Universidade do Grande Rio “Prof. José de Souza Herdy”

UNIGRANRIO

LUIZ MARCOS CAVALCANTI PEREIRA

A NOÇÃO DE INFINITO NA EDUCAÇÃO BÁSICA: REFLEXÕES E PROPOSTA

DUQUE DE CAXIAS

2015

LUIZ MARCOS CAVALCANTI PEREIRA

A NOÇÃO DE INFINITO NA EDUCAÇÃO BÁSICA: REFLEXÕES E PROPOSTA

Dissertação apresentada à Universidade do Grande Rio "Prof. José de Souza Herdy" como parte dos requisitos parciais para o título de mestre profissional.

Área de Concentração: Ensino das Ciências na Educação Básica

Orientação: Prof. Dr. Abel Rodolfo Garcia Lozano
Co-Orientador: Prof. Dr. Adriano Vargas Freitas.

Duque de Caxias
2015

CATALOGAÇÃO NA FONTE/BIBLIOTECA - UNIGRANRIO

P436n Pereira, Luiz Marcos Cavalcanti.
A noção do infinito na educação básica: reflexões e proposta / Luiz Marcos Cavalcanti Pereira. - 2015.
101 f. ; il. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências na Educação Básica) – Universidade do Grande Rio "Prof. José de Souza Herdy", Escola de Educação, Ciências, Letras, Artes e Humanidades, 2015.

"Orientador: Prof.º Abel Rodolfo Garcia Lozano".
"Co-Orientador: Prof.º Adriano Vargas Freitas".
Bibliografia: f. 98-100.

1. Educação. 2. Matemática – Estudo e Ensino. 3. Infinito. 4. Livros didáticos - Análise. 5. Teoria dos conjuntos. 6. Ensino médio. I. Lozano, Abel Rodolfo Garcia. II. Freitas, Adriano Vargas. III. Universidade do Grande Rio "Prof. José de Souza Herdy". IV. Título.

CDD – 370

Luiz Marcos Cavalcanti Pereira

A Noção de Infinito na Educação Básica: Reflexões e Proposta

Dissertação de mestrado profissional apresentada à Universidade do Grande Rio "José de Souza Herdy", no Programa de Pós-graduação em Ensino das Ciências na Educação Básica, na Escola de Educação, como parte dos requisitos parciais para o título de mestre.

Área de Concentração: Ensino das Ciências na Educação Básica

Aprovado em 26 de fevereiro de 2015

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Abel Rodolfo Garcia Lozano (UNIGRANRIO)

Prof. Dr. Adriano Vargas Freitas (UFF)

Profa. Dra. Eline das Flores Victer (UNIGRANRIO)

Profa. Dr. Sidnei Percia da Penha (UFRJ)

Prof. Dr. Ângelo Santos Siqueira (UNIGRANRIO)

Dedico esse trabalho a toda minha família e aos **infinitos** amigos de todos os planos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelas nossas vidas, a oportunidade de vivê-las, por todas as oportunidades que tivemos e pelas orientações para aproveitá-las.

Aos professores pelos esforços e a paciência para conosco, na luta de todos nós, acreditando e nos incentivando.

Em especial, ao Prof. Dr. Abel Rodolfo Garcia Louzano pelas suas orientações e ao Prof. Dr. Adriano Vargas Freitas pelas suas co-orientações .

A todo o corpo docente da Pós-graduação desta Instituição de ensino, nossos colegas de luta, pela atenção carinhosa para com os alunos do mestrado profissional.

A nossa secretária Gisélia Rodrigues, pela atenção, paciência e simpatia.

A todos os colegas do Colégio Pedro II por torcerem pelo meu sucesso, principalmente aos colegas do Campus Realengo II, meu local de trabalho − professores Nelson Tunala; Cleiton Silva; Roberta; Cristiano; Alex; Alan Filho; João Luiz, João Carlos e aos demais colegas assistentes.

A todos os colegas da FAETEC – E. T. E. João Luiz do Nascimento pelos incentivos.

Aos meus ex-colegas de sala de aula: Diego Nicodemos, Fábio Ferreira, Poncio Mineiro, Wellerson Quintanero, Ronaldo Quitanilha, Alexandre, dentre outros, pelas amizades sinceras.

Aos meus amigos de turma do mestrado profissional Júlio, Vanessa e Talita pela caminhada. j

Aos meus eternos Mestres da UFRJ: Nei Rocha, Felipe Acker, Victor Girald, Rolci,
Luiz Carlos Guimarães, Hélio Migon, Dani, dentre outros, por ser seu aluno.

Meu muitíssimo obrigado a Jesus, ao meu anjo guardião, ao meu mentor espiritual e a todos os outros colaboradores do infinito etéreo.

Agradeço, também, a toda a banca examinadora por aceitar participar dessa jornada de avaliação. Às minhas companheiras do Projeto Fundão: Lúcia Arruda Tinoco, Lilian Nasser, Vânia Pereira e à nossa saudosa Maria Laura Mousinho Leite Lopes, a quem tenho tanto a agradecer e de quem sinto muita saudade.

Aos amigos da Equipe de Português do CP II do Campus Realengo II, em especial, ao Rafael e Vinícius, pelas suas correções.

Por fim, um agradecimento especial à família: Pai, Mãe, Irmãos, esposa e Filhos onde quer que estejam.

A contagem é infinita como a bondade de Deus e divina como os seus atos.

Luiz Marcos Cavalcanti Pereira

RESUMO

O conceito de infinito está relacionado com outras noções da matemática. É considerado básico para o desenvolvimento de alguns processos relacionados ao cálculo e à análise, tais como comprimento de curvas, área, volume, bem como na elaboração de outros conceitos como limite, derivada e integral, que constituem a base do cálculo em diversos cursos nas universidades brasileiras e estrangeiras. Nessas perspectivas, a pesquisa busca identificar se as noções que estão relacionadas com o conceito de infinito e que contribuem para a sua significação estão presentes, e de que forma, nos materiais didáticos comumente utilizados em escolas públicas da educação básica do Rio de Janeiro, em especial, no ensino médio. Para essa finalidade, após a construção de revisão de bibliografia sobre o tema em questão, selecionamos e analisamos duas produções didáticas aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático Ensino Médio. Os dados obtidos nos permitiram verificar a escassez dessas noções em estudos e materiais didáticos orientados à educação básica, e nos conduziram para a necessidade da elaboração de um conjunto de atividades e textos voltados ao tema em questão que compõe nosso produto educacional. O objetivo central de nossa proposta é contribuir para ampliar a qualidade do processo de ensino/aprendizagem da educação básica em relação ao estudo de conceitos envolvendo o infinito, tornando-se fonte de consulta e aprofundamento de diversos tópicos relativos ao tema.

Palavras-chave: Educação Matemática, Conceito de Infinito, Análise de livros didáticos, Teoria dos conjuntos e Ensino Médio

ABSTRACT

The concept of infinity is related to other math concepts. It is considered basic to the development of some processes related to the calculation and analysis, such as: length of curves, area, volume, as well as in the development of other concepts such as limit, derivative and integral that form the basis of calculation in several courses in Brazilian and foreign universities. With these perspectives the research seeks to identify the notions that are related to the concept of infinity and contribute to its significance, are present, and how, in the didactic materials commonly used in public basic education schools in Rio de Janeiro, in especially in high school. For this purpose, after the construction of literature review on the topic in question, selected and analyzed two educational productions approved in the National Textbook High School Program. The data allowed us to verify the scarcity of these notions in studies and teaching materials oriented to basic education, and led to the need to draw up a set of activities and texts aimed at the issue at hand that make up our educational product. The main objective of our proposal is to contribute to increase the quality of teaching / learning process of basic education on the study of concepts involving the infinite, becoming source of information and deepening of several topics related to the theme.

