeções destes pontos nos eixos coordenados. Daí, encontramos o ponto C (x_c, y_c) , onde $(x_c, y_c) = (x_b, y_a)$ com isso no triângulo ABC na **Figura 6**, e aplicando o Teorema de Pitágoras teremos:

Figura 6 - Distância entre os pontos A e B



Fonte: Construído pelo autor

Desenvolvimento:

$$[d(A, B)]^2 = [d(A, C)]^2 + [d(C, B)]^2$$

$$[d(A, B)]^2 = [|x_b - x_a|^2 + |y_a - y_a|^2] + [|x_b - x_b|^2 + |y_b - y_a|^2]$$

$$[d(A, B)]^2 = |x_b - x_a|^2 + |y_b - y_a|^2$$

$$[d(A, B)]^2 = (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2$$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

$$\text{Portanto, } d(A, B) = \sqrt{d(A, C)^2 + d(C, B)^2} \quad (1)$$

Observe que o segmento AB é a hipotenusa do triângulo retângulo ABC, por consequência $AB = d(A, B)$, $AC = d(A, C)$ e $CB = d(C, B)$, portanto válido o teorema de Pitágoras.

Generalizando a definição de Distância Euclidiana, a mesma pode ser provada pela aplicação repetida do teorema de Pitágoras, no caso do plano em \mathbb{R}^2 foi realizada anteriormente, analogamente temos a distância entre os pontos X e Y, num espaço euclidiano n-dimensional, ou seja, no plano \mathbb{R}^n .

Segundo Lima (1977, p. 1), dados X e Y pontos no \mathbb{R}^n , onde $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, a Distância Euclidiana em \mathbb{R}^n é definida como:

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad (2)$$

De uma forma geral, d é uma métrica natural, pois, fornece a Distância Euclidiana, de acordo com Lima (1977). A distância entre dois pontos na Geometria Euclidiana é uma reta.

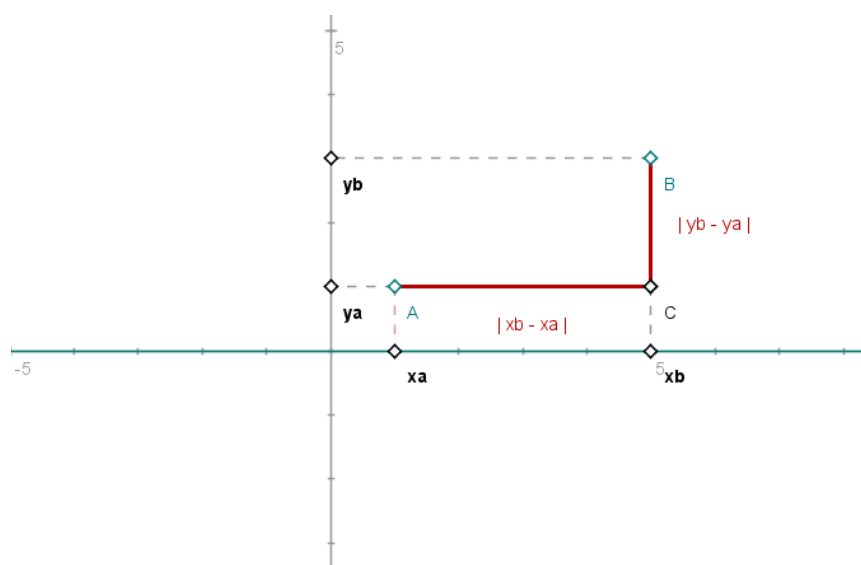
3.3.2 Distância de *Manhattan*

A Distância de *Manhattan*, também conhecida como Geometria do Táxi ou ainda Geometria das cidades. Ela recebe este nome devido a sua trajetória, que é descrita como de um táxi na cidade, onde quarteirões são usados como caminho até chegar ao seu destino, diferentemente da Distância Euclidiana vista na seção anterior, que é representada por uma reta como a menor distância entre dois pontos.

A Distância de *Manhattan* é definida para dois pontos num espaço euclidiano com sistema cartesiano de coordenadas fixo, como a soma dos comprimentos das projeções da linha que une os pontos sobre os eixos das coordenadas.

Logo a seguir, podemos ver a representação geométrica da Distância de *Manhattan*, destacada em vermelho na **Figura 7** a seguir:

Figura 7 - Distância entre os pontos A e B (Distância de *Manhattan*)



Fonte: Construído pelo autor

De acordo com Lima (1977), sendo $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ pontos no espaço euclidiano, a Distância de *Manhattan* é uma métrica e dada por:

$$d'(X, Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \quad (3)$$

Se generalizarmos $n=2$, a interpretação poderá ser mais simples e intuitiva, pois de acordo com Lima (1977), sendo assim o plano \mathbb{R}^2 , pode ser imaginado com as ruas

de uma cidade, sendo assim as ruas são paralelas aos eixos coordenados com $x = 0$ e $y=0$, e de forma mais intuitiva para a métrica d' .

Dados os pontos $X=\{x_1, x_2\}$ e $Y = \{y_1, y_2\}$, tem-se que a função d' é dada por:
 $d(X,Y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$ (4)

A função d' , satisfaz as seguintes propriedades:

- I. $d'(X, X) = 0$
- II. Se $X \neq Y$, então $d(X, Y) \neq 0$
- III. $d'(X, Y) = d'(Y, X)$
- IV. $d'(X, Y) \leq d'(X, Z) + d'(Y, Z)$, para quaisquer pontos X, Y e Z .

Como a função d' , satisfaz as condições de espaço métrico, é dita uma métrica, e chamada de Distância de *Manhattan*.

Após definirmos a Distância de *Manhattan* segundo Lima (1977), podemos determinar quantos caminhos é possível se traçar partindo de X até Y , e para isto, utiliza-se a expressão (5) de combinação simples a seguir:

$$N = C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (5)$$

Onde:

$N \rightarrow$ número total de caminhos

$n \rightarrow$ soma da distância horizontal com a distância vertical

$p \rightarrow$ menor das duas distâncias.

Após essa breve abordagem da Distância de *Manhattan*, apresentaremos uma Distância não Euclidiana.

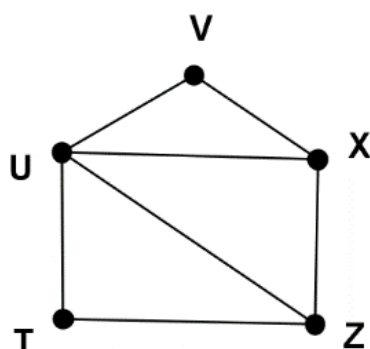
3.3.3 Distância Geodésica

Para falarmos de Distância Geodésica, primeiramente vamos definir Grafos. De acordo com Rabuske (1992), um grafo G é definido como: um par ordenado $(V(G), E(G))$, onde $V(G)$ é um conjunto finito não-vazio e $E(G)$ uma relação binária de elementos sobre $V(G)$. Os elementos que pertencem a $V(G)$ são denominados de vértices ou nós, enquanto os pares não-ordenados de $E(G)$ são chamados de arestas ou arcos. Cada aresta está associada a dois vértices: o primeiro é o ponto inicial da aresta e o segundo é o ponto final da aresta. Vamos nos ater apenas a grafos em que o conjunto de vértices são finitos e $V(G) \neq 0$.

Uma representação gráfica padrão para um grafo é um desenho formado por pontos, onde esses pontos representam os vértices, e por retas ou arcos ligando os pontos, essas ligações são as arestas do grafo. (GROSS; YELLEN, 2006)

Na **Figura 8** a seguir, temos uma representação padrão de um grafo:

Figura 8 - Grafo Padrão



Fonte: Construído pelo autor.

As informações sobre o grafo podem ser armazenadas, por meio da relação de seus vértices a cada vértice adjacente, ou seja, vamos relacionar os vértices V, X, Z, T, U, aos seus vértices adjacentes. Desse modo no Quadro 6, temos:

Quadro 6 - Vértices Adjacentes

Vértices	Vértices Adjacentes
X	V, U, Z
Z	X, U, T
T	Z, U
U	V, X, Z, T
V	U, X

Fonte: Construído pelo autor

A distância de um vértice r a um vértices de um grafo, é o número k de arestas de um caminho mínimo de r a s , onde $k \in \mathbb{N}$. (NASCIMENTO; MURTA, 2016). Por consequência dizer que a distância de r a s é igual a k , significam duas coisas:

- i) Existe um caminho de r a s com exatamente k arcos.

ii) Não existe caminho de r a s com menos que k arestas.

Observação: a distância de r a s pode ser diferente da distância de s a r

De acordo com Loureiro (2018, p. 43), “Formalmente, um grafo valorado $G = (V, E)$ consiste de um conjunto V de vértices, um conjunto E de arestas, e uma função f de E para P , onde P representa o conjunto de valores (pesos) associados às arestas.”

Para exemplificarmos um grafo valorado, vamos utilizar o problema do caixeiro Paulo, ele é um viajante, que possui entregas para fazer em 5 cidades e precisa programar suas visitas de modo que seja a mais eficiente possível. A cidade de Paulo é representada pela letra A e as demais serão indicadas pelas letras B , C , D , e E . Para otimizar o processo de visitas de Paulo, deve-se traçar a menor rota possível entre as cidades ou seja a distância de uma cidade a outra, de modo que visite todas as cidades partindo de A e voltando a ela.

Observando o **Quadro 7** abaixo, podemos verificar a distâncias de cada cidade a outra, as distâncias são dadas em quilômetros.

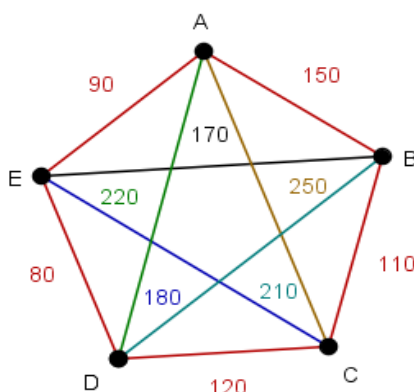
Quadro 7 - Distância entre Cidades

Distância de A até	B	C	D	E
	150	250	220	90
Distância de B até	A	C	D	E
	150	110	210	170
Distância de C até	A	B	D	E
	250	110	120	180
Distância de D até	A	B	C	E
	220	210	120	80
Distância de E até	A	B	C	D
	90	170	180	80

Fontes: Construído pelo autor

Para representar as informações acima, utilizamos como representação o grafo valorado na **Figura 9**, onde cada aresta possui um peso, que é a distância em quilômetros entre as cidades.

Figura 9 - Cidades e suas distâncias



Fonte: Construído pelo autor

Para determinar qual é o melhor roteiro de viagem, a priori, iremos determinar o número de maneiras que a viagem pode ser realizada, e para isso faremos uso da expressão $\frac{(n-1)!}{2}$, onde n é o número de cidades visitadas em sua viagem, daí, como temos 5 cidades, então, segue que quando n=5, temos: $\frac{(5-1)!}{2} = \frac{4!}{2} = \frac{24}{2} = 12$, portanto, temos 12 maneiras de realizar essa passagem pelas 4 cidades, voltando a origem, vamos a **Tabela 1**:

Tabela 1- Distância das viagens partindo de A, e voltando a origem

Roteiro de Viagem	Distância do trajeto da Viagem
A-B-C-D-E-A	150 + 110 + 120 + 90 + 80 = 550
A-B-C-E-D-A	150 + 110 + 180 + 80 + 220 = 740
A-B-D-C-E-A	150 + 210 + 120 + 180 + 90 = 750
A-B-D-E-C-A	150 + 210 + 80 + 180 + 250 = 870
A-B-E-C-D-A	150 + 170 + 180 + 120 + 220 = 840
A-B-E-D-C-A	150 + 170 + 80 + 120 + 250 = 770
A-C-B-D-E-A	250 + 110 + 210 + 80 + 90 = 740
A-C-B-E-D-A	250 + 110 + 170 + 80 + 220 = 830
A-C-D-B-E-A	250 + 120 + 210 + 170 + 90 = 840
A-C-E-B-D-A	250 + 180 + 170 + 210 + 220 = 1030
A-D-B-C-E-A	220 + 210 + 110 + 180 + 90 = 810
A-D-C-B-E-A	220 + 120 + 110 + 170 + 90 = 710

Fonte: Construído pelo autor

Após o cálculo das distâncias de cada viagem discriminadamente, podemos concluir que a viagem mais eficiente do caixeiro é a Viagem A-B-C-D-E-A, que ao total foi percorrido 550 km.

Observação: Para cada roteiro de viagem, existe sua inversa, portanto as distâncias são as mesmas. Para exemplificar tal fato fazemos a distância de A-B-C-D-E-
 $A = 150 + 110 + 120 + 90 + 80 = 550$ km de distância, e em seguida a distância de A-
E-D-C-B-A = $90 + 80 + 120 + 110 + 150 = 550$ km.

Na seção a seguir, iremos tratar da uma fase chamada metodologia de validação do produto educacional.

4 METODOLOGIA DE VALIDAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

A validação do nosso produto educacional se deu em duas etapas. A primeira fase foi a validação do protótipo e criação do produto educacional, onde abordamos a realização de uma oficina pedagógica com o intuito de apresentar o protótipo do produto educacional e sua validação; em seguida a *fase dois*, onde foi realizada a criação de um grupo focal *online*, a segunda fase foi responsável pela validação do nosso produto educacional.

4.1 Validação do Produto Educacional

Para que possamos validar nosso produto, vamos primeiramente realizar uma introdução sobre os preceitos sobre uma oficina pedagógica, que será utilizada para apresentar o protótipo do produto educacional da nossa pesquisa.

De acordo com Candau (1999), a priori, o conceito de oficinas sendo aplicado na educação, faz referência ao espaço onde se aprende fazendo junto, uma troca de conhecimentos. Em virtude desse fato, Vieira e Volquind (2002, p. 11), “Salienta que oficina é uma modalidade de ação.”. Por consequência, oficinas possibilitam um estímulo do saber, criando e recriando situações, e conhecimentos, tendo como pilar a relação que existe do objeto a ser estudado e o sujeito do estudo.

A seguir, podemos ver o **Quadro 8**, o roteiro da oficina:

Quadro 8 - Roteiro da Oficina

1. Apresentação
2. Aplicação do Questionário Preliminar
3. Um pouco de história – O quinto postulando de Euclides
4. Definição: Distância
 - 4.1 Distância Euclidiana
 - 4.2 Distância de Manhattan
 - 4.3 Distância Geodésica
5. Atividades da oficina, protótipo do produto
6. Espaço para um debate entre os participantes da oficina. (Roda de Conversas)
7. Aplicação do Questionário de posicionamento sobre o tema
8. Encerramento

Fonte: Construção do autor

Um fator importante na escolha da realização de uma oficina, é o fato destacado por Sonza e Leivas (2018), dizendo que uma oficina atende a duas finalidades distintas, a articulação de conceitos e a cooperação na execução das tarefas de forma coletiva.

Em seu trabalho, Sonza e Leivas (2018), complementa:

A articulação entre teoria e prática é sempre um grande desafio, principalmente na área da educação. Um dos caminhos possíveis para a superação dessa situação é a construção de estratégias de integração entre pressupostos teóricos e práticas, o que, fundamentalmente, caracteriza as oficinas pedagógicas, (SONZA. LEIVAS, 2018, p. 2 - 3)

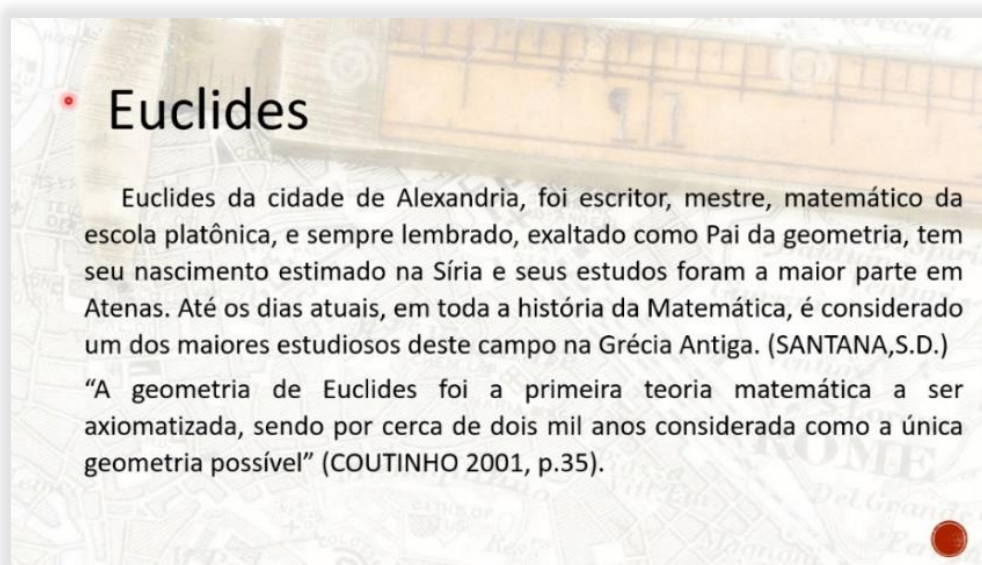
O grupo relacionado para execução da oficina, é formado por graduandos em Matemática de uma Universidade Particular, localizada no Município de Duque de Caixas, no Estado do Rio de Janeiro. O pesquisador em seu contato inicial com os participantes, informou a natureza da pesquisa, deixando sua participação facultativa, foi apresentado o roteiro, descrito no **Quadro 8**, e entregue o TCLE, disponível em ANEXO C, e em seguida, o Questionário Preliminar, responsável por fazer a sondagem inicial dos participantes a respeito de distância.