Keywords: Mathematics Education, Infinity Concept, Analysis of textbooks, set theory and High School

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento do Pessoal de Ensino Superior
EEMAT	Encontro Estadual de Educação Matemática
ETE	Escola Técnica Estadual
ETEJLN	Escola Técnica Estadual João Luís do Nascimento
ENEM	Encontro Nacional de Educação Matemática
FAETEC	Fundação de Apoio às Escolas Técnicas
MEC	Ministério de Educação e Cultura
PNLD	Plano Nacional do Livro Didático
PNLDEM	Plano Nacional do Livro Didático do Ensino Médio
UERJ	Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFRRJ	Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Assistindo a eventos tais como debates, mesas redondas, comunicações científicas e palestras; participando de oficinas em vários encontros Estaduais de Educação Matemática (EEMAT) e Nacionais de Educação Matemática (ENEM), semanas de matemática em algumas universidades públicas estaduais e federais, verifica-se que, frequentemente, o conceito de infinito é citado como um importante conceito na matemática, principalmente, num curso de cálculo e análise.

Entretanto, ainda hoje verificamos que são poucas as produções acadêmicas que tratam especificamente do tema, como as pesquisas de mestrado (RESENDE, 1994) e de doutorado (RESENDE,2003) que são citadas em nossa revisão bibliográfica e que também nos serviram de base para essa pesquisa.

Consideramos que as noções básicas relacionadas com o conceito de infinito sejam de grande importância para as noções básicas do cálculo. De uma maneira geral, os contatos com algumas situações que dependem da noção de infinito são inevitáveis.

Desenvolvemos, desde cedo, uma vaga ideia do que significa a palavra infinito e, até mesmo, de conceber algo sobre processos infinitos. Mas, como nos indicaram os resultados das pesquisas analisadas em nosso trabalho, essa ideia inicial não será o suficiente para a consolidação desse conceito, muito menos para sua utilização como ferramenta na construção de outros conceitos importantes correlatos.

É importante ressaltar que, essa ideia inicial, e muitas vezes espontânea do que seja o infinito, pode ser utilizada pelo professor de matemática na construção de um conceito mais amplo ou do significado do próprio infinito. Entretanto, pesquisas envolvendo professores em formação (Alunos da licenciatura), concluem que é possível encontrar falhas no entendimento desse conceito por parte desses próprios estudantes de licenciatura, chegando ao ponto de relatarem não se sentirem confortáveis e motivados, em sua sala de aula, para dar o devido tratamento que esse conceito merece. (RESENDE, 1994).

De fato, a ausência das ideias e problemas essenciais do Cálculo na educação básica, além de ser um contrassenso do ponto de vista da evolução histórica do conhecimento matemático, é uma das principais fontes das dificuldades que surgem no ensino superior de cálculo (RESENDE, 1994), reforçada em:

Na verdade, o que se sente falta no ensino de matemática em geral é de uma “preparação” para o ensino de Cálculo. Alguns problemas clássicos do Cálculo são evitados, ou simplesmente ignorados, ou ainda tratados de forma superficial pelos professores no ensino fundamental e médio (RESENDE, 2003 p. 32)

Existem várias noções na matemática que estão relacionadas com o conceito de infinito, como, por exemplo, as noções de indução, aproximação, tendência, vizinhança, convergência, limite, continuidade, dentre outras. Conceitos como conjunto infinito, números naturais, inteiros relativos, racionais, incomensurabilidade, números irracionais, números reais, medidas discreta e contínua, divisão por zero, número π, número e, frações contínuas, sequências infinitas, limite da soma de uma progressão geométrica etc., são vistos e discutidos na educação básica e, em particular, no ensino médio. No entanto, o conceito de infinito ainda permanece distante das discussões e atividades desenvolvidas no ambiente escolar, pelo menos explicitamente.

> O problema aritmético da medida está diretamente associado à construção dos números reais e foi resolvido fundamentalmente através do entrelaçamento de diversos elementos constitutivos das dualidades finito/infinito e discreto/contínuo. Acreditava-se que os números racionais eram suficientes para representar e quantificar as medidas das grandezas geométricas e de tudo o mais: afinal, tudo era número (número racional !). Foi nessas condições históricas que surgiu a primeira grande crise do problema da medida (a incomensurabilidade!). Com essa incapacidade dos racionais para solucionar tal problema, abre-se na aritmética um novo campo de estudo, para o qual o desenvolvimento das ferramentas do Cálculo será imprescindível. (RESENDE,2003, pág. 424).

Tais análises nos levam ao seguinte questionamento: é possível que os livros didáticos de matemática na educação básica e, em particular, no ensino médio, adotados pelos professores da rede pública brasileira, deem importância ao conceito de infinito, bem como às noções que estão relacionadas com esse conceito?

Nessa pesquisa, vamos investigar que noções, relacionadas ao conceito de infinito, estão sendo trabalhadas no ensino médio. Partiremos da análise de algumas produções didáticas da área de matemática aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio (PNLDEM), que oferece acesso gratuito, aos alunos de escolas públicas da educação básica brasileira, a essas produções.

Em nossa pesquisa, optamos por analisar dois livros do primeiro ano do ensino médio, por entender que nessa etapa do ensino da matemática as noções relacionadas com o conceito de infinito estão bem presentes, desde a teoria dos conjuntos, com os seus axiomas, classificação e operações, tópico que deve ser trabalhado nessa etapa. Além disso, é possível fazer um trabalho de base para as etapas seguintes (segundo e terceiro anos) com as noções de infinitos potencial e cardinal, processos infinitos e aplicações para a consolidação de outros conceitos trabalhados nessas etapas. São livros de autores bastante conhecidos pelos professores da educação básica e que, inclusive, já foram adotados nas escolas públicas em que leciono e lecionei.

Com as provas do exame nacional do Ensino Médio (ENEM) − que, seguindo as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), valorizam a história da matemática, a contextualização, a interpretação, e a interdisciplinaridade −, acreditamos que as práticas pedagógicas nas escolas brasileiras estão mudando e muitos professores estão procurando desenvolver um trabalho mais próximo dessa realidade. Essas novas orientações para o trabalho em sala de aula buscam alcançar um ensino de matemática mais qualificado e que possa contribuir mais significativamente para o sucesso dos nossos alunos na sua caminhada acadêmica, profissional e social, de acordo com os seus objetivos e dos objetivos traçados nos PCN:

> O critério central da organização do currículo no ensino médio é o da contextualização e o da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos da matemática e de diferentes formas de pensamentos (BRASIL, 2000, p.75).

Acreditamos que, com relação ao conceito de infinito, estas indicações também possam e devam ser aplicadas. Muito embora, possamos perceber que, quase sempre, trabalhamos superficialmente com a concepção inicial de infinito, sem mergulharmos mais substancialmente no conceito de infinito propriamente.

Embora o objetivo da educação básica brasileira não seja a continuidade para o ensino superior, alguns dos nossos jovens, estudantes do ensino médio, desejam ingressar nas universidades, e alguns desses pretenderão seguir carreiras que possuam na sua grade de estudo um curso de cálculo ou correlato. Nesse sentido, fica clara a importância do estudo das noções básicas, relacionadas com o conceito de infinito, na educação básica, para aquelas carreiras que delas dependem e, inclusive, para as que não dependem tanto das noções do cálculo, no mínimo, servirão de aprofundamento e conhecimento básico para a formação do cidadão integral, consciente de vasto conhecimento no exercício da cidadania.

A sua relevância no entendimento de outros conceitos abordados nessa etapa de ensino e, possivelmente, em etapas futuras, passa pela continuidade dos estudos. Principalmente, como já comentamos, daqueles estudantes que querem ingressar nas universidades públicas ou particulares nas áreas técnica e tecnológica.

> Falar da importância do conceito de infinito é falar da importância do cálculo na matemática e da própria matemática. O infinito é um dos ingredientes fundamentais para a construção da ponte do macro espaço epistemológico discreto/contínuo (RESENDE,2003).

Tendo por base tais perspectivas, desenvolvemos nossa pesquisa e produto educacional na seguinte forma estrutural:

No capítulo 1 da dissertação, abordamos a revisão de bibliografia buscando informações sobre os objetivos da pesquisa, a metodologia usada e as suas conclusões em relação ao trabalho realizado para confrontar com os nossos objetivos. Nesse estudo, citamos os trabalhos de: Fischbein, Tirosh e Hess (1979); Tall (1980); Tirosh, Moreno e Waldeg (1991); Resende(2003); Lopes (2011); Kill (2010) e Kindell (2012).

No capítulo 2, apresentamos nossa fundamentação teórica básica que nos serviu de suporte para a construção da dissertação e para a elaboração de nosso produto educacional: são as teorias de encapsulação e de reificação.

Em termos gerais, temos a encapsulação como sendo um processo cognitivo de formar conceitos a partir de um processo. Ocorre quando as ações realizadas nesse processo, no futuro, possam ser realizadas em níveis mais elevados. A teoria da reificação trata de dois tipos de conhecimentos matemáticos: as concepções estruturais e as operacionais as quais se comparam, respectivamente, ao objeto e ao processo. As operacionais são aquelas relacionadas a descrições de noções matemáticas por meio de processos, e as estruturais, por meio de objetos abstratos como, por exemplo, os grupos, anéis, espaços vetoriais, os corpos etc que apresentam dificuldades para a sua compreensão (é o mais avançado estágio do desenvolvimento do conceito), já para os operacionais essas dificuldades são bem menores. Ou seja, as estruturais são coisas a saber, e as operacionais, coisas a fazer, por isso mais simples.

Tais ideias nos ressaltam a importância do desenvolvimento de atividades que possam levar o aluno encapsular o processo no conceito, ou seja, que ele possa ver as etapas envolvidas como uma única etapa, dando origem a um processo, e que cada etapa realizada passe a não depender das anteriores para a sua compreensão do todo, com condições de usá-lo em outros processos (reificação), utilizando-o como um objeto ou um conceito. É uma visão proceitual em que o processo está encapsulado no conceito. Ou seja, é o conceito se valendo do processo para lhe dar significado e, este, do próprio conceito (SFARD, 1983).

No capítulo 3, estão as nossas considerações sobre o infinito, buscando um contexto histórico para situar os conceitos trabalhados em cada época, as dificuldades, as discussões e as soluções propostas para vencer essas dificuldades. Além disso, procuramos mostrar vários procedimentos relacionados a processos infinitos adequados à educação básica, ou seja, que podem ser trabalhados na sala de aula pelos professores dessa etapa do ensino.

No capítulo 4, apresentamos as análises dos dois livros didáticos selecionados. Nessas análises, observamos a presença ou não das noções relacionadas com o conceito de infinito, o nível de aprofundamento e possíveis relação com outras noções. Além disso, foi feito, em cada caso, um comentário com orientações de possível abordagem e introdução de noções básicas relacionadas. Essas análises serviram de orientação para o trabalho do professor do ensino médio que pense em contribuir com a melhoria do ensino da matemática, constituindo-se, portanto, numa fonte de consulta.

No capítulo 5, apresentamos a nossa proposta/contribuição ao ensino dos conceitos relacionados com o conceito de infinito e do próprio infinito, na educação básica. Essa proposta consiste em um Produto Educacional elaborado com atividades que apresentam as noções relacionadas ao cálculo, junto ao conceito do infinito. Essas atividades buscam proporcionar ao estudante do ensino médio a encapsulação do processo ao conceito de infinito ou das noções relacionadas com esse conceito. Ou seja, são atividades elaboradas de modo que a cada etapa, o aluno consiga alcançar um maior nível de significação do conceito, permitindo que ele tenha uma visão global do processo, isto é, para realizar uma etapa qualquer desse processo, não necessite mais da etapa anterior, até atingir o nível de usá-lo em outro processo. Além disso, nesse produto existe uma segunda parte onde estão relacionadas algumas noções básicas para o conceito de infinito, a fim de servir de fonte de consulta para aqueles professores que pretendam se aprofundar no tema.

Na sequência desse trabalho, apresentamos um produto educacional constituído de sugestões de atividades que elaboramos especialmente para serem consultadas e aplicadas por professores da educação básica preocupados com a melhoria do nível de ensino, e que desejem aprofundar as discussões a respeito dos conceitos de infinito. Este produto foi desenvolvido em duas partes complementares: na parte 1 temos as próprias atividades, e na parte 2, apresentamos alguns textos envolvendo noções para serem usadas como fonte de consulta e com o objetivo de revisão e aprofundamento para esse professores. Começamos com a teoria dos conjuntos, buscando os conceitos mais relevantes e as noções que possam dar significado ao conceito de infinito.

Destacamos que o conjunto de nossa pesquisa e proposta visa a um melhor embasamento dos professores e alunos em estudos de conceitos relacionados com o tema de nossa pesquisa. Consideramos que, dessa forma, podemos contribuir para a redução dos problemas apontados pelas pesquisas da nossa revisão de bibliografia, bem como aqueles verificados em nossa experiência.

> O "ciclo da ignorância da noção de infinito" é alimentada pela ausência de conhecimentos básicos a respeito dos estudos matemáticos de Dedekind e Cantor sobre esta noção na formação do professor de matemática do ensino médio e fundamental, o que inviabiliza qualquer possibilidade de reação na tentativa de melhoria no ciclo (RESENDE, 2003 p. 370).

Além disso, é importante incentivar o professor trabalhar a matemática para a própria matemática, pois, caso contrário, corremos o risco de estagnar no tempo e, com isso, frear o desenvolvimento da matemática e de algumas outras ciências que a utilizam na sua fundamentação, como a física, por exemplo.

Esta pesquisa tem como o objetivo central investigar se o conceito de infinito está sendo trabalhado nos manuais escolares da educação básica do Rio de Janeiro, em particular, no ensino médio, a forma da abordagem, o nível de aprofundamento, bem como as noções, relacionadas com esse conceito que contribuem de forma significativa para a sua compreensão e uso, se há indícios dos processos encapsulados ou reificados nos objetos, no caso do conceito de infinito.

A pesquisa será desenvolvida no formato exploratório investigativo dentro de uma pesquisa bibliográfica textual, de cunho qualitativo (GILL, 2009), com uma amostra de dois volumes, de duas coleções distintas de livros didáticos de matemáticas da educação básica, que foram aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio (PNLDEM). A aprovação é submetida ao cumprimento de exigências feitas através de critérios específicos adotados por esse programa, e sobre as quais comentaremos em tópicos posteriores.