Para realização da oficina foram utilizados *slides*, havendo explanação oral sobre distância com tópicos descritos no **Quadro 8**, e um material para o participante, sem informar que o mesmo era o protótipo do produto educacional, os participantes

estavam as cegas quanto ao formato do produto, para não comprometer a pesquisa. O protótipo está disponível em APÊNDICE C.

Para início da explanação sobre os tópicos da oficina, temos na **Figuras 14**, um pouco sobre a história da matemática, que conta um pouco de Euclides de Alexandria, onde o pesquisador situa os participantes sobre fatos da História da Matemática relevantes à pesquisa.

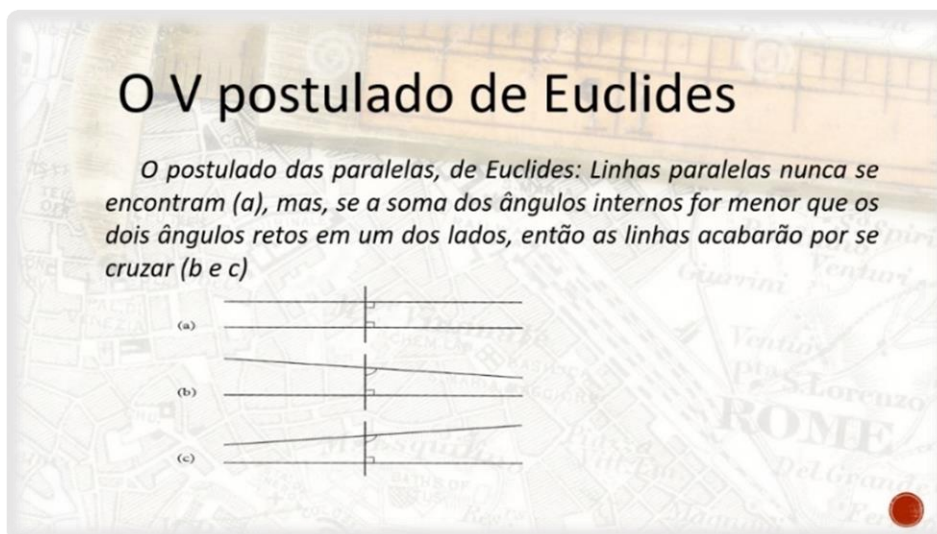
Figura 10 – História da Matemática



Fonte: Construção do autor.

Tem-se na **Figura 15**, o Quinto postulado de Euclides, o intuito da exibição desse slide, foi mostrar a discordância de um grupo de matemáticos, entre eles Bolyai, Lobachevsky, Gauss e Riemann, em relação a este postulado. E os estudos desses matemáticos, foram um dos fatores que geraram o nascimento de uma nova Geometria, diferente da Euclidiana, batizada como Geometria Não-Euclidiana. (COUTINHO, 2001).

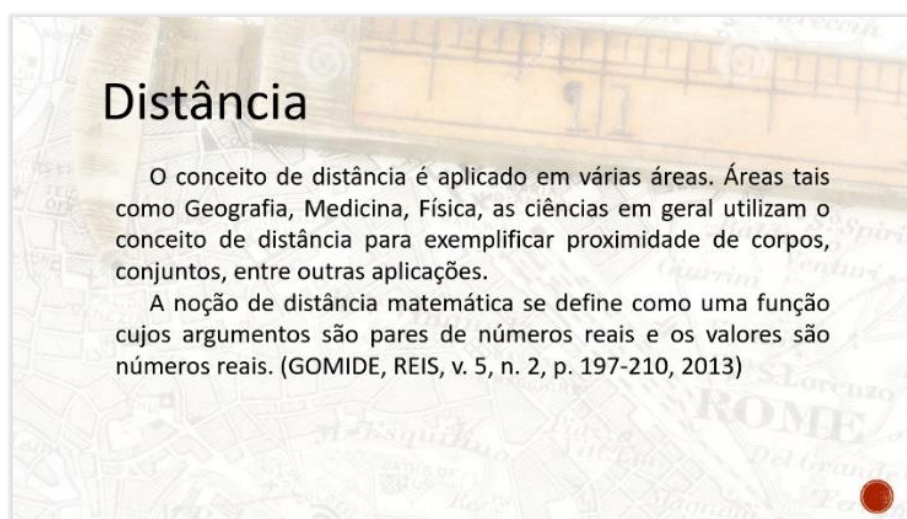
Figura 11 - O Quinto Postulado de Euclides



Fonte: Construção do autor.

Após esse momento da explanação sobre história da matemática nas **figuras 14 e 15**, o pesquisador apresentou *slides* sobre o objeto de pesquisa, “Distância” na **Figura 16**, inicialmente apresentando o conceito de forma geral, e posteriormente os conceitos de Distância Euclidiana na **Figura 17**, *Manhattan* na **Figura 18**, e de Geo-désica na **Figura 16**, com o intuito de oferecer aos participantes teorias sobre distância, utilizando suas definições formais.

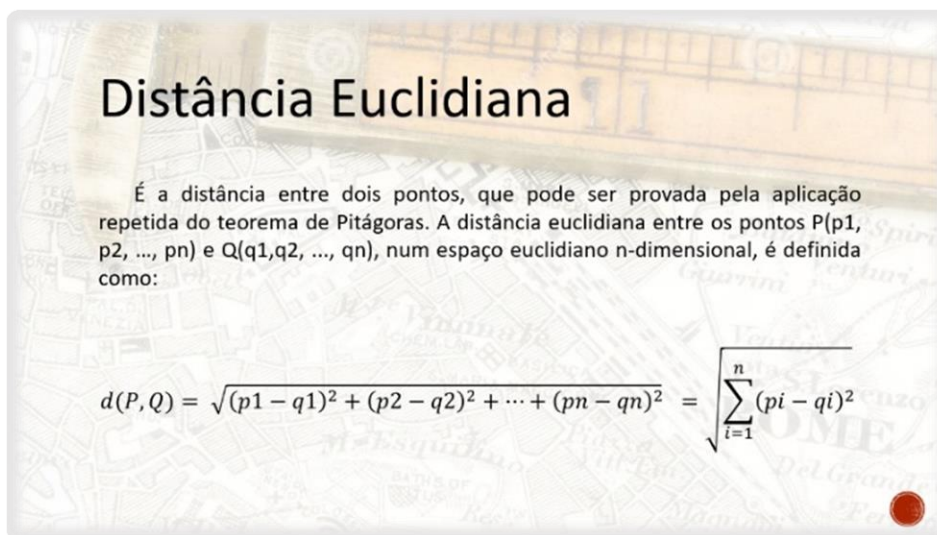
Figura 12 - Conceito de distância



Fonte: Construção do autor.

Na **Figura 17**, é mostrada a definição de Distância Euclidiana, para que os participantes observassem a definição de acordo com Lima (1977), de modo a esclarecer lacunas possíveis em suas definições antes da oficina.

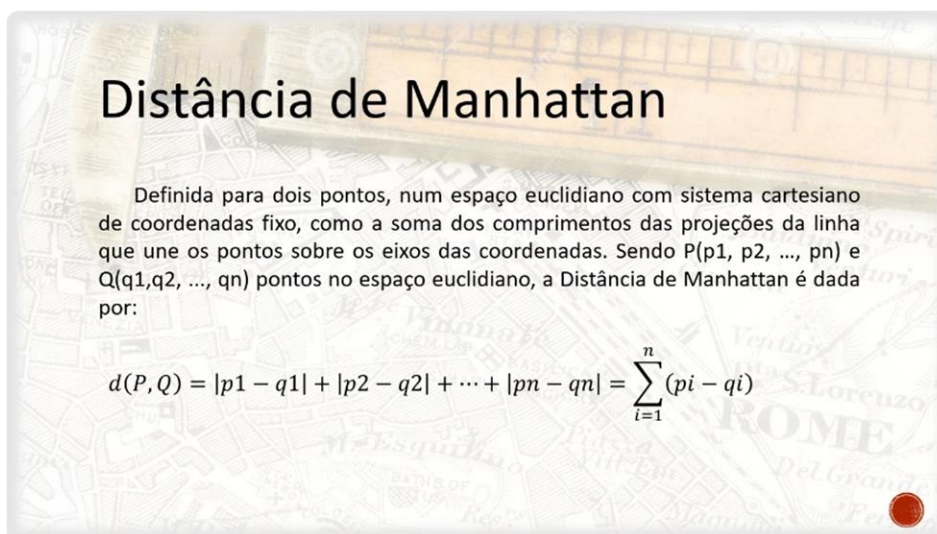
Figura 13 - Conceito de Distância Euclidiana



Fonte: Construção do autor

Na **Figura 18**, de acordo com Lima (1977), se generalizarmos para $n=2$, é possível obter uma interpretação mais simples dessa métrica, e assim, definir a Distância de *Manhattan*.

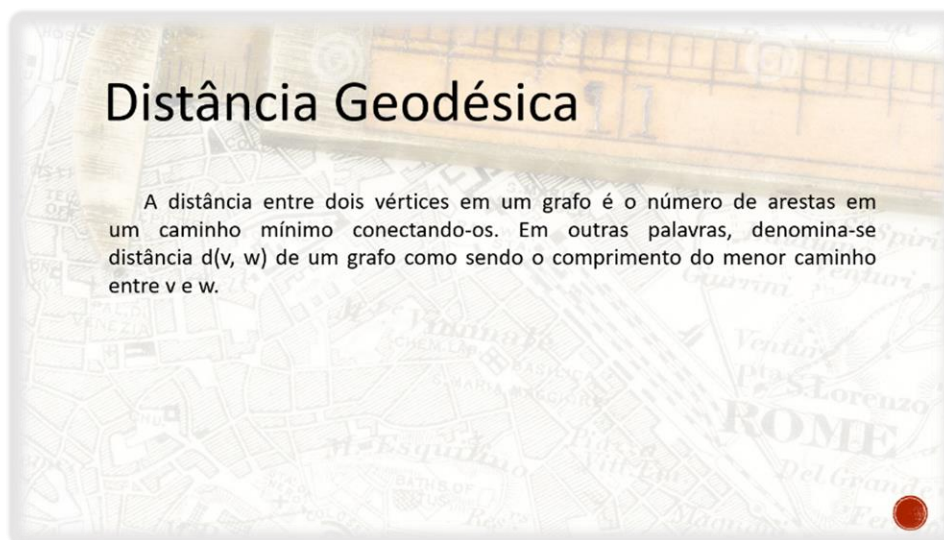
Figura 14 - Conceito de Distância de Manhattan



Fonte: Construção do autor.

Na **Figura 19**, é apresentado aos participantes o conceito de Distância Geodésica, como sendo a distância entre os vértices de um grafo. Logo em seguida, é finalizada a apresentação dos conceitos de distância em várias abordagens.

Figura 15 - Conceito de Distância Geodésica



Fonte: Construção do autor.

Neste momento pós apresentação, foi entregue o material do participante¹, composto por tópicos descritos a seguir:

- Distância – Teoria relacionada à distância, definida de uma forma geral;
- Distância Euclidiana – Teoria de Distância Euclidiana, referente à Geometria Euclidiana;
- Distância Geodésica – Teoria voltada para Distância entre vértices de grafos.
- Distância de *Manhattan* - Teoria sobre a Distância na Geometria do Táxi.
- 4 Atividades, retiradas de questões de ENEM, elaboradas pelo pesquisador, e ainda oriundas da pesquisa;

Os participantes da oficina não receberam a informação de que o material entregue era o protótipo do produto, para que não houvesse direcionamento aos respondentes na aplicação do questionário pós-oficina.

¹ Material do Participante, disponível no APÊNDICE C.

No momento seguinte a apresentação do protótipo do produto, a realização de uma roda de conversas sobre os conceitos abordados na oficina, sobre a execução das atividades propostas no material do participante e análise do mesmo. Essas indagações, e considerações dos participantes da oficina, referentes a mesma foram utilizados para melhorias no protótipo do produto para elaboração da sua versão final.

Logo após a roda de conversas, o pesquisador fez a entrega do Questionário 2 (pós-oficina), para seu preenchimento e após o preenchimento a entrega. Logo em seguida, a oficina foi encerrada com o pesquisador agradecendo a participação na pesquisa.

4.1.1 Amostra

Houve a realização de uma oficina pedagógica para responder um questionamento, e para aplicação do protótipo do produto. O questionamento que norteou a oficina foi: **Qual o conceito de distância os graduandos em matemática possuem?** A oficina pedagógica foi realizada em uma Universidade Particular, tendo como participantes um grupo de 19 graduandos, sendo alunos de 2º e 3º períodos do curso, durante um encontro na aula das disciplinas de Tópicos de Matemática e Prática Docente I e II, do Curso de Licenciatura Plena em Matemática, no dia 03 de Março de 2019. A escolha da turma para realização da oficina pedagógica, foi por conta da escolha do público-alvo para apresentação do Produto Educacional, que é voltado para professores no ensino de distância na educação básica.

4.1.2 Coleta de Dados

Como forma de coleta de dados na aplicação do protótipo do produto, foram utilizados dois questionários semi-esturados compostos por questões abertas e fechadas, um preliminar para averiguar o conceito de distância pré-oficina e um segundo, utilizado pós-oficina para verificar se houve alterações a cerca do conceito de distância. Os questionários aplicados estão disponíveis respectivamente, em apêndice A e apêndice B.

4.1.3 Análise de Dados

Para a análise de dados a respeito da oficina, referente a validação do protótipo do produto, serão utilizadas a classificação de conhecimento segundo Kamii e Livingston (1995), e as definições de distância segundo Gomide e Reis (2013), Lopes (2012) e Lima (1977).

Segundo Kamii e Livingston (1995, p. 19), “O conhecimento físico é o conhecimento dos objetos do mundo exterior.”, seguindo essa definição, podemos utilizar o exemplo de que a rosa é vermelha, a folha de papel é leve. Todas essas propriedades dos objetos do mundo exterior são feitas de forma empírica e de observações.

A cor e o peso de uma conta são exemplos de propriedades físicas que fazem parte do objeto como realidade, exterior, podendo ser conhecidos empiricamente por meio de observação. Saber que a conta cairá dentro do copo se a soltarmos também é um exemplo de conhecimento físico. (KAMII; LIVINGSTON. 1995, p. 19)

De acordo com Kamii e Livingston (1995, p. 19), o conhecimento lógico-matemático é oriundo das relações entre os objetos do mundo exterior. Um exemplo de conhecimento lógico-matemático seria meu time é melhor do que o seu, uma outra aplicação seria: esse livro é mais pesado que esse caderno, ou seja, é um conhecimento proveniente da abstração reflexiva.

E o terceiro dos conhecimentos definidos por Kamii e Livingston (1995, p. 20), é o conhecimento social, que é oriundo das convenções estabelecidas de forma social, ou seja, estabelecidos pela sociedade. Como exemplo, podemos utilizar o fato de que o Dia da Independência ser 7 de setembro, ou de uma “mesa” se chamar mesa. Uma característica do conhecimento social é ser definido arbitrariamente “[...] Por exemplo, nós não poderíamos pensar em halloween sem classificá-lo em oposição a todos os outros dias do ano”.

4.2 Validação do Produto Educacional

A escolha de um grupo focal para validação do produto educacional, se deu, por conta da necessidade de uma abordagem qualitativa, e de haver uma interação

do moderador e o grupo nas discussões propostas favorecendo a coleta de dados e uma investigação de caráter informal.

Segundo Morgan (1997), grupo focal é definido como uma técnica de pesquisa que realiza a coleta de dados por meio da discussão de um tópico específico sugerido pelo pesquisador ao grupo. Como técnica, preenche uma posição que está entre a observação participante e uma entrevista em profundidade.

De acordo com Queiroz (2007):

A observação participante é uma das técnicas muito utilizada pelos pesquisadores que adotam a abordagem qualitativa e consiste na inserção do pesquisador no interior do grupo observado, tornando-se parte dele, interagindo por longos períodos com os sujeitos, buscando partilhar o seu cotidiano para sentir o que significa estar naquela situação.(QUEIROZ; et al, 2007, p. 278).

Segundo Da Silva (2005, p.2), “A técnica de entrevista em profundidade deve ser iniciada com perguntas de caráter mais concreto, fatuais e relacionadas às experiências cotidianas dos sujeitos, para gradativamente passar a perguntas que envolvam reflexões mais abstratas e julgamentos.”

De acordo com Gomes e Barbosa (1999), um GF é um grupo de discussão de caráter informal e de tamanho diminuto, com o objetivo de obter informações para uma avaliação qualitativa.