A ideia foi analisar o primeiro volume de cada coleção, dentre duas daquelas já aprovadas pelo PNLDEM, em 2011, realizado pelo Ministério de Educação e Cultura (MEC).

Decidimos pelo volume 1 por se tratar do primeiro ano do ensino médio, ano base para os demais, com a presença de tópicos importantes para um trabalho base, bem diversificado e aprofundado com essas noções.

Desta forma, o trabalho foi desenvolvido com vistas a analisar os livros de matemática, para verificar se há indícios da presença das noções relacionadas com o conceito de infinito nesses manuais ou de algumas noções relacionadas com ele. Além da verificação da presença, da abordagem, da conceituação e do nível de profundidade dessa abordagem, elaboramos um comentário em cada momento que achamos oportuno.

Os livros selecionados para a análise nessa pesquisa, de acordo com as justificativas dadas anteriormente, são:

(1) Matemática: Contextos e Aplicações, de Luis Roberto Dante, volume 1, 1ª Edição, da Editora Ática São Paulo, SP 2011, sob o código: 2511COL02, que, de acordo com a apresentação de seu autor, se propõe a criar condições para que o aluno possa compreender as ideias básicas da matemáticas, atribuindo significado a elas, além de saber aplicá-las na resolução de problemas do mundo real.

O livro se apresenta com 240 páginas, constando de 12 capítulos, além de questões do ENEM, Glossário, Sugestões de leituras complementares, significados das siglas de vestibulares, referências bibliográficas e respostas dos exercícios propostos.

O capítulo 1 faz uma revisão de produto notáveis e fatoração; o capítulo 2 aborda conjuntos e conjuntos numéricos; o capítulo 3 aborda a noção de função, sua definição através de fórmulas, os elementos básicos de uma função (domínio, imagem e contradomínio), suas características (crescente e decrescente); os tipos (injetora, sobrejetora e bijetora); as operações (composta e inversa) e as aplicações na matemática e nas práticas sociais. O capítulo 4 aborda o caso específico das funções afins; o capítulo 5, a função quadrática; o capítulo 6, a função modular; o capítulo 7, a exponencial; o capítulo 8, os logaritmos e a função logarítmica; o capítulo 9 faz alguma aplicação na própria matemática, com o ensino das Progressões aritméticas e geométricas; o capítulo 10, a aplicação na matemática financeira; o capítulo 11 aborda a trigonometria no triângulo retângulo e o capítulo 12 e último, a revisão da geometria plana.

(2) Coleção Novo Olhar, Matemática, de Joamir Sousa, da Editora FTD, 1ª Edição, São Paulo, 2010, sob o código: 25133COL02, que, segundo seu autor, se propõe formar o cidadão que lê, interpreta criticamente informações apresentadas de diferentes formas provenientes dos mais diversos meios de comunicação; toma decisões baseadas em constatações

matemáticas, como escolher entre comprar a prazo ou à vista, financiar ou adquirir um consórcio, por exemplo.

A obra possui 208 páginas, distribuídas em nove capítulos, além de questões do ENEM e vestibulares, ampliação dos conhecimentos, respostas, bibliografia consultada e siglas.

O capítulo 1 aborda os conjuntos, faz um tópico de exploração do tema, com alguns artigos a ele pertinentes: o homem que colocou o infinito no bolso, um tópico de reflexão sobre o capítulo, constando de algumas perguntas sobre assuntos do contexto ensino-aprendizagem, desenvolvidos no capítulo, e atividades complementares, com aplicações do tema em outras áreas do conhecimento e de questões de concursos, dos vestibulares e do ENEM; o capítulo 2 aborda a noção de função, seus elementos: domínio, contradomínio e imagem, a grafia das funções, características e tipos; possui, também, um tópico: “Explorando o tema: como se descobriu o lugar mais fundo do mar?” e um “Refletindo sobre o capitulo”, além de atividades complementares, nos mesmos moldes do capítulo anterior; o capítulo 3 aborda a função afim, “Explorando o tema: no ritmo certo”, o “Refletindo sobre o capítulo” e as atividades complementares; o capítulo 4 aborda a função quadrática, bem como o “Explorando o tema: identificando padrões e regularidades”, o “Refletindo sobre o capítulo” e as atividades complementares; o capítulo 5 aborda a função exponencial, o “Explorando o tema: como é determinada a idade de um fóssil?”, “Refletindo sobre o capítulo” e as atividades complementares; o capítulo 6, os logaritmos, a função logarítmica, o “Explorando o tema: decibéis e a ‘bordoada na orelha’, os tocadores de MP3 e o risco para à audição”, o “Refletindo sobre o capítulo” e as atividades complementares; o capítulo 7, a função modular, o “Explorando o tema: módulo e vetor”, o “Refletindo sobre o capítulo” e atividades complementares; o capítulo 8, as progressões aritméticas e geométricas, o “Explorando o tema: uma lenda”, o “Refletindo sobre o capítulo” e as atividades complementares; e o capítulo 9 e último, a trigonometria no triângulo retângulo, o “Explorando o tema”, com o tema “a rota da carpintaria naval” e o “Refletindo sobre o capítulo”, além das atividades complementares.

A decisão sobre os livros se deveu ao fato de ambos serem produções bastante utilizadas em escolas públicas do estado do Rio de Janeiro, e inclusive já terem sido livros-texto utilizados nas escolas em que trabalho e que foram selecionados por nós, professores, em reunião de coordenação ou de departamento, devido às suas características.

Na análise, consideramos os dados de identificação do livro, a identificação dos campos da matemática, a seleção de conteúdos, bem como a articulação entre eles, a fim de analisar a abordagem metodológica, de que forma os exercícios eram propostos e, ainda, se apresentavam atividades ligadas a outros componentes curriculares.

Foi feito, em cada um dos livros, um levantamento das principais noções que tenham um estreito relacionamento com a noção de infinito e as noções do próprio infinito e que estejam em seus programas. Observamos, nesse levantamento, qual o nível de envolvimento com esse conceito ou com os processos infinitos e qual a situação didática usada, para permitir sugestões de abordagem que possam ajudar o professor na empreitada de ensino e aprendizagem dessa noção. Importante destacar que, para essas análises, optamos por seguir as próprias sugestões de análise de livros didáticos indicadas e utilizadas pelo PNLDEM (BRASIL, 2001).

As análises servirão de orientações para a melhoria do trabalho em sala de aula. Que possamos sempre pensar na continuidade do ensino, que os conteúdos lecionados na atualidade são, possivelmente, pré-requisitos para alguns outros tão importante quanto. Para que, durante a elaboração dos conteúdos propostos, possamos pensar nas necessidades dos nossos alunos na carreira acadêmica.

Muitas das noções sugeridas nessa pesquisa já fazem parte do meu trabalho no dia a dia da minha prática na sala de aula, e só agora, com mais experiência adquirida, decidi me aprofundar no tema proposto. Portanto, consideramos que, ao apresentar os resultados de nossa pesquisa e a nossa proposta educacional, estamos oferecendo contribuições para a formação de outros professores, e para a melhoria de ensino de matemática na educação básica.

CAPÍTULO 1

Nesse capítulo faremos a revisão de bibliografia. Essa revisão nos permitiu o contato com várias pesquisas que já foram realizadas, o tipo de trabalho feito, a sua abordagem, como foi conduzida, tempo e local de cada uma das pesquisas, voltadas para o tema em questão, o infinito, objeto de nosso interesse. Como pontapé inicial, partimos do trabalho de Lopes, ou seja, de sua revisão de bibliografia, que nos direcionou para a observação de outras pesquisas. Das observações realizadas, concluímos que uma análise dos livros didáticos era o caminho mais viável para os nossos objetivos.

Revisão de bibliografia

Na revisão de bibliografia observamos os objetivos de cada uma das pesquisas identificadas, sua delimitação, a metodologia usada e a conclusão, para servirem de orientação e de balizamento de nosso trabalho. Na oportunidade, foram analisados os trabalhos de: Lopes (2011), um artigo de Fischbein, Tiroh e Hess, 1979, o artigo de Tall (1980), a tese de doutorado de Resende (2003) e as teses de doutorado de Kill (2010) e Kindell (2012), que também fizeram análises de livros didáticos.

1.1 O estudo de Lopes

A pesquisa de Lopes (2011), da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), apresenta análises de livros didáticos da educação infantil ao ensino médio, com uma maior ênfase na educação infantil. A metodologia utilizada foi a de Análise de Conteúdo, buscando observar a presença da noção de infinito ou indícios dessa presença.

Com relação à análise propriamente dita dos livros didáticos, Lopes (2011) destaca necessidade de observar se há traços das noções de infinito nesses livros; quais são elas; de que forma são apresentados e em que momento. Conclui que é feita uma retomada de alguns assuntos do ensino fundamental, no primeiro ano do ensino médio. No estudo das funções, aparecem as noções de contínuo e discreto (nos gráficos de funções), formalmente, vinculadas aos conceitos de infinito potencial e de infinito atual (como, também, vinculadas ao domínio de funções, subconjuntos e conjuntos numéricos).

Destaca que, nesses livros do ensino médio, é feita uma maior aproximação entre a geometria e a noção de infinito. Entretanto, isso só ocorre substancialmente e diretamente nas séries finais. Analisa que existem inúmeras atividades presentes nesses livros nas quais se pode discutir o conceito de infinito e entende que as ideias que compõem esse conceito estão presentes desde a educação infantil, não podendo ser consideradas como conteúdos novos do ensino médio e do ensino superior. Não encontramos nessa produção propostas de elaboração de atividades para esse ciclo.

1.2 O estudo de Fischbein, Tiroh e Hess

O estudo de Fischbein, Tiroh e Hess (1979) envolve observações sobre a natureza contraditória, as interpretações, a conservação da ordem e os efeitos da idade e do ensino, em relação ao conceito de infinito, junto a um grupo de estudantes dos Estados Unidos. Especificamente, decidiu-se analisar apenas duas concepções do infinito: a natureza potencial do conceito que corresponde à potência da enumerabilidade dos conjuntos infinitos, e a potência do contínuo, ideia que motivava a resistência à intuição do infinito, e que se havia alguma diferença significativa através da idade e da influência do ensino.

Procurou-se a relação entre a interpretação intuitiva e o nível de escolaridade dos sujeitos, ou seja, era suposto que o conceito de infinito, especialmente o da divisibilidade infinita, era intuitivamente contraditório. Nesse sentido, realizou um teste estatístico de hipóteses verificando a significância de que as respostas caíssem dentro dessas duas categorias opostas, ou seja, uma aceitando a hipótese da divisibilidade infinita e a outra, rejeitando. Outros testes foram realizados para testar a significância do efeito da idade e do ensino. Embora não fosse especificada qualquer hipótese sobre o conceito de limite, ele foi usado para compreender a noção intuitiva sobre o infinito.

A pesquisa envolveu 470 alunos da escola do ensino fundamental I e iniciantes do ensino médio, fundamental II. Na primeira categoria existiam 46 alunos do quinto ano; 58 do sexto, enquanto que, na segunda categoria, havia 152 do sétimo, 104 do oitavo e 110 do nono ano. Foram apresentados 10 problemas para cada categoria e as perguntas eram as mesmas em cada uma delas.

A controvérsia era se a propriedade específica que caracterizava o conjunto infinito (a comparação da cardinalidade de conjuntos infinitos) valeria para todos os conjuntos infinitos. A pesquisa concluiu que há uma natureza contraditória na intuição do infinito divisível, confirmada nas hipóteses testadas em relação à natureza contraditória da infinita divisibilidade. Embora grupos de estudantes apresentassem posições distintas, a concepção finitista prevaleceu. Para muitos dos alunos, o conceito de infinito era entendido, exatamente, como a sua resposta dada aos problemas, por exemplo, que as sucessivas divisões em duas partes de um segmento será um ponto arbitrário alcançado por um dos pontos da divisão. Isso mostrou que os alunos têm uma resposta intuitiva, que não é meramente casual e que, de uma classe para outra mais acima, o crescimento da intuição infinitista era insignificante (uso de um teste qui-quadrado, com nível de significância abaixo de 0,05). Deve-se levar em consideração que essa é a natureza contraditória entre o caráter finitista dos esquemas intelectuais do aluno e de seu próprio conceito de infinito, observando que do 7º para o 9º ano, contrariando o que se esperava, essa intuição decrescia.

Comprovou-se, também, a influência significativa do processo de ensino nas respostas dos estudantes. Observou-se que alguns alunos respondem o que meramente lhe foi ensinado: o segmento contém infinitos pontos. Outros entendiam que o segmento era limitado e, portanto, não podia ser dividido indefinidamente. Entretanto, isso não anula a especificidade da intuição de cada um e que a intuição do infinito é afetada pelo estágio de desenvolvimento intelectual: é o que realmente sentimos como sendo verdadeiro ou a própria evidência da magnitude dos conjuntos infinitos e não os aspectos lógicos que são nos impostos. Isso significa que o conceito de infinito pode se desenvolver por si mesmo através do processo instrucional, enquanto que a intuição de infinito pode permanecer sem modificação. Em relação ao efeito do ensino, a pesquisa conclui que ele apresenta uma imagem muito mais complexa: positivo em alguns casos e negativos ou nulos, em outros.

1.3 O estudo de Kill

Embora Kill (2010) não apresente diretamente qualquer motivação para a escolha do tema proposto − concepções de infinito na educação básica −, ele descreve um panorama histórico advindo do pensamento grego da Antiguidade, passando por outros pensadores que se dedicaram ao assunto, até os trabalhos do matemático alemão Georg Cantor (1845-1918), no século XIX.

Dentre os objetivos para a realização de seu estudo, destacamos: examinar a abordagem dispensada ao conceito de infinito em alguns manuais escolares de Matemática, adotados no Brasil nos séculos XIX e XX, e realizar um estudo analítico envolvendo algumas concepções de infinito externadas por estudantes de Licenciatura em Matemática do Estado do Espírito Santo, futuros professores de matemática.

O estudo foi dividido em perspectivas de pesquisa intimamente entrelaçadas. O cenário conceitual sobre o infinito, através de fontes históricas, buscando textos ou documentos arqueológicos de autores consagrados levando-se em conta a notória importância dos escritos;

o diálogo com diversos autores; e, considerando o livro didático como a principal fonte para a investigação, observando a forma de enunciação do conceito, seu uso e representações, bem como as sequências didáticas e processo da formação do conceito. O material produzido para a análise das perspectivas dos futuros professores foi construído pelo autor a partir dos questionários respondidos pelos estudantes.