Em seu trabalho Kind (2004, p. 3), define GF como: “[...] um procedimento de coleta de dados no qual o pesquisador tem a possibilidade de ouvir vários sujeitos ao mesmo tempo, além de observar as interações características do processo grupal.”

Para que sejam alcançados os objetivos do GF, existe a necessidade de que os tópicos explorados nas discussões sejam específicos, e se possam ter várias impressões sobre o tema proposto.(DAMICO, 2006). Em consonância com este fator, na presente pesquisa os tópicos a serem explorados são sobre a utilização de materiais extraclasse no ensino de distância na educação básica, com a elaboração de um livreto sobre distâncias.

No **Quadro 9** a seguir, as principais características de um GF de acordo com Gomes e Barbosa (1999, p. 2):

Quadro 9 - Características de um Grupo Focal

- Cada grupo é organizado com pequeno número de pessoas (entre 7 e 12) para incentivar a interação entre os membros;
- Cada sessão dura de uma a duas horas;
- A conversação concentra-se em poucos tópicos (no máximo 5 assuntos);
- O moderador tem uma agenda onde estão delineados os principais tópicos a serem abordados. Estes tópicos são geralmente pouco abrangentes, de modo que a conversação sobre os mesmos se torne relevante;
- Pode haver a presença de observador externo (o qual não se manifesta) para captar reações dos participantes.
- Os GF's não são úteis para inferências precisas a respeito de toda a população.
- Utiliza questões e respostas não estruturadas, podendo contribuir trazendo novas ideias sobre o assunto que está sendo investigado.
- Deve captar informações e não dar informações

Fonte: Gomes; Barbosa (1999, p. 2)

De acordo com as características citadas por Gomes e Barbosa (1999), a preparação e execução do GF seguem as seguintes etapas: 1) Escolha da equipe; 2) Escolha dos participantes; 3) Duração do evento, e local de realização; 4) Criação do roteiro da discussão; 5) Condução da entrevista; 6) Registro da discussão; 7) Análise dos Resultados.

Em seu trabalho De Abreu, Baldanza e Gondim (2009), ressaltam que as características mencionadas são todas referentes a um GF presencial. E faz uma indagação, se seria possível a aplicação aos GF *online*?. Em seguida responde à pergunta, dizendo que sim, mesmo que existam especificidades em relação a modalidade do GF presencial.

Como método de coleta de informações, se comporta semelhante ao GF presencial, sua característica mais importante, não impede, a sua realização em ambiente virtual, fazendo assim dispensável a presença física dos participantes do grupo para que haja a discussão, essa é a vantagem mais relevante desta modalidade.(DE ABREU; BALDANZA; GONDIM, 2009).

A equipe do GF é formada pelo pesquisador responsável, na figura de moderador, pelo fato de ser um GF *online*, não houve a presença de um observador externo,

que é dispensável na modalidade presencial segundo Gomes e Barbosa (1999), e como possuem características compartilhadas, é aplicável ao GF *online*. (DE ABREU; BALDANZA; GONDIM, 2009).

De acordo com Gomes e Barbosa (1999), o local da realização do GF deve garantir privacidade aos participantes, anonimato e a garantir que os registros sejam utilizados exclusivamente para a pesquisa. De acordo com De Abreu; Baldanza e Gondim (2009), nos locais a seguir existe privacidade: salas de bate-papo virtuais, *e-mails*, grupos de discussões na *internet*. Todos esses são métodos que atendem a privacidade, que se difundiram com o avanço de novas tecnologias de comunicação e informação.

Um roteiro de acordo com Kind (2004, p. 130), “Deverá ser flexível o suficiente para que a discussão transcorra de forma espontânea e ainda assegurar que novas questões possam ser introduzidas”. Ainda sobre roteiro de um grupo, os autores: De Abreu; Baldanza e Gondim (2009), tratam como um esboço de tópicos para se trabalhar no grupo e tem como objetivo garantir que todos os principais assuntos sejam abordados. O roteiro do GF *online* está disponível em APÊNDICE D.

Nosso GF *online*, se deu de forma assíncrona, ou seja, a utilização de um grupo de discussões, foi realizado por meio do *GOOGLE GROUPS*, onde foi criado.

Foi enviado um *e-mail* convite para participação da pesquisa, este convite está no formato de TCLE e um pequeno questionário sobre dados dos futuros respondentes da pesquisa, ainda dando uma visão sobre o tema da pesquisa para que os participantes tenham o conhecimento sobre a ética do trabalho, no total foram enviados dezoito, por conta da possível recusa dos convidados. O referido convite está disponível em ANEXO D, as informações referentes à pesquisa, o motivo de estarem sendo convidados e um pequeno questionário semiestruturado para que o pesquisador possa saber sobre o convidado,

Para a realização do GF *online*, adotamos as definições de Gomes e Barbosa (1999) referentes ao GF presencial, e do trabalho De Abreu; Baldanza e Gondim (2009), que nortearam a realização do GF *online* para validação do Produto Educacional. O objetivo principal do presente GF *online*, é responder o questionamento: **Como a utilização de materiais extraclasse podem contribuir para o ensino da Matemática o que tange distância na Educação Básica?**, e a apresentação do produto educacional parte integrante da pesquisa.

4.2.1 Amostra

Para a aplicação do Produto Educacional, foi realizada formação do GF *online*, a escolha dos membros para a formação do grupo se deu partindo de escolha do pesquisador, os critérios adotados foram: ser professor de matemática, graduado em matemática, e estar no exercício da profissão na educação básica, ou seja, foi uma escolha intencional, o grupo foi formado mediante os critérios do pesquisador, em seguida o envio do *link* do TCLE², e questionário semiestruturado através de *e-mail* para coleta de informações preliminares dos respondentes. Logo após os dezoito convites enviados, foram obtidos 14 aceites para a participação dos respondentes, após esta fase, o grupo foi formado por 8 participantes que fizeram parte das discussões, que de acordo com Gomes e Barbosa (1999), o número de participantes de um GF, por consequência, do GF *online* deve estar entre 7 e 12 integrantes, para que seja possível a observação do comportamento de todos. Em seguida, a discussão se deu pela utilização do *GOOGLEGROUPS* e *WHATSAPP*. Não houve restrição de idade dos participantes e tão pouco tempo de magistério.

4.2.2 Coleta de Dados

A coleta de dados (produto educacional) das discussões do GF *online*, tem como instrumento os registros do grupo realizado de forma assíncrona, coletados através da discussão realizada por *e-mail no GOOGLEGROUPS*³ e no aplicativo *WHATSAPP*⁴. A discussão é realizada com a utilização de um roteiro, que segundo Kind (2004), a ligação entre o grupo e o objetivo de pesquisa fica mais evidenciada quando estes objetivos estão bem definidos, conseqüentemente, levando a um bom roteiro de discussões do GF, e por seguir os mesmos preceitos, o GF *online*.

² TCLE do Grupo Focal disponível em ANEXO D

³ *GoogleGroups* – Ferramenta para discussões em grupo, realizada na plataforma do *GOOGLE*.

⁴ *WhatsAPP* – Aplicativo para troca de mensagens, possibilidade de criação de grupos de participantes.

4.2.3 Análise de Dados

Para análise de dados obtidos na realização do GF *online*, é utilizado o referencial teórico voltado a utilização de matérias extraclasse na educação básica, dando foco aos autores Toledo (2018), Martinez (2016), Loiola e Costa (2015), Brum e Da Silva (2015), Caldato e Pavanello (2014), Leivas (2013), César (2010). Em seus trabalhos os autores supracitados fazem um paralelo entre um ensino mais contextualizado e a utilização de materiais extraclasse na Educação Básica, que de acordo com os PCN no Ensino Médio, o foco do ensino deve ser baseado em uma contextualização à realidade, levando em consideração o cotidiano do aluno e a interdisciplinaridade. (BRASIL, 1999)

5 PRODUTO EDUCACIONAL

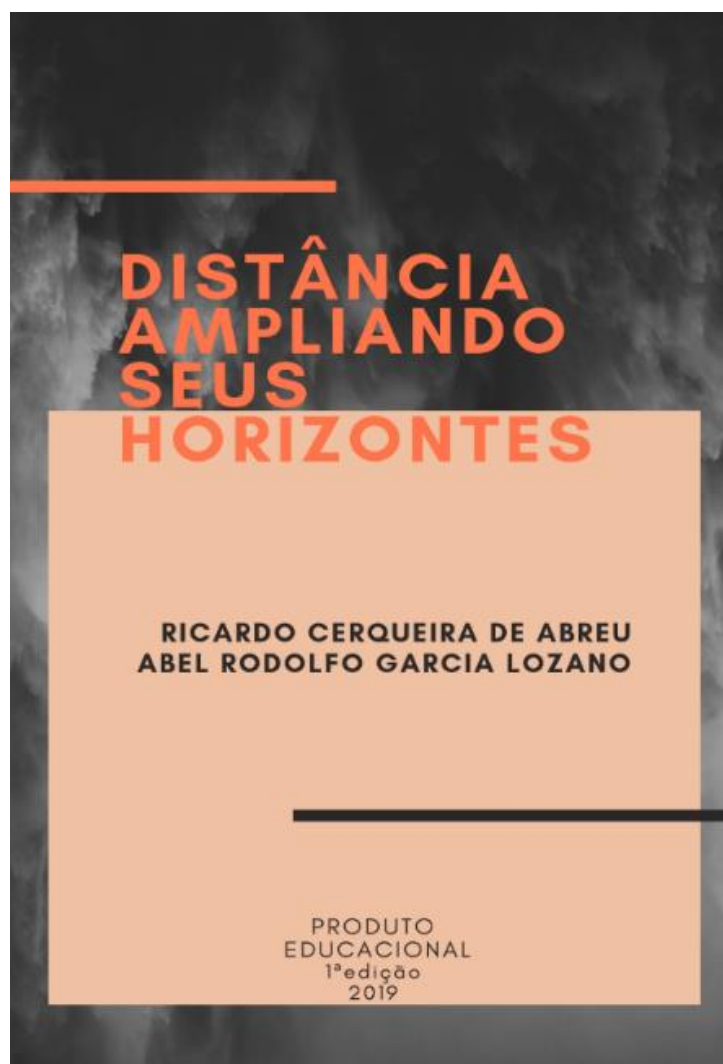
O Produto Educacional do presente trabalho é um livreto, que segundo Dante (1996, p. 83), “[...] só a aula do professor não consegue fornecer todos os elementos necessários para a aprendizagem do aluno”. Nesse sentido nosso livreto pode ser utilizado como material de apoio ao ensino de distância, como um suporte para o professor em sua prática.

De acordo com Barbosa e Noronha (2008), os materiais extraclasse podem ser utilizados em auxílio ao professor, uma vez que o livro didático não é fonte exclusiva de conteúdo, e complementa, “você deve se perguntar: então, que outros materiais poderei utilizar?” (p. 7), em virtude deste fato, nosso livreto poderá servir como resposta a esta pergunta, sendo um material extraclasse no auxílio ao professor no ensino de distância na Educação Básica.

O produto educacional, é elaborado de maneira tal, que possa vir a contribuir com a teoria sobre distância em diversas abordagens (Distância Euclidiana, Distância de *Manhattan* e Distância Geodésica), apresenta aplicações e exemplos das três distâncias, atividades para resolução do leitor, e sugestões de leituras. A seleção das aplicações das distâncias, exemplos e atividades contidas no livreto, foi realizada com dados obtidos com a pesquisa.

Na **Figura 10**, temos a capa do produto educacional de Abreu (2020, p.1), onde é encontrado o título, os autores e a edição do produto. Desde a capa, até as referências o produto possui 28 páginas.

Figura 16 - Capa do livreto



Fonte: Abreu (2020, p. 1)

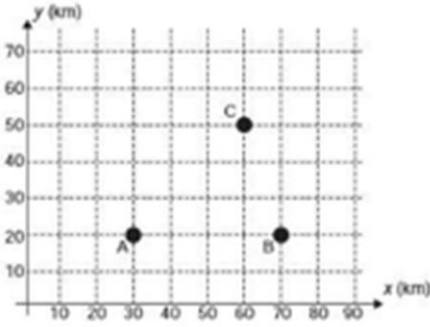
Na **Figura 11** pode-se ver uma das atividades, uma questão do ENEM do ano de 2013, contida no produto educacional intitulado DISTÂNCIA AMPLIANDO SEUS HORIZONTES: Uma alternativa didática voltada aos Professores de Matemática no Ensino da Matemática (ABREU, 2020, p. 13), onde é abordado o conceito de Distância Euclidiana, fazendo a contextualização com o meio, com a realidade do aluno. (MARTINEZ, 2016).

Figura 17 - Questão ENEM 2013 - Distância Euclidiana

2.1 Atividades

2.1.1 Questão ENEM- 2013

Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:

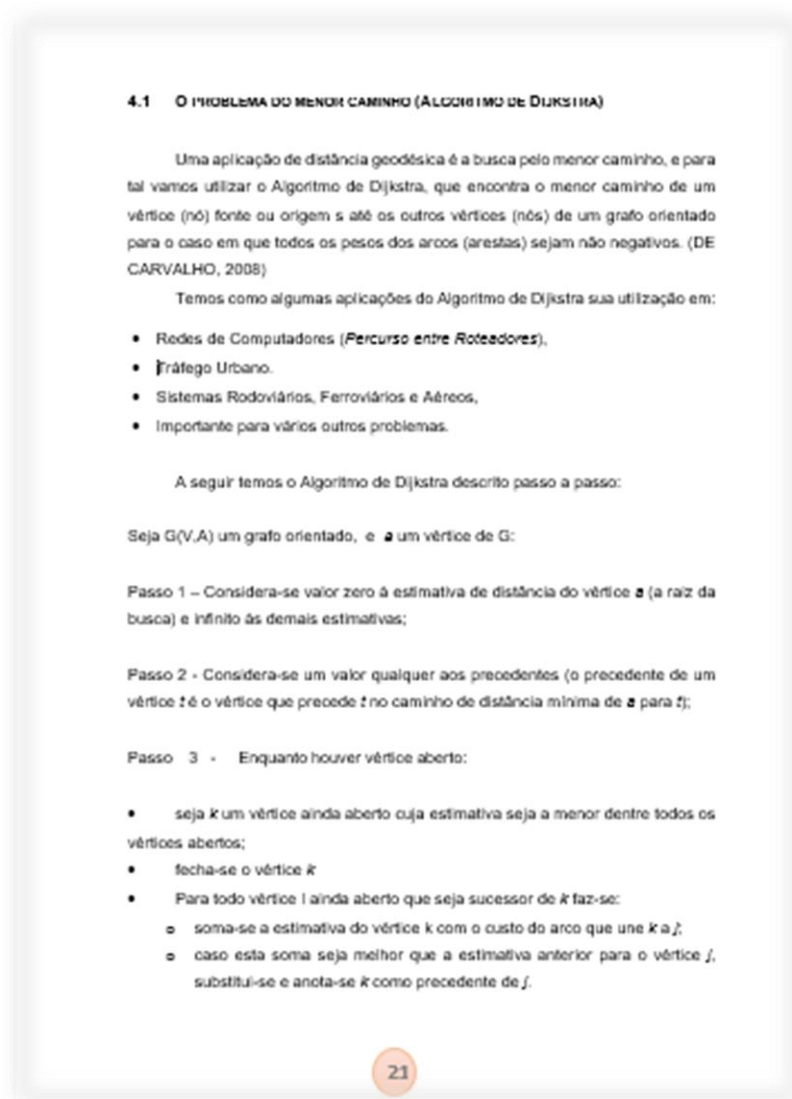


Antena	x (km)	y (km)
A	30	20
B	70	20
C	60	50

Fonte: Abreu (2020, p. 13)

De acordo com a formulação do Produto Educacional de Abreu (2020), na **Figura 12**, temos uma aplicação sobre Distância Geodésica, se trata do algoritmo de Dijkstra, ele busca o menor caminho entre grafos, partindo de um nó e retornando ao mesmo. (DE CARVALHO, 2008).