Essa pesquisa conclui que, historicamente, foi possível constatar uma maior pluralidade de significados atribuídos ao infinito. A concepção aristotélica de infinito potencial se confunde com a natureza numérica. O infinito atual ou real mediante comparação entre o todo e uma de suas partes próprias e que apenas o livro de Elon Lajes Lima se apresentou com didatizações sobre o infinito atual e definições, e que se tratava de um livro para professores ou futuros professores de matemática. Outros livros didáticos apresentaram o infinito atual enquanto noção ou de maneira subliminar. As noções apareciam em: somas infinitas, dízimas, cálculo de perímetros e cálculo de π. Constatou que o conceito de infinito era considerado importante para 90% dos professores entrevistados, porém poucos fazem uso desse conceito nos seus trabalhos. E conclui, ainda, dizendo:

> Cabe ao professor instigar os seus discípulos para além daquilo que está no script e não ficar no simples atendimento às orientações curriculares, puramente pragmáticas atreladas à conceituação do infinito potencial, sem dar a devida importância, na prática, a esse conceito (KILL, 2010).

Conclui, também, que alguns manuais didáticos se apropriaram da igualdade sugerida por Euler ($\frac{a}{0} = \infty$), mesmo com reações contrárias.

1.4 O estudo de Kindel

O objetivo da pesquisa de Kindel é investigar e analisar a produção de significados para a noção de infinito por licenciandos de Matemática, em um ambiente virtual à distância, o VMT8. Em particular, o seu trabalho buscava verificar como as tarefas sobre infinito promovem ou não interações no ambiente VMT_Chat e refletir sobre as possibilidades e limitações que este ambiente apresenta para os licenciados e para a pesquisadora; analisar como são constituídos os objetos matemáticos, relacionados aos infinitos: potencial e atual;

construir e analisar os mapeamentos cognitivos que emergem durante a constituição desses objetos.

A análise de extratos de livros didáticos foi empregada a fim de compreender onde e como as ideias sobre infinito são tratadas no Ensino Fundamental e Médio – essa análise foi necessária, embora o estudo sobre a abordagem curricular fuja do escopo deste trabalho.

A metodologia escolhida para sustentar esta investigação foi a de *Design Experiment*.

Conclui que o infinito potencial parece fazer parte do contexto diário das pessoas e, ao mesmo tempo, o infinito atual necessita de intervenção pedagógica por se tratar de um conceito complexo em sua constituição e por ser fruto essencialmente de reflexões abstratas, não fazendo parte, portanto, das concepções intuitivas. Além disso, que o livro didático é uma fonte quase única para o professor preparar a aula; por isso, sua análise oferece indicativos do que está sendo veiculado e discutido nas salas, de aula de matemática.

Enfatiza a Política Nacional de entrega gratuita de livros didáticos para todos os alunos matriculados nas escolas públicas. Mas destaca que, nos livros didáticos consultados, o infinito tem pouco destaque. Algumas alusões à sua existência são feitas quando são apresentadas as dízimas periódicas simples e compostas e em alguns exemplos de dízimas não periódicas. Outras menções sobre o infinito ocorrem na soma de infinitos termos de uma progressão geométrica, resultando num determinado valor finito, e no cálculo do valor de π e no método de processos infinitos, como no caso do Princípio de Cavaliere, para o cálculo de volumes na geometria espacial estudada no Ensino Médio.

A análise aponta ainda uma considerável apropriação, por parte dos livros didáticos, de abordagens do infinito, ou seja, do infinito potencial, como algo processual. Não é de se surpreender, portanto, que os estudantes apresentem essa concepção do infinito como sendo a mais “presente” em seu modo de pensar. Esses dados foram confirmados por Kill (2010).

É possível inferir que o sistema educacional brasileiro provê aos estudantes dois métodos diferentes, os quais podem ser usados para comparar dois conjuntos finitos: o método da contagem e o método da relação “um a um”, ou seja, da bijeção.

1.5 O estudo de Resende

O objetivo desse estudo era mapear as dificuldades de natureza epistemológica do ensino do cálculo, procurando interpretá-las em diversas escalas e contextos, do ponto de vista da evolução histórica, das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica e de ações de natureza pedagógica. Ou seja, especificamente falando, o trabalho vislumbra construir: mapas conceituais das ideias básicas do cálculo; em pequena escala, mapas conceituais das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino do cálculo; e elaborar diretrizes de ensino para a emersão e participação efetiva das ideias do cálculo tanto na educação superior quanto na educação básica.

Sua metodologia buscou uma abordagem qualitativa, visando à interpretação em lugar da mensuração, à descoberta da construção, valorizando a indução, assumindo que fatos e valores estão intimamente relacionados, a partir da ideia de mapas conceituais.

Suas principais conclusões foram que, nos mapeamentos das dificuldades de aprendizagem, a natureza epistemológica do ensino do cálculo e lógica do ensino estavam presentes. Que a partir do entrelaçamento dos fatos históricos e pedagógicos, eram como pano de fundo das dualidades essenciais e os mapas conceituais do cálculo.

Foram consolidados e consubstanciados os macroespaços das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino do cálculo que está presente em ambos os níveis de ensino: na educação superior e na educação básica. Alguns resultados do cálculo estão presentes na educação básica de matemática, tais como: cálculo de áreas de círculos, de volumes de sólidos de revolução, soma de uma progressão geométrica infinita, em condições favoráveis, representação decimal dos números reais etc.

A revisão de bibliografia nos serviu para verificar o nível de comprometimento de cada uma das pesquisas analisadas com o propósito da análise dos livros didáticos em relação à presença ou não das noções de infinito e das noções relacionadas com essas noções, sua metodologia e a ação didática usada para que possamos fazer uma comparação com os nossos propósitos, garantindo a particularidade de nossa pesquisa. Na nossa análise dos livros didáticos, a partir dos resultados apresentados, procuraremos identificar a presença ou não dessas noções nos manuais escolares, buscando sugestões dos trabalhos didático e metodológico, bem como apresentar sugestões de noções relacionadas com o conceito de infinito que possam ser trabalhadas na educação básica.

CAPÍTULO 2

2.1 A Fundamentação Teórica

A pesquisa tem como fundamentação teórica, relacionada à educação, a teoria do processo-objeto, conjecturando que a aprendizagem se dá por meio de um processo de Encapsulação (DUBINSKY, 1991) e da Reificação (SFARD, 1991), em um objeto. Optamos por essa duas teorias por serem similares e satisfazerem os nossos objetivos de pesquisa na análise das concepções e noções relacionadas com o infinito, partindo do processo que está por trás dessa noção, para chegar ao conceito.

Com essas ideias, acreditamos que seja possível contribuir de modo significativo para motivar, orientar e aprofundar o trabalho dos professores da educação básica com esse conceito, possibilitando ao professor a sua aplicação em vários outros contextos da matemática, do cotidiano ou de qualquer outra ciência.

Assim, consideraremos a dualidade entre o processo e o objeto da matemática: o conceito. Ou seja, do uso do mesmo simbolismo na representação do mesmo objeto. Como, por exemplo, a utilização da soma infinita: 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + ..., do produto desse processo que é o objeto dízima periódica: 0,333 ..., ambos, representando a fração $\frac{1}{3}$.