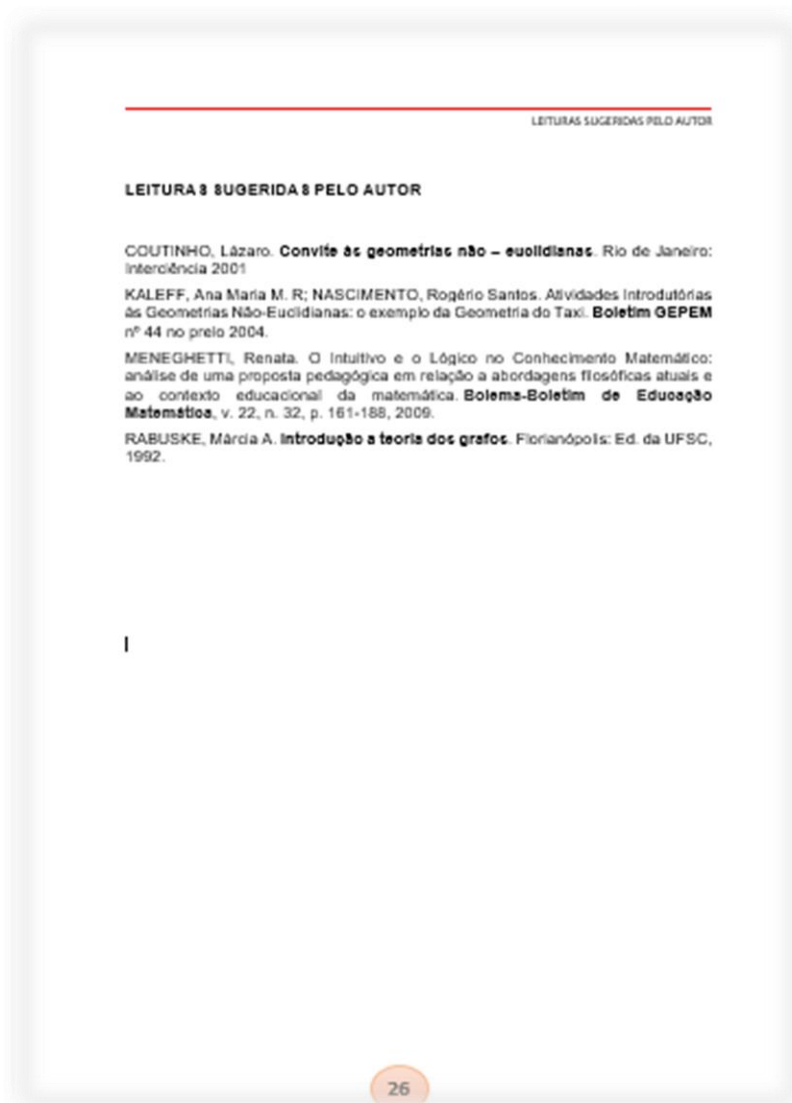
Figura 18 – Algoritmo de Dijkstra



Fonte: Abreu (2020, p. 21).

Na figura seguinte, podemos ver as leituras sugeridas pelo autor, onde o objetivo é oferecer aos professores leituras complementares sobre Distância em diversas abordagens.

Figura 19 – Sugestões de Leitura



Fonte: Abreu (2020, p. 26)

Na seção 6 a seguir, serão apresentados os resultados e discussões referentes a validação do produto educacional em suas duas etapas descritas na seção 4 e sobre o produto educacional na seção 5.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para apresentação dos resultados da aplicação do protótipo do produto, vale retornar ao questionamento: **Qual é o conceito de distância que os graduandos em matemática possuem?**

Vamos nesse momento explicitar os resultados apartir da análise do questionário preliminar, afim de averiguar as definições e informações referentes a distância, e como primeira questão temos no **Quadro 10**:

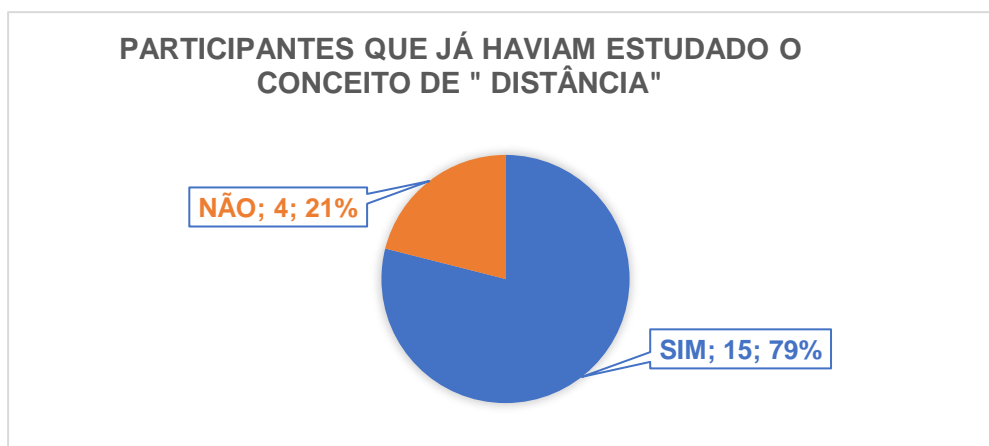
Quadro 10 - Questão 1 do questionário preliminar

Você já estudou Distância em alguma disciplina cursada na sua graduação?
() Sim () Não

Fonte: Questionário preliminar

De acordo com Leivas (2013), onde os participantes de sua pesquisa, em sua grande maioria, responderam as questões relacionadas a geometria todas baseadas em Geometria Euclidiana, o que corrobora com nossos resultados explicitados a seguir: Como resultado da primeira questão, 15 participantes escolheram “sim”, ou seja, já estudaram o conceito de “Distância”, e outros 4 participantes escolheram “não”, dizendo que não haviam estudado na graduação.

Gráfico 1 - Respostas da Questão 1, no Questionário 1



Fonte: Dados da Pesquisa

Na **questão 2**, temos uma questão aberta, onde o intuito era verificar qual era a definição que os participantes possuíam sobre a distância entre dois objetos, sem nenhuma intervenção prévia pelo pesquisador.

Quadro 11 - Questão 2 do questionário preliminar

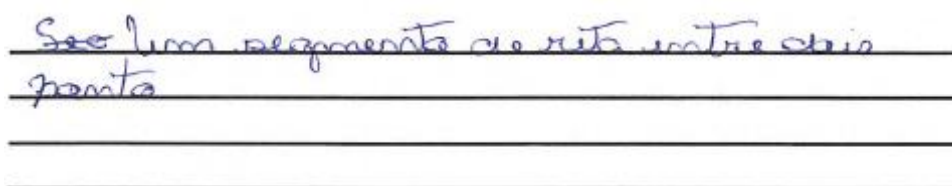
Como você definiria a distância entre dois objetos?

Fonte: Questionário preliminar

Foram selecionadas algumas respostas referentes a questão para análise, seguindo os conceitos dos tipos de conhecimento de Kamii e Livingston (2001, p. 19), definição de distância dada por Lopes (2012) e os autores da nossa revisão sistemática.

Na **Figura 20**, temos a resposta do participante A, de acordo com Kamii e Livingston (2001), é um conhecimento lógico-matemático, devido sua resposta ter sido semelhante a definição de Distância Euclidiana dada por Lima(1977), portanto, o participante possui conhecimento prévio sobre Distância Euclidiana e ainda corroborando com os resultados de Leivas (2013), em sua pesquisa a respeito de seus respondentes darem ênfase aos conceitos de Geometria Plana.

Figura 20 - Resposta do participante A Questão 2, questionário 1

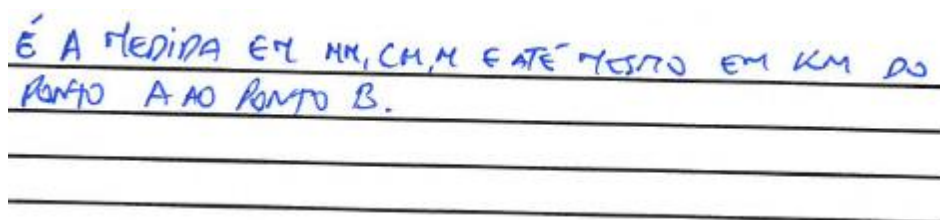


Seo um segmento de reta entre dois pontos

Fonte: Dados da pesquisa

Na **Figura 21**, a resposta do participante B referente a sua definição de distância está incorreta, e confusa, esse conhecimento do participante é classificado como físico, que segundo Kamii e Livingston (2001), de acordo com Lima (1977), ele utilizou a representação geométrica de distância para fazer sua conceituação, mesmo equivocado sua colocação corroborou mais uma vez com os resultados de Leivas (2013), no que tange a Geometria Euclidiana.

Figura 21 - Resposta do participante B, Questão 2, questionário 1

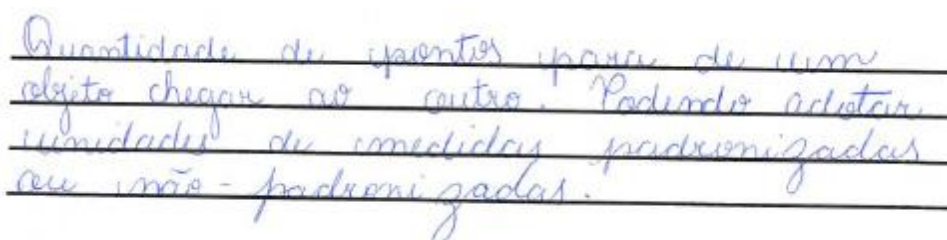


É A MEDIDA EM M, CM, M E ATÉ MESMO EM KM DO PONTO A AO PONTO B.

Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com Lopes (2012), a resposta contida na **Figura 22** não atende a definição, e o conhecimento empregado pelo participante é do tipo físico, segundo Kamii e Livingston (2001). A definição utilizada pelo participante não está correta, uma vez que se refere a distância fazendo uso de unidades de medida.

Figura 22 - Resposta do participante C, Questão 2, questionário 1

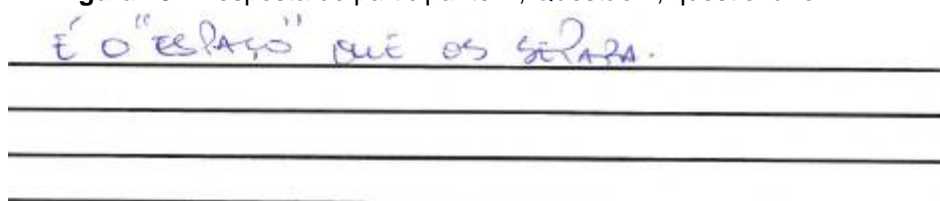


Quantidade de objetos para de um objeto chegar ao outro. Podendo adotar unidades de medidas padronizadas ou não-padronizadas.

Fonte: Dados da pesquisa

Na **Figura 23**, o participante D, define distância de uma forma geral, de acordo com a definição de Lopes (2012), e atendendo ao conceito de conhecimento lógico-matemático de Kamii e Livingston (2001). Deste modo, o participante conceituou de maneira correta, e esperada pelo pesquisador.

Figura 23 - Resposta do participante D, Questão 2, questionário 1



É o "espaço" que os separa.

Fonte: Dados da pesquisa

Na **Figura 24**, pode-se observar que o participante utilizou a definição de distância de Lopes (2012), e constata-se que possui conhecimento lógico-matemático de Kamii e Livingston (2001).

Figura 24 - Resposta do participante E, Questão 2, questionário 1

DISTÂNCIA É A MEDIDA DA SEPARAÇÃO DE DOIS OBJETOS

Fonte: Dados da pesquisa

Fazendo a análise da resposta do participante E na **Figura 24**, o participante conceituou distância de acordo ao esperado na pesquisa, segundo Lopes (2012), com isso pode ser dito que o mesmo possui o conhecimento lógico-matemático.

Analisando as respostas para a segunda questão de alguns dos participantes, foi verificado que as definições que possuem são bem distintas, e algumas não corretas, não atendendo as definições de Lopes (2012), Lima(1977), deste modo, as definições que mais se aproximaram da utilizada para análise, e do conhecimento lógico-matemático, são as respostas ilustradas nas **figuras 21, 23 e 24**, com uma ressalva a respeito da resposta da **figura 21**, que fez o uso da representação geométrica da Distância Euclidiana para definir distância.

Como terceira questão, utilizou-se uma questão onde o participante deveria indicar por meio de uma marcação quais distâncias distintas o mesmo já havia tomado conhecimento, ou seja, buscou-se saber se o mesmo já tinha tido contato com alguma das distâncias que eram objetos da pesquisa. A questão está representada no **Quadro 12** a seguir:

Quadro 12 - Questão 3 do questionário preliminar

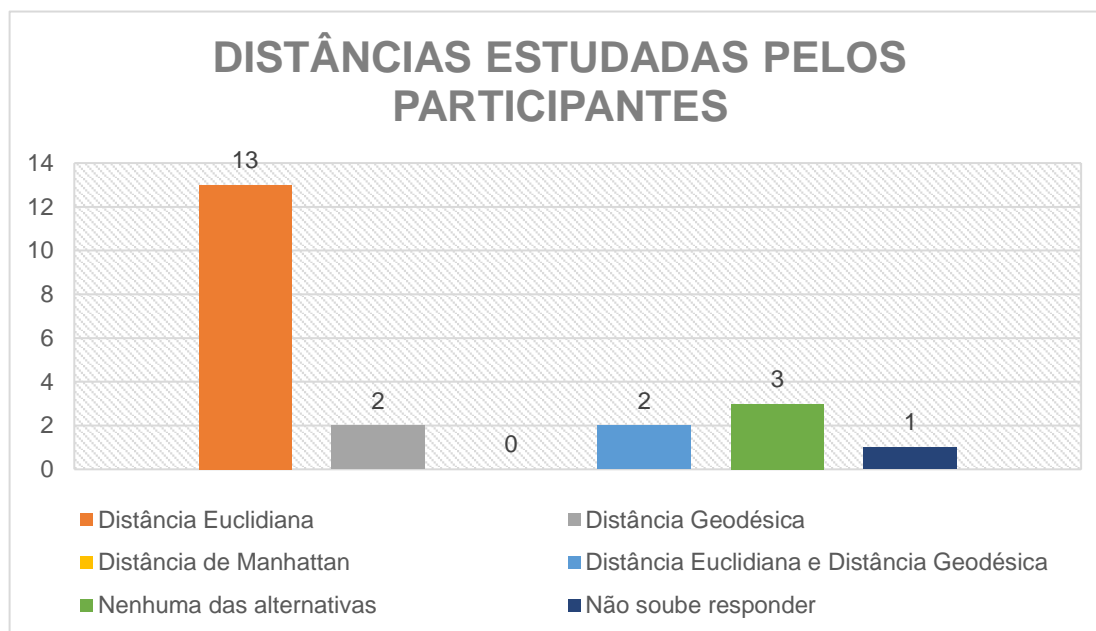
Das distâncias abaixo citadas, quais você já estudou? Assinale com um X suas alternativas:

- () Distância Euclidiana
- () Distância de *Manhattan*
- () Distância Geodésica
- () Nenhuma das alternativas
- () Não sei responder

Fonte: Questionário preliminar

Para melhor visualização dos resultados obtidos, e posterior análise, foram representados no **Gráfico 2**, os participantes poderiam escolher mais de uma opção.

Gráfico 2 - Respostas dos participantes a questão 3, questionário 1



Fonte: Dados da Pesquisa

Com as respostas dos participantes, podemos verificar que a Distância Euclidiana é a mais estudada com treze pessoas, três participantes não estudaram as distâncias, um não soube responder a questão, nenhum já havia estudado a Distância de *Manhattan*, dois disseram que já haviam estudado a Distância Euclidiana e a

Geodésica, e dois a Geodésica. Deste modo, deve-se considerar a importância de maior atenção no ensino de diversas teorias a respeito do tema, afim de tornar mais difundidas as distâncias na Educação Superior, em acordo com os resultados de Leivas (2013, p. 669), onde cita a comprovação de sua hipótese de pouca informação a respeito de Geometrias não Euclidianas na formação de professores, no Rio Grande do Sul.

Na quarta questão, utilizou-se uma questão fechada, onde o intuito da mesma era verificar se existia o interesse de aprofundamento sobre o tema. A questão pode ser vista no **Quadro 13**:

Quadro 13 - Questão 4 do questionário preliminar

<p>Distância é um assunto que deve ser trabalhado na escola/graduação de uma forma mais abrangente?</p> <p>() Sim () Não</p>
--

Fonte: Questionário preliminar

Em relação as respostas obtidas sobre a maneira como deve ser trabalhado o conceito de distância na escola/graduação, do total de 19 participantes, 17 deles responderam que SIM, que realmente seria interessante um aprofundamento em relação a este estudo, e apenas 2 participantes responderam que NÃO, que a abordagem já trabalhada era suficiente, ou ainda, não cabia um aprofundamento sobre o tema, portanto, os 17 participantes, desejam um conhecimento lógico-matemático, e não somente o conhecimento físico ou social presentes em algumas das definições dadas pelos mesmos.

Em relação a questão 5, buscou-se verificar com os participantes qual deveria ser a abordagem do conceito nas aulas de matemática pelo professor regente da disciplina. No **Quadro 14**, pode ser vista a questão:

Quadro 14 – Questão 5 do questionário preliminar

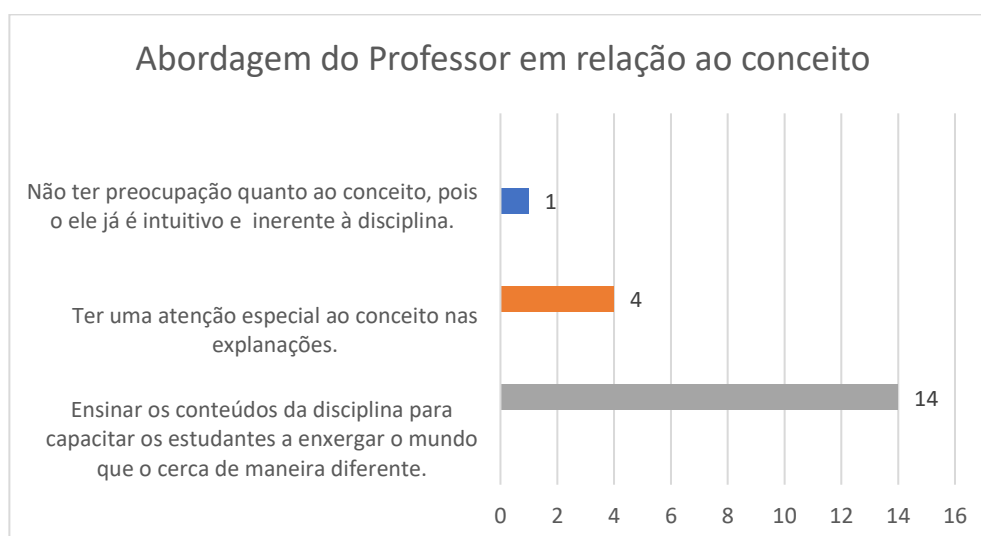
Como um Professor de Matemática deveria abordar o conceito de distância nas aulas de Matemática?

- () Não ter preocupação quanto ao conceito, pois o ele já é intuitivo e inerente à disciplina.
- () Ter uma atenção especial ao conceito nas explicações.
- () Ensinar os conteúdos da disciplina para capacitar os estudantes a enxergar o mundo que o cerca de maneira diferente.

Fonte: Questionário preliminar

A seguir temos a representação dos resultados em forma de um gráfico em barras horizontais, onde pode ser visto, que os participantes acreditam que a melhor maneira de se ensinar o conceito, é de tal forma que os alunos se capacitem para ver o mundo que os cercam de uma maneira mais abrangente, e diferente da atual. Os respondentes acreditam que uma maneira diferenciada na forma de trabalhar os conteúdos podem ser mais relevantes, de acordo com o trabalho de Toledo (2018), que mesmo o tendo trabalhado com Ensino Básico, pode-se fazer um paralelo com os alunos de graduação que trabalhamos, no sentido de buscar relevância no cotidiano do aluno, tornando-o mais significativo e tangível, corroborando também com os PCN's (BRASIL, 1999).

Gráfico 3 - Resposta para a questão 5, questionário 1



Fonte: Dados da Pesquisa

A sexta e última questão do questionário preliminar, buscou averiguar o interesse do participante em agregar informações além das que já propostas durante seus estudos em sua formação. Observe a questão no **Quadro 15**.

Quadro 15 - Questão 6 do questionário preliminar

<p>Você tem costume de buscar informações, estudos fora do âmbito de sala de aula?</p> <p>() Sim () Não</p>

Fonte: Questionário preliminar

Como quantificação da mesma, as respostas obtidas dos 19 participantes da pesquisa que responderam a questão 6, 16 participantes responderam que SIM, eles fazem a busca por informações fora da sala de aula, e outros 3 responderam que NÃO, eles não realizam buscas por informações extras, ou seja, as obtidas em sala de aula são suficientes para sua instrução e estudos.

Durante a realização da oficina, foram estudados os conceitos de distância abordados na pesquisa: Distância Euclidiana, Distância de *Manhattan* e Distância Geodésica. Além dos conceitos das distâncias, foi realizado um breve histórico sobre a Geometria, a diferença que existe entre axiomas e teoremas, o quinto postulado de Euclides, e trabalhados exemplos sobre as distâncias.

Foi realizado a apresentação do protótipo do produto educacional, em forma de material do participante da oficina (APÊNDICE C), o objetivo é que os participantes pudessem ter contato com o produto, observando os conceitos, atividades referentes as distâncias, exemplos e aplicações sobre distância.

Para cada participante foi entregue para ser preenchido o questionário pós-oficina (APÊNDICE B), alguns participantes não puderam continuar até o término, desta maneira, o número de participantes foi reduzido para 15 para continuidade, onde a intenção era verificar se as respostas obtidas no questionário preliminar, tinham sofrido alterações. Após a coleta dos resultados, foi realizada uma análise dos dados.

Como primeira questão do questionário pós-oficina, temos a questão fechada, pode ser vista no **Quadro 16**:

Quadro 16 - Questão 1 do questionário pós-oficina

<p>A definição de distância entre dois pontos foi alterada após a oficina?</p> <p>() Sim () Não</p>

Fonte: Questionário pós-oficina

Sobre esta questão, dos 15 participantes, 8 deles responderam SIM e outras 7 responderam NÃO para a questão 1, ou seja, não tiveram sua definição de distância alterada após a execução da oficina. Com isso, ainda tivemos a predominância da definição da Geometria Euclidiana, corroborando Leivas (2013).

Para analisarmos a segunda questão, dando continuidade a questão 1 do questionário pós-oficina, foi perguntado aos participantes que responderam SIM para questão 1:

Quadro 17 -Questão 2 do questionário pós-oficina

<p>Qual era a definição de distância pós-oficina ?.</p>

Fonte: Questionário pós-oficina

Na **Figura 25**, pode ser visto que, o participante A, definiu distância nesse momento como proximidade entre dois corpos, desta vez a definição está mais próxima da definida por Lopes (2012), e o conhecimento pode ser classificado como conhecimento lógico-matemático.

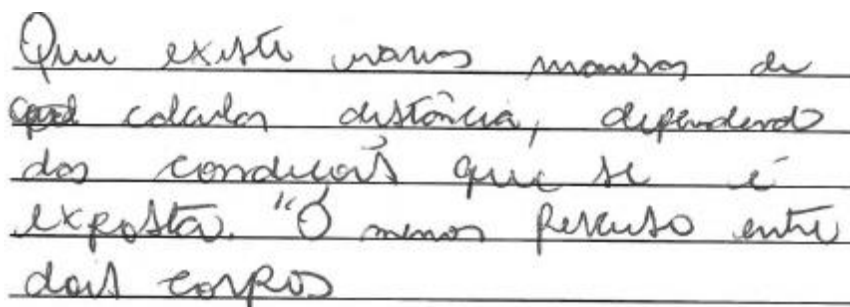
Proximidade entre dois corpos

Fonte: Dados da pesquisa

Na **Figura 26** abaixo, resposta do participante B, referente a questão 2, questionário 2, temos uma melhor exploração de distância quanto a sua definição

mais ampla, o participante fez a distinção das diferentes abordagens do tema, mostrando que o conhecimento lógico-matemático está associado ao seu conhecimento físico.

Figura 26 - Resposta do participante B, Questão 2, questionário 2

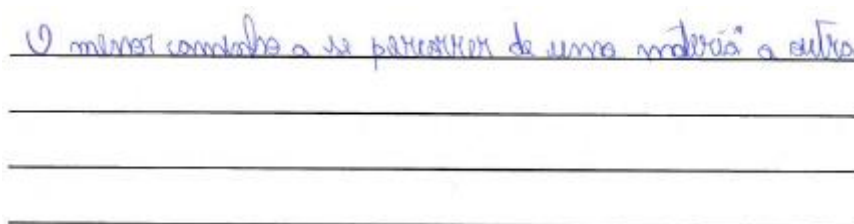


Que existe vários modos de
pod calcular distância, dependendo
dos condições que se é
expostas. "O menor percurso entre
dois corpos

Fonte : Dados da pesquisa

Na **Figura 27**, o participante C, questão 2, questionário 2, trabalha uma definição bem próxima do que define Lopes (2012), mostrando que a intervenção realizada na oficina pode ser de grande valia, pois, para Vieira e Volquind (2002, p. 11), uma "Oficina é uma modalidade de ação.", deste modo, a troca de conhecimentos, são de grande importância no processo de ensino.

Figura 27 - Resposta do participante C, Questão 2, questionário 2

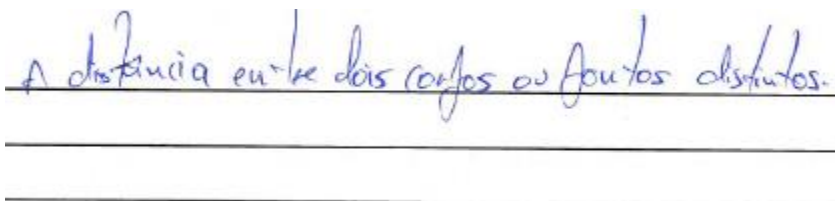


O menor caminho a se percorrer de um ponto a outro

Fonte: Dados da pesquisa

Para o participante D, na **Figura 28**, sua definição está bem confusa, não se enquadrando em nenhuma distância estudada na pesquisa, e esse conhecimento apresentado pode ser classificado como físico, segundo Kamii e Livingston. (2001, p. 19)

Figura 28 - Resposta do participante D, Questão 2, questionário 2

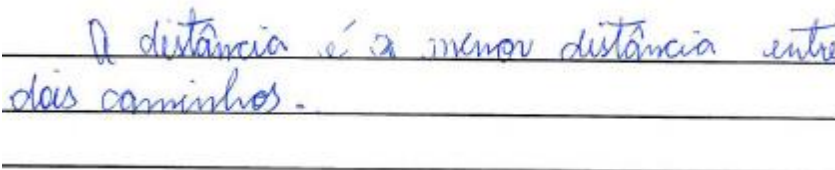


A distancia entre dois corpos ou pontos distintos.

Fonte: Dados da pesquisa

As **Figuras 29 e 30**, respectivamente participantes E e F, sobre a questão 2, questionário 2, chegaram a definir distância como o menor caminho, sendo deste modo, se aproximaram da definição de Lopes (2012) em seu trabalho, com um conhecimento lógico-matemático após a participação da oficina. O conceito empregado pelo participante atendeu as expectativas do pesquisador, pós-oficina.

Figura 29 - Resposta do participante E, Questão 2, questionário 2

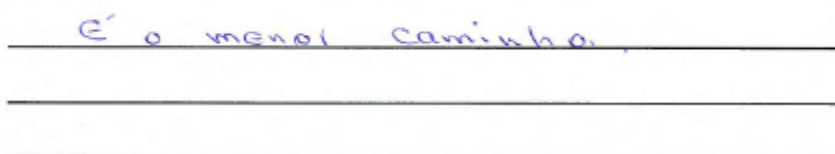


A distancia é o menor distancia entre dois caminhos.

Fonte: Dados da pesquisa

Na **Figura 30**, o participante definiu como sendo distância o menor caminho, utilizando a definição de Lopes (2012), e segundo Kamii e Livingston (2001) conhecimento lógico-matemático.

Figura 30 - Resposta do participante F, Questão 2, questionário 2



É o menor caminho.

Fonte: Dados da pesquisa

O sétimo participante da pesquisa mesmo respondendo SIM para a alteração da definição sobre distância não respondeu a questão 2 do questionário, sendo assim não foi transcrita como as anteriores.

Pode ser feito um paralelo entre as questões 2 do primeiro, e do segundo questionário, onde lhe foi perguntado a respeito do conceito de distância, que o participante possuía antes das atividades, e pós atividades. Podemos perceber nas respostas, que apesar de alguns não terem definido distância de forma precisa, uma parte dos participantes se utilizaram de definições similares a utilizada por Lopes (2012), Gomide e Reis (2013) e Lima (1977), e em consonância com os resultados de Leivas (2013), pautados na Geometria Euclidiana em detrimento as outras Geometrias não Euclidianas.

De acordo com as respostas dos participantes, foi possível ver uma diferença entre as respostas dos questionários 1 e 2, o objetivo das questões foram atingidos, podemos perceber que pós-oficina houve uma mudança nos conceitos. A conceituação foi feita de maneira mais clara.

Dando continuidade aos resultados temos a questão número 3 do questionário pós-oficina. A questão 3 é a seguinte:

Quadro 18 - Questão 3 do questionário pós-oficina

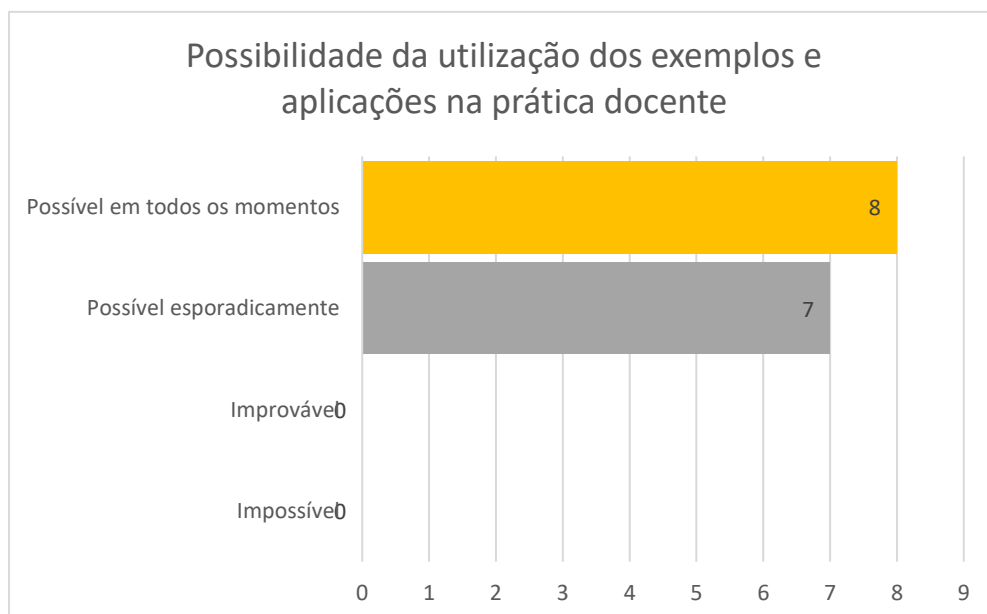
Como você considera a possibilidade de adoção/utilização do ensino através das aplicações e exemplos de diversos casos de distâncias na resolução dos mesmo na aula de matemática.

- Impossível**
- Improvável**
- Possível esporadicamente**
- Possível em todos os momentos**

Fonte: Questionário pós-oficina

A representação gráfica abaixo é mais conveniente para a apresentação dos resultados e seu melhor entendimento.

Gráfico 4- Respostas da questão 3, questionário 2



Fonte: Dados da pesquisa

Com o resultado da questão, podemos considerar que os participantes vêem possibilidade de utilizar exemplos e aplicações sobre as diferentes teorias sobre distância, tornando assim mais ampla e diversificada sua prática docente, corroborando os resultados de Toledo (2018), no que tange a utilização de materias extraclasse, fazendo menção ao cotidiano do aluno, e de acordo com PCN's (BRASIL, 1999).

O que tange a questão número 4, que diz respeito a utilização de conteúdos sobre distâncias, se devem ou não ser estudados como disciplinas regulares nos cursos de licenciatura em matemática. A questão foi:

Quadro 19 - Questão 4 do questionário pós-oficina

Você acredita que temas, e conteúdos como este, deveriam fazer parte das disciplinas regulares existentes nos cursos de Licenciatura em Matemática.

() Sim () Não

Fonte: Questionário pós-oficina

Sobre a questão proposta, foram obtidos os seguintes resultados: Todos os participantes responderam SIM para a questão, ou seja, foi unanimidade entre os participantes da pesquisa em dizer que deveria sim existir disciplinas regulares sobre o tema nos cursos de licenciatura, o que nos mostra a necessidade de uma formação mais diversificada, criando um ambiente mais amplo em suas abordagens em relação a distância, ou seja, o tema da pesquisa, e em consonância com Leivas (2013, p. 669), “[...] Dessa forma, o docente que atua na escola básica não incorpora à sua prática outras noções a menos das euclidianas, não adquirindo uma formação mais ampla para seu exercício profissional.”

A questão número 5, trata da visão do participante em relação a forma com que ele gostaria que fosse ministrado o tema distância. A questão na íntegra está disponível no quadro 20:

Quadro 20 - Questão 5 do questionário pós-oficina

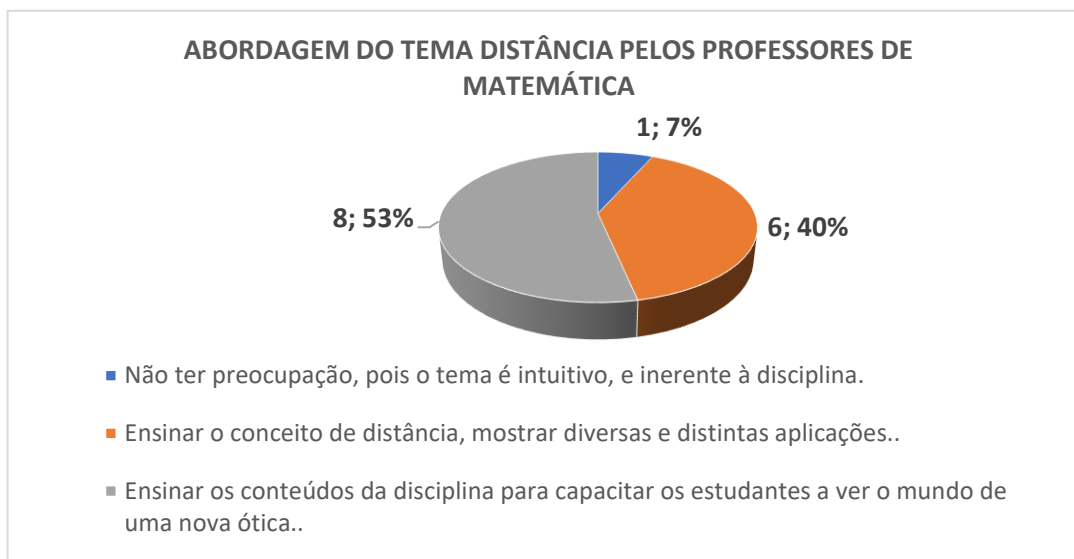
Como um Professor de Matemática deveria abordar o conceito de distância?