Desta forma, a ambiguidade dessa notação permite a flexibilidade, no pensamento, considerando de um lado o processo da soma infinita e do outro, o conceito de dízima periódica a ser manipulado. Do mesmo modo, como no processo para dividir 350 por 125 e a fração 350/125, ou seja, por um lado, existe o processo correspondente ao algoritmo euclidiano da divisão e, por outro, o produto desse processo: a fração geratriz. Ambos fazendo parte de um esquema mental mais amplo. A ideia é de que o pensamento matemático busca uma estrutura mental que é uma mistura de processo e conceito, chamado de proceito. É o caso do processo infinito e o limite. Por exemplo, a série geométrica infinita:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=2 \quad \text{ou} \quad 2=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}, \quad \text{o limite da soma.}$$

No próximo exemplo, necessitamos definir um processo muito interessante que pode ser aplicado em várias situações relacionadas com a noção de infinito: a fração contínua.

Uma fração contínua simples x, com a_0 inteiro e os demais termos (a_i, i > 0) naturais não nulos, é da forma: $x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}}} = [a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots]$

Pode ter finitos ou infinitos termos. As frações contínuas c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, ... são denominadas: 1° convergente, 2° convergente, 3° convergente e 4° convergente e assim por diante, da fração contínua simples x, denotada por: $[a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n]$, onde:

$$c_0 = a_0; \quad c_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0; a_1]; \quad c_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = [a_0; a_1, a_2];$$

$$c_3 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3]; \quad \text{e assim por diante.}$$

Agora, observe a equação quadrática $x^2 + 2x = 1$ ou $x = \frac{1}{x+2}$ que substituindo o x do lado direito, produzirá a fração contínua:

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + x}}}$$

Um outro exemplo de fração contínua: $\frac{57}{17} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}$

A aproximação de números irracionais por racionais é uma questão de grande importância em diversas situações. São processos como esse que, consideramos, devem ser incentivados na educação básica.

Um exemplo que caracteriza esse tipo de situação utilizaremos para expor uma série de procedimentos alternativos que julgamos importante a exploração de diversas estratégias de resolução que permitem a exposição e o relacionamento de vários temas matemáticos, configurando-se uma contextualização intra-matemática. A fração contínua infinita e o número irracional, como as representadas por Euler, para π e e (COURANT, R. ROBBINS, H., 2000). São proceitos que encapsulam ou reificam o processo no objeto. Ou seja, é o processo da fração contínua encapsulado no objeto representado por esse processo: a fração contínua.

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\ddots}}}}}}$$

$$e = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+\ddots}}}}}$$

$$\sqrt{2} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}$$

Esses exemplos são casos especiais de um teorema geral, que não demonstraremos, que enuncia que: as raízes reais de equações quadráticas com coeficientes inteiros têm desenvolvimentos em frações contínuas periódicas, do mesmo modo que os números racionais têm em dízimas periódicas.

Observamos que se pode pensar que essas variações de notação podem provocar uma dificuldade na aprendizagem da matemática. Existem outras formas de se representar a $\sqrt{2}$, o *e*, e o π , por exemplo. Portanto, faz-se oportuno distinguir o processo, como sendo algo mais geral, e um procedimento, como sendo algo mais específico, consistindo num caminho do processo.

A forma mostrada acima é apenas um dos procedimentos, como existem outros, e o processo é o da representação da $\sqrt{2}$. Ou seja, podemos ter vários procedimentos (caminhos) para um determinado processo. No nosso caso, é o processo de representação da $\sqrt{2}$, como o de qualquer outro número. Entretanto, há outras dicotomias, como, por exemplo, o procedimento e o conceito (objeto matemático), ou seja, entre as coisas a fazer e as coisas a saber. A dualidade procedimento-objeto é indispensável no entendimento da matemática (SFARD, 1991 p.1-36).

A função, por exemplo, pode ser definida não apenas como um conjunto de pares ordenados, mas também como um certo processo computacional ou, ainda, um método para obter a transformação de um sistema em outro, ou seja, um tipo de transformação. Isso reflete, portanto, uma concepção operacional de um conceito. Assim sendo, a natureza dual da matemática pode ser observada não apenas na descrição verbal, como também através de vários tipos de descrição estrutural e Operacional das noções matemáticas ou de representação simbólica. Como mostra o quadro abaixo:

Quadro1 Descrição estrutural e Operacional das noções matemáticas

Objeto	Estrutural	Operacional
Função	Conjunto de pares Ordenados	Processo Computacional
Simetria	Propriedade de um figura geométrica	Transformação de uma Figura Geométrica
Número Natural	Conjunto de mesma Cardinalidade	Resultado de uma Contagem
Círculo	Lugar Geométrico	Curva obtida através de um Compasso

Fonte: SFARD, 1991 p. 5

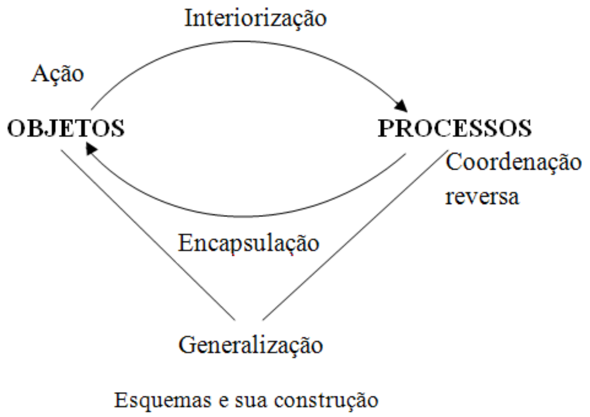
Observamos que a natureza dual da matemática está no símbolo: ora ele representa o processo, ora representa o objeto (SFARD, 1991), como no símbolo do infinito ∞.

2.2 A Encapsulação de Dubinsky

Começamos com objetos. Estes abrangem toda a gama de objetos matemáticos: números, variáveis, funções, espaços topológicos, topologias, grupos, vetores, espaços vetoriais, etc, cada um dos quais deve ser construído por um indivíduo em algum momento de seu desenvolvimento matemático.

Em qualquer momento, há uma série de ações que um indivíduo pode usar para calcular com esses objetos. Essas ações vão muito além do cálculo numérico, resultando em respostas numéricas. A obtenção, por exemplo, do espaço dual de um espaço vetorial é um cálculo. O diagrama abaixo mostra como ocorre a interação na dualidade processo-objeto.

Figura 1: Esquema da Interação Processo-Objeto



Fonte: (Dubinsky, 1991 p.107)

As teorias de Processo-objeto conjecturam que o aprendizado se dá por meio da encapsulação (DUBINSKY, 1991) de um processo em um objeto. Encapsular um processo em um objeto é ter a capacidade de analisar, refletir e conectá-lo a diferentes outros processos. A teoria APOS (Ação, Processo, Objeto e Esquema) é aquela que entende que há três tipos de conhecimentos matemáticos: ação, processo e objeto, podendo ser organizados e estruturados dando origem aos esquemas. A ação leva à transformação que se possa fazer de um objeto em outro. O produto dessa ação leva a um objeto diferente do inicial, de tal forma que ações diferentes levam a objetos diferentes (DUBINSKY, 1991). Quando um indivíduo é capaz de ver as ações que está efetuando como um todo, sem necessidade do passo anterior para executar o seguinte, percebe que, dessa forma, ele está diante de um processo, ou seja, ele se considera realizando uma única ação. Portanto, ao ter controle sobre o processo, analisando-o e percebendo o seu uso em outro, por exemplo, diz-se que ele encapsulou o processo no objeto.