- () Não ter preocupação, pois o tema é intuitivo e inerente à disciplina.
- () Ensinar o conceito de distância, e mostrar diversas e distintas aplicações.
- () Ensinar os conteúdos da disciplina para capacitar os estudantes a ver o mundo de uma nova ótica.

Fonte: Questionário pós-oficina

No gráfico a seguir, temos a representação dos resultados da questão 5:

Gráfico 5 – Respostas da questão 5, questionário 2



Fonte: Dados da pesquisa

Analisando as respostas da questão no gráfico acima, pode-se verificar que 8 participantes desejam que professores trabalhem os conteúdos da disciplina capacitando os estudantes a ver o mundo de uma nova ótica, 6 participantes acreditam que ensinar conceitos de distância, mostrar diversas e distintas aplicações deve ser a maneira da abordagem do professor, fazendo a junção do conhecimento físico e do conhecimento lógico-matemático de Kamii; Livingston (1995, p. 19) e apenas um participante acredita que o professor não precisa ter preocupação, o tema é intuitivo, e inerente à disciplina em questão, o que se pode perceber, é o interesse do grupo em ter mais abrangência na abordagem de distância, e não somente uma transmissão de conceitos, de que é importante utilizar abordagens diferentes, contextualizadas, e voltadas para a realidade do cotidiano do aluno, fazendo que seja mais significativo de acordo com os PCN's (BRASIL, 1999) e Toledo (2018).

Finalizando a análise do Questionário pós-oficina, no **Quadro 21**:

Quadro 21 - Questão 6 do questionário pós-oficina

Como forma de acessar outros conteúdos com o objetivo de obter maiores detalhes, possibilidades e contribuições quanto à aplicação e/ou utilização de metodologias, de novas abordagens sobre o tema Distância, você considera fazer essa busca através de qual/quais meios de informação?

() **Seminários e Congressos**

() **Artigos Científicos**

() **Vídeo-aulas**

() **Apostilas e Livros**

() **Outro. Qual(is)?** _____

Fonte: Questionário pós-oficina

Na tabela a seguir são apresentados os resultados da questão 6, onde pode ser verificado que 13 participantes tem preferência por apostilas e livros, como possíveis fontes de consulta, caso sinta a necessidade de buscar informações fora da sala de aula, o que nos mostra que para este grupo, o livreto sobre distância é uma alternativa válida como fonte de pesquisa, como material de consulta afim de diversificar sua prática docente, trazendo ao seu aluno uma visão mais ampliada dos conteúdos propostos, de acordo com Leivas (2013), que trabalha a falta de informações a respeito de Geometrias não Euclidianas, na formação docente.

Tabela 2 - Forma preferencial de acesso à conteúdos extraclasse pelos participantes da pesquisa

MEIOS DE ACESSO	Nº PARTICIPANTES
Seminários e Congressos	9
Artigos Científicos	10
Video-Aulas	10
Apostilas e Livros	13
Outros	2

Fonte: Dados da pesquisa

Vale ressaltar que os participantes não possuíam as informações sobre o formato do produto educacional. A participação dos presentes foi muito importante na realização da oficina, com o preenchimento dos questionários, realização das atividades propostas, com seu comprometimento, suas colocações sobre o tema, suas observações a respeito da oficina, em consequência, na roda de conversas com sugestões e críticas ao produto educacional.

Algumas informações foram relevantes a respeito do produto para sua construção a partir de seu protótipo. As informações foram retiradas de indagações e anseios, passadas pelos participantes durante a roda de conversas realizada. As principais considerações dos participantes a respeito do protótipo do produto podem ser vistas a seguir:

- Dar maior foco nas definições de Distância abordadas na oficina, dar ênfase ao dizer que: a menor distância é redundante.
- Aumentar o número de exemplos, aplicações e atividades referentes às distâncias apresentadas no Produto.
- Inclusão de um tópico sobre Distância Não-Euclidiana no Produto.
- Aprofundamento no estudo do Quinto Postulado de Euclides.

Adaptações e alterações foram realizadas no livreto para sua versão final, tornando-o mais didático aos leitores, seguindo sugestões realizadas pelos participantes durante a roda de conversa durante a oficina pedagógica realizada,

Para apresentação dos resultados referentes ao GF *online*, iremos traçar um perfil dos respondentes em relação a sua idade e tempo de magistério, apesar de não haver restrições. Responderam à pergunta: **Qual é sua idade ?** Um total de 14 participantes, e esses resultados estão expressos logo a seguir:

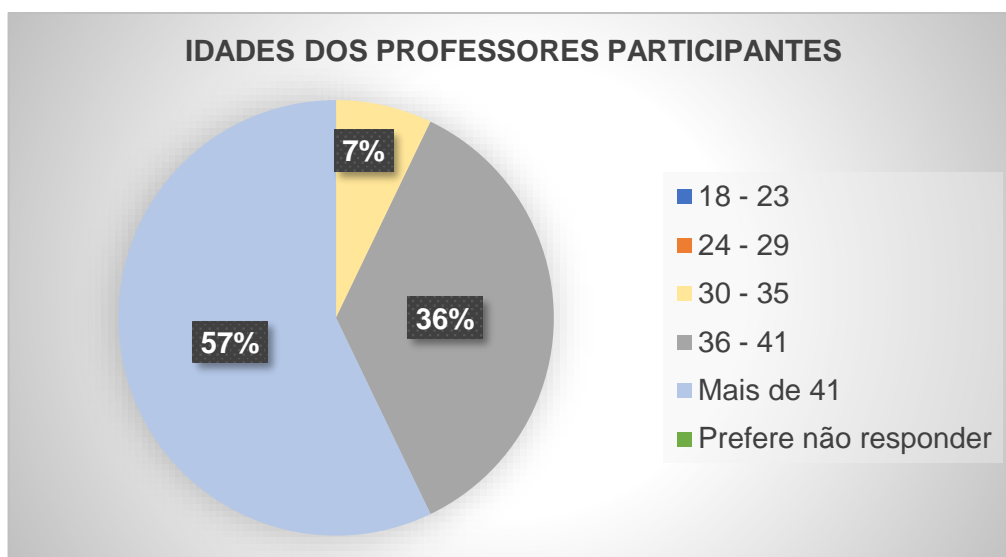
Tabela 3 - Idade dos Professores Participantes

IDADES (anos)	Nº DE RESPONDENTES
18 – 23	0
24 – 29	0
30 – 35	1
36 – 41	5
Maior de 41	8
Prefere não responder	0
TOTAL	14

Fonte: Dados da pesquisa

Logo abaixo podemos verificar as idades através do gráfico de setores para uma visualização mais rápida.

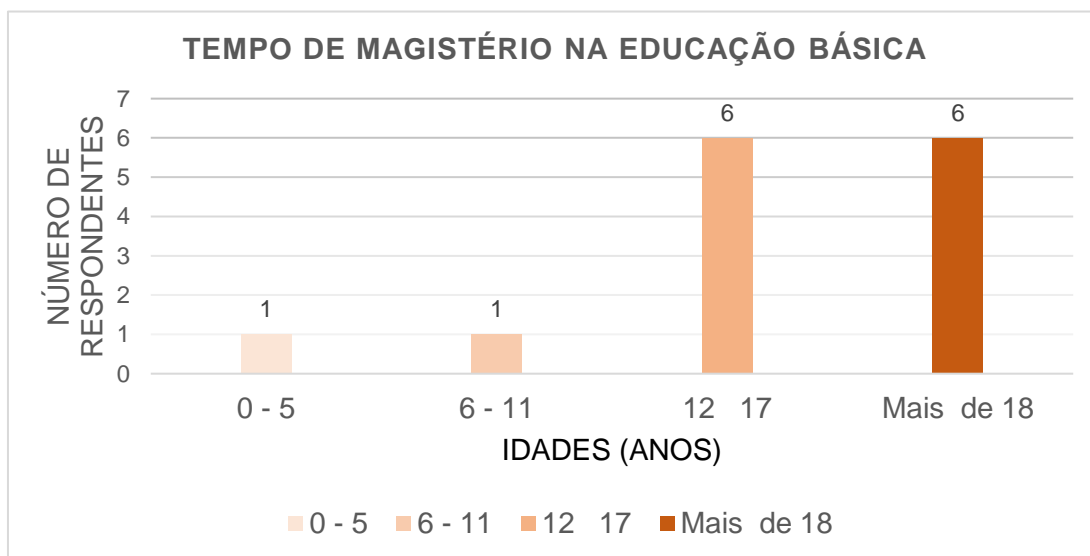
Gráfico 6- Idade dos Professores Participantes



Fonte: Dados da pesquisa

Quando foi perguntado sobre o tempo de magistério, com a seguinte pergunta: **Quanto tempo você possui de docência na Educação Básica?** Os resultados obtidos são expressos abaixo com o uso do gráfico em colunas.

Gráfico 7 - Tempo de Magistério dos Professores



Fonte: Dados da Pesquisa

Após a exibição dos gráficos referentes a idade dos professores e tempo de magistério, vemos que na grande maioria temos professores acima de 29 anos, e com tempo de magistério superior a 12 anos, ou seja, professores que possuem um bom tempo de magistério.

Com o início das discussões do GF *online* foi levantado o seguinte tema: **Na graduação do Curso de Licenciatura Plena em Matemática são trabalhadas várias disciplinas durante o curso: Álgebra, Cálculo, Geometria Analítica, entre outras durante sua formação. Como ressaltam os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio à formação do aluno na Educação Básica deve ser de tal forma, que o ensino seja contextualizado em relação ao cotidiano do aluno, e interdisciplinares.** O intuito deste levantamento de tema é buscar a compreensão sobre o tema proposto, e seguindo as características de um GF, segundo Gomes e Barbosa (1999).

Dando prosseguimento, fizemos um levantamento a respeito da graduação dos professores respondentes, com a pergunta: **Vocês se graduaram em Universidades Públicas ou Privadas?** Os resultados são expressos na tabela a seguir:

Tabela 4 - Graduação dos Professores

UNIVERSIDADES	Nº DE PROFESSORES
PÚBLICAS	5
PRIVADAS	3
TOTAL	8

Fonte: Dados da pesquisa

Com as informações fornecidas com a questão, tem-se que 5 professores do GF *online* se graduaram em Universidades Públicas e os outros 3 professores em Universidades Privadas, isso nos mostra que as graduações do nosso grupo estão bem equilibradas em relação a natureza das Universidades.

Como segunda pergunta realizada, temos: **Em relação às suas formações, vocês entendem que elas foram completas?**

Em resposta a esse questionamento, os respondentes na discussão argumentaram que de uma forma geral, suas formações foram completas, suprimindo as necessidades que os mesmos consideravam importantes.

Foi perguntado em seguida: **Vocês já tiveram contato com alguma Geometria não Euclidiana?**

Dos respondentes, obtivemos 50% de professores, ou seja, quatro professores já tiveram contato com Geometrias não Euclidianas e outros 50% sem contato com esta Geometria. De acordo com Leivas (2013), as Graduações e Pós-Graduações (Mestrados e Doutorados) carecem de mais tópicos sobre o tema, corroborando com os resultados da indagação da questão proposta no GF, no que tange ao acesso as Geometrias não Euclidianas nas formações de professores e cursos de formações continuadas.

Sobre as Geometrias não Euclidianas estudadas pelos respondentes, dois deles citaram a Geometria Riemanniana e outros dois a Geometria Hiperbólica, ou seja, com diversas Geometrias não Euclidianas, somente duas delas foram citadas. Reforçando ainda mais a necessidade sobre o estudo da Geometria não Euclidiana, mostrado por Leivas (2013), e por Loiola e Costa (2015) quando fala da Geometria do Táxi que pode ser feito um paralelo a Geografia das cidades, sendo bem contextualizada.

Foi perguntado em seguida: **Em relação à Geometria Euclidiana, vocês acreditam que ela é suficiente para solucionar as situações do cotidiano?** E como respostas obtivemos os seguintes resultados: dos oito respondentes, cinco deles disseram que “não”, a Geometria Euclidiana não é suficiente, e outros três respondentes responderam “sim” para questão durante as discussões. Evidenciando, que os professores conseguem ver a importância de outras Geometrias, e a não suficiência da Geometria Euclidiana em diversas situações, e de acordo com Leivas (2013), em seu trabalho, relatando a necessidade da abordagem de outras Geometrias diferentes da Euclidiana.

Dando continuidade às discussões no GF *online*, o tema proposto pelo moderador foi: **O ensino ao longo dos tempos vem sofrendo mudanças, na forma que os professores trabalham os conteúdos, e a forma que os alunos enxergam este ensino. Em relação aos materiais extraclasse.** E para dar início a este tópico tomamos como primeira indagação a seguinte questão para discussão: **O que vocês entendem por materiais extraclasse?** Foram destacadas algumas das respostas dos participantes.

Quadro 22- Resposta do participante 8

Materiais de jogos que podem ser confeccionados pelos alunos com os conteúdos explorados com outra abordagem diferente do livro didático, situações com problemas do dia a dia, aplicativos e uso da informática com softwares de gráficos e exploração do conteúdo na internet.

Fonte: Dados da pesquisa

Analisando a resposta contida no Quadro 22, podemos verificar que está de acordo com os PCN do Ensino Médio (BRASIL, 1999), e em consonância com Brum e Da Silva (2015), no que trata de como deve ser o ensino, sendo focado na contextualização ao dia a dia do aluno, com a inserção de conteúdos diversificados e abrangendo a interdisciplinaridade.

No Quadro 23, o participante faz referência diretamente ao conhecimento físico de Kamii e Livingston (1995), favorecendo o senso crítico matemático, uma das características das habilidades dos PCN do Ensino Médio. (BRASIL, 1999)

Quadro 23 - Resposta do participante 5

Importantes na construção de pensamento crítico matemático.

Fonte: Dados da pesquisa

Em análise ao Quadro 24, o respondente utiliza-se de como os PCN do Ensino Médio trata a maneira que deva ser o ensino, de uma forma contextualizada, podendo fazer a utilização de materiais extraclasse como facilitador ao ensino, característica também abordada por Brum e Da Silva (2015), no que trata da contextualização do ensino com exemplos do cotidiano dos alunos.

Quadro 24 - Resposta do participante 1

Aquilo que é usado para melhor contextualizar um assunto.

Fonte: Dados da pesquisa

Em relação ao Quadro 25, o participante aborda materiais extraclasse como alternativas para o ensino da Matemática na Educação Básica, utilizando diversas

estratégias para melhorar sua prática, de acordo com os PCN do Ensino Médio (BRASIL, 1999), havendo contextualização e reflexão sobre o tema proposto nas aulas.

Quadro 25 - Resposta do participante 3

Problemas, desafios, leituras, vídeos e quaisquer outros que produzam a reflexão.

Fonte: Dados da pesquisa

Sobre mudança na exposição dos conteúdos com a utilização dos materiais extraclasse, os professores respondentes demonstraram na discussão, utilizando tais materiais, sejam eles de que natureza forem, geram resultados satisfatórios, pois, os alunos se envolvem com os conteúdos, tornando mais significativo o que está sendo ensinado, estando de acordo com os resultados obtidos por Toledo (2018) e Martinez (2016).

Foi perguntado aos professores respondentes: **A respeito do Produto Educacional que lhes foi apresentado, ele mudou suas percepções sobre o conceito de distância?**

Dos oito respondentes, dois deles responderam que nada foi alterado em relação ao conceito de distância, e por outro lado, seis outros responderam que o conceito de distância após a exibição do Produto foi alterado, e entre essas respostas fizemos o recorte de algumas. Logo a seguir, podemos ver essas respostas:

Quadro 26 -Resposta do participante 3

Sim, nos leva a refletir sobre os currículos prescritos que pouco atendem aos anseios dos estudantes atualmente.

Fonte: Dados da pesquisa

No quadro 26, podemos analisar o anseio do professor em relação aos currículos atuais, que divergem um pouco das indicações do PCN do Ensino Médio (BRASIL, 1999) e ainda dos resultados de Toledo (2018) e Martinez (2016) em seus trabalhos, quando são abordados tópicos de Distância Não Euclidiana, e na utilização de materiais extraclasse no ensino da Matemática na Educação Básica.

Quadro 27 - Resposta do participante 8

Sim. Pois há outros conceitos e aplicações que podemos ensinar aos alunos sobre os conteúdos matemáticos. Para isso, é importante formações continuadas.

Fonte: Dados da pesquisa

No quadro 27, o participante em resposta à pergunta, afirma que a apresentação do Produto alterou, ou contribuiu para o conceito de distância que o mesmo possuía, salientando a necessidade da contextualização do cotidiano dos conteúdos e a importância das formações continuadas.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve seu início com a intenção de responder à seguinte indagação: **Como a utilização de materiais extraclasse podem contribuir para o ensino da Matemática o que tange distância na educação básica?**

No desejo de responder a esse questionamento, foi levantada a hipótese: **A utilização de um material extraclasse no ensino de distância, mais especificamente, as distâncias: Euclidiana, *Manhattan* e Geodésica, contribui para o ensino da Matemática na Educação Básica.**

Na tentativa de responder à pergunta de partida e validar nossa hipótese, foi realizada uma revisão sistemática de literatura, nessa revisão ficou evidente que as pesquisas relacionadas com a utilização de materiais extraclasse no ensino da Matemática no que tange distância na Educação Básica, são bem escassas, porém, promissoras, uma vez que os pesquisadores responsáveis evidenciam bons resultados no ensino da matemática com a utilização de materiais diversos, e realizando a propagação das Geometrias não Euclidianas.

Essas pesquisas se apoiam no fato de um ensino relacionado à contextualização no cotidiano do aluno, tornando este ensino mais abrangente, buscando a inclusão da realidade, agregando esta vivência a Matemática.

Um fator importante nesses trabalhos, é que as Geometrias Não Euclidianas são até hoje uma interrogação para os Professores, por este fato, esses trabalhos com esse tipo abordagem se tornam importantes para divulgação de Geometrias pouco estudadas nas graduações e pós-graduações em matemática. Com isso, a presente pesquisa pode ser útil na tentativa de difundir tais Geometrias, por consequência, no estudo das distâncias: de *Manhattan* e Geodésica.

Para dar suporte teórico ao presente trabalho, foram utilizados os referenciais teóricos sobre Distância: as definições de distância segundo Gomide e Reis (2013), Lopes (2012) e Lima (1977). Cabe ressaltar ainda os tipos de conhecimento de Kamii e Livingston (1995) para a classificação dos mesmos, e os referenciais sobre materiais extraclasse como alternativa no ensino da Matemática na Educação Básica: Toledo (2018), Martinez (2016), Loiola e Costa (2015), Brum e Da Silva (2015), Caldato e Pavanello (2014), Leivas (2013), César (2010).

Guiados pela hipótese, foi planejada a realização de uma oficina pedagógica em uma Universidade Particular do Município de Duque de Caxias, o objetivo da oficina era responder a seguinte questão: **Qual o conceito de distância que os graduandos em Matemática possuem?** Secundariamente a este questionamento, era preciso definir o formato do produto educacional, e colher informações sobre o material da oficina (Apêndice C), que era um protótipo do produto.

Como resultados das ferramentas de coleta de dados da oficina (questionários e roda de conversas) da oficina foram observados fatores a serem destacados: os participantes de um modo geral possuem o conceito de distância de acordo com Lopes (2012), Gomide e Reis (2013) e Lima (1977), havendo mudanças aparentes na conceituação de distância no pré-oficina e pós-oficina.

A busca por informações dos participantes extra sala de aula é realizada em materiais impressos (nesse momento a definição do formato do produto educacional se deu a partir dessa informação do questionário); os participantes veem que uma contextualização dos conteúdos ao cotidiano dos alunos nas aulas de Matemática é possível em todos os conteúdos ou ainda esporadicamente.

As observações coletadas pelo pesquisador durante a roda de conversas com os participantes da oficina fizeram ajustes ao produto educacional para sua versão final, essas observações foram no intuito de tornar o mesmo mais didático, maior variedade de atividades e aplicações sobre as distâncias. Essas modificações foram realizadas para atender os anseios dos participantes.

Após a definição do formato do produto educacional, havia a necessidade de sua validação, nesse intuito houve a formação de um Grupo Focal *Online* formado por professores de Matemática atuantes na Educação Básica, a realização das discussões se deu de forma assíncrona, com as ferramentas *online* do *GOOGLE-GROUPS* e *WhatsAPP*, neste momento foi realizado o seguinte questionamento: **Como a utilização de materiais extraclasse podem contribuir para o ensino da Matemática o que tange distância na Educação Básica?**

Os resultados obtidos durante as discussões no GF *online* nos mostram que para os participantes, os materiais extraclasse utilizados no ensino da Matemática quando empregados de uma forma contextualizada ao cotidiano do aluno podem gerar resultados satisfatórios no ensino, corroborando resultados de Toledo (2018) no que tange essa utilização em sua prática. Segundo Leivas (2013), as formações dos

professores independentemente do nível não possuem abordagens dos Temas de Geometria não Euclidiana, corroborando com os dados obtidos na nossa pesquisa, onde 50 % dos participantes não tinham estudado o tema de Geometrias não Euclidianas, por consequência, desconheciam as Distâncias Geodésica, e de Manhattan, ou seja, não são amplamente divulgadas nas formações dos professores e tão pouco há esta divulgação na educação básica, evidenciadas na Revisão Sistemática de Literatura do presente trabalho.

Após a realização da Oficina e do GF, o objetivo geral do trabalho foi atingido, ou seja, foi desenvolvido o Livreto sobre distâncias, uma alternativa didática para o ensino da matemática, ou seja, nosso produto educacional para o auxílio dos professores no ensino da matemática na educação básica. Sendo oferecido no produto aos professores, diversos conceitos sobre distância e atividades contextualizadas das distâncias referidas. Os conceitos apresentados no produto são de: Distância Euclidiana, Geodésica e de *Manhattan*. Apresenta ainda atividades de provas oficiais e elaboradas pelo pesquisador, aplicações sobre o tema e sugestões de leituras complementares.

Deste modo, o presente trabalho não pretende esgotar os estudos em relação aos materiais extraclasse, ou ainda sobre Geometrias não Euclidianas e conceitos de distância abordados, apenas a tentativa de divulgação sobre o tema, para que com o presente trabalho em conjunto com o produto educacional desenvolvido, possam ser um ponto de partida para novas pesquisas na área, e que haja o desejo de dar continuidade aos estudos dos professores e futuros professores de matemática.

REFERÊNCIAS

ABREU, Ricardo Cerqueira de. **DISTÂNCIA AMPLIANDO SEUS HORIZONTES: Uma alternativa didática voltada aos Professores de Matemática no Ensino da Matemática**. Produto Educacional. UNIGRANRIO. Duque de Caxias- RJ, 2020.

ALVES, Sérgio. **A geometria do globo terrestre**, II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2004 disponível em : <http://www.bienasbm.ufba.br>; acesso em 12 de junho de 2017.

BARBOSA, Tatyana Mabel Nobre; NORONHA, Claudianny Amorim. **Materiais didáticos: como avaliar, utilizar e (re)elaborar**. Natal, RN: SEDIS, 2008. 11v.

BICUDO, Irineu. **Os elementos Euclides**. São Paulo: Unesp, 2009. 593p.

BONGIOVANI, Vincenzo. De Euclides às geometrias não euclidianas. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**. São Paulo, v. 1, n. 22, p. 37-51, 2010.

BRASIL. Secretaria de Educação Média. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEMT. 1999.

BRUM, Wanderley Pivatto; DA SILVA, Sani de Carvalho Rutz. Livros didáticos de matemática: análise dos recursos didáticos auxiliares para a aprendizagem de conceitos Elementares de geometria não euclidiana. **REFCaIE: Revista Electrónica Formación y Calidad Educativa. ISSN 1390-9010**, v. 2, n. 3, p. 93-106, 2015.

CALDATTO, Marlova Estela; PAVANELLO, Regina Maria. O Processo de Inserção das Geometrias Não Euclidianas no Currículo da Escola Paranaense: a visão dos professores participantes. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 28, n. 48, p. 42-63, 2014.

CANDAU, Vera Maria et al. **Oficinas pedagógicas de direitos humanos**. 2ª ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 1995.

COUTINHO, Lázaro. **Convite às geometrias não – euclidianas**. Rio de Janeiro: Interciência 2001

DA SILVA, Ana Lúcia. Ensaio em saúde coletiva: entrevista em profundidade como técnica de pesquisa qualitativa em saúde coletiva. **Saúde Coletiva**, v. 2, n. 7, p. 71, 2005.

DAMICO, José. Corpo a corpo com as jovens: Grupos focais e análise de discurso na pesquisa em educação física. **Movimento**, v. 12, n. 2, p. 35-67, 2006.

DANTE, Luiz Roberto. LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA: uso ou abuso? **Em Aberto**, Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. **A experiência matemática**. Portugal: Gradiva, 1995. 401p.

DE ABREU, Nelsio Rodrigues; BALDANZA, Renata Francisco; GONDIM, Sônia M. Guedes. Os grupos focais on-line: das reflexões conceituais à aplicação em ambiente virtual. **Jistem: Journal of Information Systems and Technology Management**, v. 6, n. 1, p. 5-24, 2009.

DE CARVALHO, Bruno Miguel Pacheco Saraiva. **Algoritmo de Dijkstra**. Universidade de Coimbra, Coimbra, Portugal, 2008.

DE SOUZA, Eduarda Maria Portela Guimarães. **Evolução de Redes Ponderadas e Conexas: Análise de uma rede de preferências musicais**. 2014.

FERREIRA, Manuela Malheiro; CARMO, Hermano. Metodologia da Investigação-Guia para Autoaprendizagem. Lisboa: Universidade Aberta, 1998.

FONTE, Carla Cristina et al. **Introdução aos grafos no ensino médio**. 2014.

GARCIA, Vera Clotilde Vanzetto. Contribuições para a formação do professor de matemática pesquisador nos mestrados profissionalizantes na área de ensino. **Bolema**. Rio Claro, SP. Vol. 21, no. 29 (abr. 2008), p. 199-222, 2008.

GOMES, Maria Elasir Seabra.; BARBOSA, Eduardo Fernandes. A técnica de grupos focais para obtenção de dados qualitativos. **Revista Educativa**, p. 1-7, 1999.

GOMIDE, Walter; REIS, Tiago. Números transreais: Sobre a noção de distância. **Synesis**, v. 5, n. 2, p. 197-210, 2013.

GONDIM, Sônia Maria Guedes. Grupos focais como técnica de investigação qualitativa: desafios metodológicos. **Paidéia (Ribeirão Preto)**, v. 12, n. 24, p. 149-161, 2002.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland; NASCIMENTO, Rogério Santos. Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o exemplo da Geometria do Taxi. **Boletim GEPEM** nº 44 no prelo 2004.

KAMII, Constance; LIVINGSTON, Sally Jones, **Desvendando a aritmética: implicações da teoria de Piaget**. Campinas, SP: Papyrus, 1995.

KIND, Luciana. Notas para o trabalho com a técnica de grupos focais/Notes for the work with focus group technique. **Psicologia em revista**, v. 10, n. 15, p. 124-138, 2004.

KITCHENHAM, Barbara. **Procedures for Performing Systematic Reviews**. Keele Technical Report SE0401 and NICTA technical report 0400011T.1, 2004.

LEIVAS, José Carlos Pinto. Geometrias não Euclidianas: ainda desconhecidas por muitos. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 15, n. 3, p. 647-670, 2013.

LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no espaço**, Coleção do Professor de Matemática, SBM, 1993.

_____. **Espaços Métricos**. 3ª edição. Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada-IMPA, 1977.

LOIOLA, Carlos Augusto Gomes; COSTA, Chrstine Sertã. THE CONICS IN TAXICAB GEOMETRY. **Ciência e Natura**, v. 37, p. 179-191, 2015.

LOPES, Ana Lúcia Mendes; FRACOLLI, Lislaine Aparecida. Revisão sistemática de literatura e metassíntese qualitativa: considerações sobre sua aplicação na pesquisa em enfermagem. **Revista Texto & Contexto Enfermagem**. 17(4), 771-8. 2008.

LOPES, Fabrício Martins. Introdução ao Reconhecimento de Padrões e aplicações em problemas de Bioinformática. **Grupo de Pesquisa em Bioinformática e Reconhecimento de Padrões da UTFPR**, 2012.

LOUREIRO, Antonio Alfredo Ferreira; GOUSSEVSKAIA, Olga Nikolavna. **Grafos**. Disponível em: <[http://homepages.dcc.ufmg.br/loureiro/md/md Grafos. pdf](http://homepages.dcc.ufmg.br/loureiro/md/md%20Grafos.pdf)>. Acesso em: 21 Jan 2018.

MARTINEZ, André Luis Santos. **Uso de atividades didáticas contextualizadas para estimular o aprendizado de geometria**. 2016.

MENEGHETTI, Renata. O Intuitivo e o Lógico no Conhecimento Matemático: análise de uma proposta pedagógica em relação a abordagens filosóficas atuais e ao contexto educacional da matemática. **Bolema-Boletim de Educação Matemática**, v. 22, n. 32, p. 161-188, 2009.

MERGEL, Germano Duarte. **Método para apoio à construção de strings de busca em revisões sistemáticas por meio de mineração visual de texto**. Dissertação de mestrado. Pontifícia Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre-RS, 2014.

MORGAN, D. **Focus group as qualitative research. Qualitative Research Methods Series**. 16. London: Sage Publications. 1997.

NASCIMENTO, J. P; MURTA, C. Um algoritmo paralelo em hadoop para cálculo de centralidade em grafos grandes. In: **XXX SBRC Simpósio Brasileiro de Redes de Computadores e Sistemas Distribuídos**. Ouro Preto, 2012.

PAULA, S.C.R. **Educação Matemática e tecnologias: uma proposta para o ensino das relações métricas no triângulo retângulo com auxílio de um software educacional**. Dissertação de mestrado. Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Severino Sombra. Vassouras-RJ, 2014.

PIVATTO, Brum; SCHUHMACHER, Elcio. Conceitos de teoria da aprendizagem significativa sob a ótica dos mapas conceituais a partir do ensino de Geometria **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 8, n. 2, p. 194-221, 2013.

QUEIROZ, Danielle Teixeira et al. Observação participante na pesquisa qualitativa: conceitos e aplicações na área da saúde. **Rev. enferm. UERJ**, v. 15, n. 2, p. 276-283, 2007.

RABUSKE, Márcia Aguiar. **Introdução a teoria dos grafos**. Florianópolis: Ed. da UFSC, 1992.

SAMPAIO, Rosana Ferreira; MANCINI, Marisa Cotta. Estudos de revisão sistemática: um guia para síntese criteriosa da evidência científica. **Rev. bras. fisioter.** vol.11 no.1 São Carlos Jan./Fev. 2007.

SANTANA, Ana Lúcia. Euclides. **S.D. Info Escola**. Disponível em:< <https://www.infoescola.com/biografias/euclides/>>. Acesso em: 10 de Jan de 2019.

SANTOS, Valdeci. O que é e como fazer “revisão da literatura” na pesquisa teológica. **Revista Biblat bibliografia latinoamericana**. Fides Reformata XVII, n. 1 p.89-104. 2012.

SONZA, Aline Picoli; LEIVAS, José Carlos Pinto. Explorando a Geometria Fractal no Ensino Médio por meio de uma oficina pedagógica. **Revista Thema**, v. 15, n. 4, p. 1549-1561, 2018.

STRUIK, Dirk Jan. **História Concisa das Matemáticas**. Gradiva. 1989.

TOLEDO, Máira Lopes. **Uma abordagem sobre geometria não-euclidiana para o ensino fundamental**. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual Paulista. Bauru - SP, 2018.

VIEIRA, Elaine; VOLQUIND, Léa. **Oficinas de ensino? O quê? Por quê? Como?** 4. ed. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002

.

ANEXO A – CARTA DE ANUÊNCIA



UNIVERSIDADE DO GRANDE RIO
Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades

CARTA DE ANUÊNCIA

Declaramos, para os devidos fins, que concordamos em disponibilizar o(s) setor(es) da Graduação do Curso de Licenciatura em Matemática desta Instituição, para o desenvolvimento das atividades referentes ao Projeto de Pesquisa, intitulado: Distância, Ampliando seus Horizontes dos pesquisadores Ricardo Cerqueira de Abreu sob a responsabilidade do Professor Abel Rodolfo Garcia Lozano do curso de Mestrando Profissional em Ensino de Ciências, da Universidade do Grande Rio, pelo período de execução previsto no referido Projeto.

Rio de Janeiro, 18 de ABRIL de 2018

ANGELO SANTOS SIQUEIRA
Nome, por extenso, do responsável pelo setor
COORDENADOR DO CURSO DE MATEMÁTICA
Cargo e/ou função que exerce na instituição
[Assinatura]
Assinatura e Carimbo

019748577-43
CPF

asiqueira@unigranrio.edu.br
E-mail

 UNIVERSIDADE
UNIGRANRIO
Angelo Santos Siqueira
Coordenador do Curso de Matemática
Matricula: 2886

ANEXO B – APROVAÇÃO DO COMITÊ DE ÉTICA

UNIVERSIDADE DO GRANDE
RIO PROFESSOR JOSÉ DE
SOUZA HERDY - UNIGRANRIO



PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: Distância, ampliando seus horizontes

Pesquisador: RICARDO CERQUEIRA DE ABREU

Área Temática:

Versão: 2

CAAE: 88718218.0.0000.5283

Instituição Proponente: UNIVERSIDADE UNIGRANRIO

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 2.743.878

Apresentação do Projeto:

Trata-se de um projeto de pesquisa no mestrado profissional em Ensino das Ciências da UNIGRANRIO, na área de matemática, que pretende focar na questão de distância e na elaboração de, conforme denominado no projeto de um livreto, para o qual pretende realizar uma oficina com professores para a validação do livreto.

Objetivo da Pesquisa:

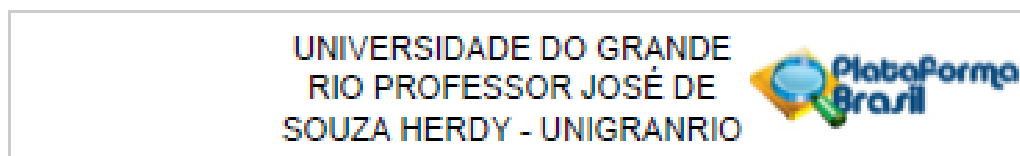
Segundo as informações básicas do projeto: "O objetivo principal do livreto é oferecer outros conceitos de distâncias e suas diversas abordagens em situações diversas, fazendo assim com que os professores trabalhem essas abordagens de uma maneira alternativa com seu aluno se assim o desejar utilizando um material de apoio ao livro didático, no nosso presente estudo o livreto. Abordar aplicações de distâncias que não são comumente utilizadas e muitas vezes desconhecidas por parte dos professores."

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Por se tratar de uma pesquisa qualitativa, no campo da educação, que tem por um dos objetivos elaborar e "validar" um livreto sobre o tema distância em matemática, os riscos são mínimos, desde que preservada a privacidade dos participantes. Evidentemente a pesquisa qualitativa desta natureza não garante não haver risco nenhum, uma vez que depende diretamente dos procedimentos e práticas do pesquisador responsável.

Endereço: Rua Prof. José de Souza Herdy, 1180
Bairro: 25 de Agosto CEP: 25.071-202
UF: RJ Município: DUQUE DE CAXIAS
Telefone: (21)2872-7733 Fax: (21)2872-7733 E-mail: cep@unigranrio.com.br

ANEXO C – TERMO DE CONSENTIMENTO DE LIVRE E ESCLARECIDO



Continuação do Parecer: 2.740.878

Outros	capa.pdf	23/04/2018 21:30:29	RICARDO CERQUEIRA DE ABREU	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	cartadeanuencia.pdf	23/04/2018 21:29:49	RICARDO CERQUEIRA DE ABREU	Aceito
Orçamento	201804232027100.pdf	23/04/2018 20:59:12	RICARDO CERQUEIRA DE ABREU	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	201804232025430.pdf	23/04/2018 20:58:50	RICARDO CERQUEIRA DE ABREU	Aceito
Folha de Rosto	201804161922560.pdf	16/04/2018 19:30:05	RICARDO CERQUEIRA DE ABREU	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

DUQUE DE CAXIAS, 28 de Junho de 2018

Assinado por:
Renato Cerqueira Zambrotti
(Coordenador)

Endereço: Rua Prof. José de Souza Herdy, 1180
Bairro: 25 de Agosto CEP: 25.071-202
UF: RJ Município: DUQUE DE CAXIAS
Telefone: (21)2872-7733 Fax: (21)2872-7733 E-mail: cep@unigranrio.com.br

ANEXO D – CONVITE PARA O GRUPO FOCAL *ONLINE* E TERMO DE CONSENTIMENTO DE LIVRE E ESCLARECIDO

03/11/2019 Distância – Ampliando seus horizontes: Uma proposta de livreto para utilização como alternativa didática para o Ensino da Matem...

Distância – Ampliando seus horizontes: Uma proposta de livreto para utilização como alternativa didática para o Ensino da Matemática

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
(De acordo com as normas da Resolução nº 466, do Conselho Nacional de Saúde de 12/12/2012)

Você está sendo convidado para participar da pesquisa Distância Ampliando Seus Horizontes - Uma Proposta de Livreto para utilização como alternativa didática para o ensino da Matemática... A qualquer momento você pode desistir de participar e retirar seu consentimento. Sua recusa não trará nenhum prejuízo em sua relação com o pesquisador ou com a Instituição UNIGRANRIO. O objetivo da realização do presente Grupo Focal é responder nosso questionamento: Como a utilização de materiais extraclasses podem contribuir para o ensino da Matemática o que tangue distância na Educação Básica?, e ainda a apresentação do produto educacional parte integrante da pesquisa.

Sua participação nesta pesquisa consistirá em interagir com o grupo de participantes, interagir com o pesquisador, e compartilhar com os mesmos seus conhecimentos sobre a utilização de material extraclasses no Ensino de Matemática na Educação Básica.

***Obrigatório**

1. Endereço de e-mail *

2. Você aceita participar da pesquisa? As informações só serão usadas na pesquisa, garantindo seu anonimato. *

Marque todas que se aplicam.

Eu aceito participar da Pesquisa

Eu não aceito participar da Pesquisa

3. Qual sua idade?

Marque todas que se aplicam.

18- 23 anos

24 - 29 anos

30 - 35 anos

36 - 41 anos

mais de 41 anos

Prefiro não responder

Outro: _____

4. Quanto tempo de docência na Educação Básica?

https://docs.google.com/forms/d/1gH8dEBoUAhQ3dDdCgovBAQp8pvtH_kjEW7efyXXJedit 1/2

03/11/2019

Distância – Ampliando seus horizontes: Uma proposta de livreto para utilização como alternativa didática para o Ensino de Matem...

5. Qual é o seu telefone para contato via
WhatsApp?!

Uma cópia das suas respostas será enviada para o endereço de e-mail fornecido

Powered by

 Google Forms

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO 1 (PRÉ-OFFICINA)



UNIVERSIDADE DO GRANDE RIO

Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades.
Programa de Pós-graduação em Ensino das Ciências
Curso de Mestrado Profissional

Você está sendo convidado(a) para participar, voluntariamente, da pesquisa “Distância – Ampliando seus Horizontes” sob responsabilidade de Ricardo Cerqueira de Abreu, mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências na Universidade do Grande Rio - Unigranrio (PPGEC--Unigranrio), sob orientação do Prof.^o Dr.^o *Abel Rodolfo García Lozano*. Trata-se de estudo para a elaboração de uma dissertação de mestrado, na validação de um produto educacional. Caso não aceite participar da pesquisa você não sofrerá nenhum prejuízo ou danos.

Caso você concorde em participar da pesquisa, leia com atenção os seguintes pontos: a) você é livre para, a qualquer momento, recusar-se a responder às perguntas que lhe ocasionem constrangimento de qualquer natureza; b) você pode deixar de participar da pesquisa e não precisa apresentar justificativas para isso; c) sua identidade será mantida em sigilo; d) caso você queira, poderá ser informado(a) de todos os resultados obtidos com a pesquisa, independentemente do fato de mudar seu consentimento em participar da pesquisa.

Sexo _____

Curso:_____ **período:**_____

Questionário 01 - Conhecimentos Gerais iniciais

1. Você já estudou Distância em alguma disciplina cursada na sua graduação?

() **Sim** () **Não**

2. Como você definiria a distância entre dois objetos?

3. Das distâncias abaixo citadas, quais você já estudou? Assinale com um X suas alternativas.

- () Distância Euclidiana
- () Distância de Manhattan
- () Distância Geodésica
- () Nenhuma das alternativas
- () Não sei responder

4. Distância é um assunto que deva ser trabalhado na escola/graduação de uma forma mais abrangente

() **Sim** () **Não**

5. Como um Professor de Matemática deveria abordar o conceito de distância nas aulas de Matemática?

- () Não ter preocupação quanto ao conceito, pois o ele já é intuitivo e inerente à disciplina.
- () Ter uma atenção especial ao conceito nas explicações.
- () Ensinar os conteúdos da disciplina para capacitar os estudantes a enxergar o mundo que o cerca de maneira diferente.

6. Você tem costume de buscar informações, estudos fora do âmbito de sala de aula?

() **Sim** () **Não**

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO 2 (PÓS-OFFICINA)



UNIVERSIDADE DO GRANDE RIO

Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades.
Programa de Pós-graduação em Ensino das Ciências
Curso de Mestrado Profissional

Você está sendo convidado(a) para participar, voluntariamente, da pesquisa “Distância – Ampliando seus Horizontes” sob responsabilidade de Ricardo Cerqueira de Abreu, mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências na Universidade do Grande Rio - Unigranrio (PPGEC--Unigranrio), sob orientação do Prof.º Dr.º *Abel Rodolfo García Lozano*. Trata-se de estudo para a elaboração de uma dissertação de mestrado, na validação de um produto educacional. Caso não aceite participar da pesquisa você não sofrerá nenhum prejuízo ou danos.

Caso você concorde em participar da pesquisa, leia com atenção os seguintes pontos: a) você é livre para, a qualquer momento, recusar-se a responder às perguntas que lhe ocasionem constrangimento de qualquer natureza; b) você pode deixar de participar da pesquisa e não precisa apresentar justificativas para isso; c) sua identidade será mantida em sigilo; d) caso você queira, poderá ser informado(a) de todos os resultados obtidos com a pesquisa, independentemente do fato de mudar seu consentimento em participar da pesquisa.

Sexo _____

Curso: _____ **período:** _____

Questionário 02 – Posicionamento sobre o tema

1. A definição de distância entre dois pontos foi alterada após a oficina?

() **Sim** () **Não**

2. Se sua resposta foi sim, como você definiria distância agora?

3. Como você considera a possibilidade de adoção/utilização do ensino-aprendizagem-avaliação através de aplicações e exemplos de diversos casos de distâncias na resolução dos mesmo na aula de matemática.

- () Impossível
() Improvável
() Possível esporadicamente
() Possível em todos os momentos

4. Você acredita que temas, e conteúdo como este, deveriam fazer parte das disciplinas regulares existentes nos cursos de Licenciatura em Matemática.

() **Sim** () **Não**

5. Como um Professor de Matemática deveria abordar o conceito de distância:

- () Não ter preocupação, pois o tema é intuitivo, e inerente à disciplina.
() Ensinar o conceito de distância, mostrar diversas e distintas aplicações.
() Ensinar os conteúdos da disciplina para capacitar os estudantes a ver o mundo de uma nova ótica.

6. Como forma de acessar outros conteúdos com o objetivo de obter maiores detalhes, possibilidades e contribuições quanto à aplicação e/ou utilização de metodologias, de novas abordagens sobre o tema Distância, você considera fazer essa busca através de qual/quais meios de informação.

- () Seminários e Congressos
() Artigos Científicos
() Videoaulas
() Apostilas e Livros
() Outro. Qual(is) _____

APÊNDICE C – MATERIAL DO PARTICIPANTE DA OFICINA (PROTÓTIPO DO PRODUTO EDUCACIONAL)



Universidade do Grande Rio – UNIGRANRIO

Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências.

Projeto de pesquisa: Distância – Ampliando seus Horizontes

Orientador: Prof.^o Dr.^o *Abel Rodolfo García Lozano*

Mestrando: Ricardo Cerqueira de Abreu

Resumo sobre Distâncias

DISTÂNCIA

O conceito de distância é aplicado em várias áreas. Áreas tais como Geografia, Medicina, Física, as ciências em geral utilizam o conceito de distância para exemplificar proximidade de corpos, conjuntos, entre outras aplicações. A noção de distância matemática se define como uma função cujos argumentos são pares de números reais e os valores são números reais. (GOMIDE; REIS, 2013)

DISTÂNCIA EUCLIDIANA

É a distância entre dois pontos, que pode ser provada pela aplicação repetida do teorema de Pitágoras. A distância euclidiana entre os pontos $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ e $Q(q_1, q_2, \dots, q_n)$, num espaço euclidiano n -dimensional, é definida como:

$$d(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \dots + (p_n - q_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i - q_i)^2}$$

DISTÂNCIA DE MANHATTAN

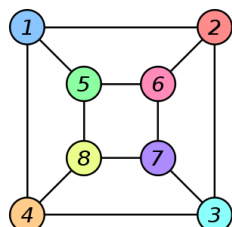
Definida para dois pontos num espaço euclidiano com sistema cartesiano de coordenadas fixo, como a soma dos comprimentos das projeções da linha que une os pontos sobre os eixos das coordenadas. Sendo $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ e $Q(q_1, q_2, \dots, q_n)$ pontos no espaço euclidiano, a Distância de Manhattan é dada por:

$$d(P, Q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| + \dots + |p_n - q_n| = \sum_{i=1}^n (p_i - q_i)$$

DISTÂNCIA GEODÉSICA

A distância de um vértice r a um vértice s é o número de arestas de um caminho mínimo de r a s .

No grafo não orientado abaixo, podemos verificar que a distância $d(1, 3)$ entre os vértices 1 e 3 é **2**. A distância $d(2, 8)$ entre os vértices 2 e 8 é **3**.



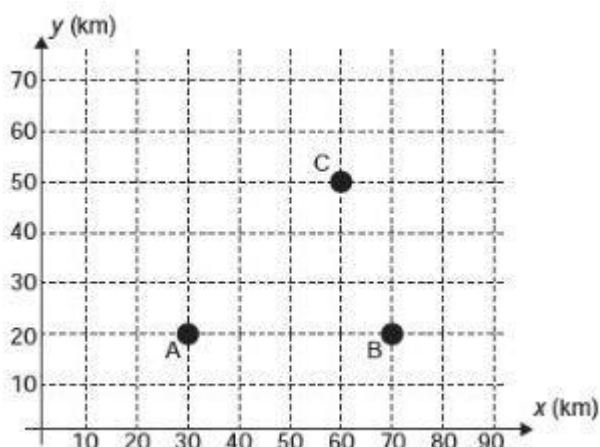
ATIVIDADE 1

Qual é o mínimo de quarteirões que você deverá percorrer para ir da sua casa até a lanchonete, e ainda qual seria essa distância se fosse possível utilizar a Distância Euclidiana para tal trajeto?

ATIVIDADE 2

ENEM 2012

Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



Fonte 1

A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas. O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas:

- a) (65 ; 35)
- b) (53 ; 30)
- c) (45 ; 35)
- d) (50 ; 20)
- e) (50 ; 30)

A para solução da questão vale ressaltar os conceitos de ponto médio⁵, e mediatriz⁶.

ATIVIDADE 3

Questão elaborado pelo autor

Um florista deseja criar um projeto com uma estufa de flores, para fazer tal criação foi utilizado um programa de computador, utiliza as dimensões do terreno de formato retangular como eixos coordenados. Ele visa colocar regadores em dois pontos distintos desse terreno, e coloca seus regadores nas seguintes coordenadas: A (3,3), B (12,9) respectivamente. Calcule a menor distância entre os regadores da estufa.

Dica: Faça a construção da figura do terreno

⁵ **Ponto médio** é o **ponto** que divide o **segmento** de reta exatamente no meio tendo dois **segmentos** iguais.

⁶ **Mediatriz** é o Lugar Geométrico dos pontos do Plano que equidistam de dois pontos distintos

APÊNDICE D – ROTEIRO DE DISCUSSÕES DO GRUPO FOCAL

ROTEIRO DE DISCUSSÕES

1. Na graduação do Curso de Licenciatura Plena em Matemática são trabalhadas várias disciplinas durante o curso: Álgebra, Cálculo, Geometria Analítica, entre outras durante sua formação. Como ressaltam os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio à formação do aluno na Educação Básica deve ser de tal forma, que o ensino seja contextualizado em relação ao cotidiano do aluno, e interdisciplinares. Em virtude disso respondam:
 - a) Vocês se graduaram em Universidades Públicas ou Privadas?
 - b) Em relação às suas formações, vocês entendem que elas foram completas?
 - c) Vocês já tiveram contato com alguma Geometria não Euclidiana?
 - d) Caso sua resposta tenha sido positiva, quais foram as geometrias que vocês estudaram durante seus cursos?
 - e) Em relação à Geometria Euclidiana, vocês acreditam que ela suficiente para solucionar as situações do cotidiano?

2. O ensino ao longo dos tempos vem sofrendo mudanças, na forma que os professores trabalham os conteúdos, e a forma que os alunos enxergam este ensino. Em relação aos materiais extraclasse, respondam:
 - a) O que vocês entendem por materiais extraclasse?
 - b) Quando vocês pensam nesse tipo de material, como deve ser o mesmo?
 - c) Vocês já utilizaram materiais além dos tradicionais?
 - d) Se vocês já utilizaram tais materiais, em quais momentos ou circunstâncias eles foram utilizados? Como foi o comportamento dos alunos quando você utilizou?
 - e) Vocês veem alguma mudança na exposição do conteúdo utilizando essa ferramenta para o ensino?

- f) A respeito do Produto Educacional que lhes foi apresentado, ele mudou suas percepções sobre o conceito de distância?