A teoria APOS está fundamentada na sequência: ação, processo, objeto, esquema, pela qual o indivíduo precisa passar para adquirir aprendizado, sem o foco nos símbolos matemáticos. Ou seja, ela dá uma indicação de como um estudante pode passar de um processo para um objeto matemático. Em geral, ele se prende mais ao processo do que ao conceito, dificultando a formalização.

2.3 A Reificação de Sfard

Já a teoria da reificação (SFARD,1991) trata de dois tipos de conhecimentos matemáticos: as concepções estruturais e as operacionais, respectivamente relativas ao objeto e ao processo de que se trata na teoria APOS. As operacionais dizem respeito às descrições de noções matemáticas por meio de processos, algoritmos e ações. Todavia, as estruturais descrevem essas noções através de objetos abstratos, como no caso dos grupos, anéis, corpo etc.

Segundo Sfard (1991), a primeira concepção a ser desenvolvida no aprendizado de novos conceitos matemáticos é a operacional, porém as estruturais são mais difíceis de serem alcançadas. A transição de uma para outra é feita em três fases, a saber: interiorização, condensação e reificação. A interiorização é a fase anterior à ação em que o indivíduo toma contato com as operações efetuadas no objeto, analisando a situação e a ação para compreender o ato, sem realizá-lo. A condensação ocorre quando a ação é efetuada, transformada em processo e compreendida sem mais análises. A reificação ocorre quando o processo é transformado em objeto, dando significado a esse novo objeto, sem relacioná-lo ao processo. Na teoria da reificação, os símbolos representam a dualidade entre o processo e o objeto, ou seja, o conceito: um "proceito". Em geral, os símbolos em matemática não só representam os conceitos, mas as ações exercidas sobre os objetos e o produto dessas ações.

Para Sfard (1991), os indivíduos que compreendem a dualidade dos símbolos, ou seja, têm um pensamento proceitual, são mais bem sucedidos em matemática.

Assim, as fases dessa transição entre a concepção operacional e a concepção estrutural podem ser relacionadas com a teoria APOS; a interiorização é a fase anterior à ação. A condensação acontece entre a ação e o processo. Já a reificação ocorre do processo para o objeto de interesse. Por exemplo, podemos entender a dízima como um processo de soma infinita (fase anterior à ação: interiorização), realizar essas somas (fase da condensação) e chegar ao objeto: a fração geratriz, entendendo que possa fazer parte de outro processo (a reificação). É possível que, mesmo que um novo conceito esteja sendo criado estruturalmente, o aluno vá pensar nele como uma definição de forma operacional (SFARD,1991).

Tanto APOS quanto a teoria da reificação são restritas a desenvolvimentos cognitivos que passam do processo para o conceito, enquanto a noção de proceito amplia essas ideias para a possibilidade de desenvolver aprendizagem no sentido oposto, isto é, do conceito para o processo. Isso faz com que com que a encapsulação (ou a reificação), presente nas teorias APOS e da reificação, não seja uma fase necessária para entendermos símbolos como "proceitos". Os símbolos, nessa perspectiva, representam uma dualidade e uma ambiguidade, e não uma "transformação" de processo para objeto. Essas características da noção de "proceito" ampliam as possibilidades de explicar o aprendizado de conceitos em matemática. Entretanto, nenhuma das duas considera abordagens que englobam percepções, observações e análise de um objeto físico ou de experiências mentais com o uso desse objeto, como acontece com o uso do símbolo $\longrightarrow$ (seta) para representar a expressão "tende a" ou "converge para" (SFARD, 1991).

Os aspectos procedimentais da matemática estão focados tanto na rotina de manipulação de material concreto quanto por palavras ditas, símbolos escritos ou imagens mentais. O conceito de número, por exemplo, é a base da aritmética e tem a sua origem no processo de contagem que, por sua vez, está encapsulado no conceito de número. Assim sendo, existem outras formas de encapsular o processo no objeto, em matemática. Sfard (1991) comenta que a habilidade para conceber as noções matemáticas como processo e objeto ao mesmo tempo é, na verdade, um ato complementar.

É nas práticas de matemáticos profissionais que frequentemente encontramos o processo e o conceito, combinados em uma única noção. Eles empregam ferramentas simples, usando a mesma notação para representar um processo e o produto desse processo: o conceito, como o caso do símbolo ∞, ou ainda:

- O símbolo algébrico $3x + 2$ representa o processo operatório da multiplicação e o da adição e a expressão "$3x + 2$" , o produto desse processo: o que ela representa.

- A notação da função $f(x) = x^2 - 3$ diz, simultaneamente, como calcular o valor da função para um particular valor de x e encapsula, nesse processo, o conceito de função para qualquer x.

A notação $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ encapsula o processo de tendência no conceito de limite.

Assim, a ambiguidade dos símbolos em matemática é vista como uma dualidade entre processos e conceitos.

Resumindo, entendemos que a teoria APOS apresenta uma sequência (ação-processo-objeto-esquema) pela qual o indivíduo necessita passar para adquirir aprendizado, não tendo foco específico os símbolos matemáticos e na teoria da reificação, os símbolos são vistos como uma dualidade entre o processo e o objeto, necessitando que o indivíduo passe de uma concepção operacional para uma concepção estrutural, indo do processo para objeto.

Destacamos que, além das ideias anteriores que foram comentadas neste capítulo, tomamos como referenciais teóricos para a análise dos livros didáticos as indicações provenientes do PNLDEM (BRASIL, 2004) e as próprias produções elencadas em nossa revisão bibliográfica. As mesmas referências foram utilizadas para a construção de nosso produto educacional, composto de atividades diversas voltadas para o ensino/aprendizagem e/ou aprofundamento de estudos relacionados ao conceito de infinito, e também na parte complementar deste produto, que apresenta leituras complementares sobre o tema.

CAPÍTULO 3

3.1 Considerações sobre o infinito

Nesse capítulo, analisamos aspectos do conceito de infinito em várias situações e contextos, indicando em cada um deles as contribuições deixadas até a época mais recente. Consideramos, inicialmente, o contexto filosófico desse conceito, no qual observamos, através dos séculos, o que de mais relevante ocorreu e que serviu de contribuição, enfatizada pela quebra de paradigmas da época. A contribuição da escola grega, com os paradoxos de Zenão, a quebra do paradigma dos pitagóricos, o incomensurável e a existência do número irracional. A contribuição da idade moderna aos dias contemporâneos, com os trabalhos de Fermat, Decartes, Borel, Newton, Leibnitz, Dededind, Weistrass, Kepler, Torricelli, Cavalieri, Wallis, Zermelo, Gauss, Bernoulli, D'Alambert, Lobathewski, Bolyai, Poincaré e, posteriormente, Riemann, Cantor e outros mais. Os conjuntos infinitos, os conjuntos numéricos e a relação do infinito com a geometria, bem como a apresentação de alguns processos in-finitos de aproximação, ligados à noção de tendência e a de convergência do método, mas que possam ser trabalhados em sala de aula.

3.2 A contribuição da filosofia

Antes da Revolução Científica, predominava a visão de que o mundo era fechado e limitado. Tal concepção é proveniente do pensamento aristotélico exposto em suas obras *Física* e *Sobre o Céu.* O filósofo refuta a possibilidade do infinito enquanto ato, ou seja, o infinito não pode ser separado das coisas sensíveis pois, caso o fosse, seria em si mesmo, o que o caracterizaria como sendo uma substância. Sendo assim, poderia ser tomado como divisível ou indivisível. Sendo divisível, necessariamente, uma de suas partes deveria ser infinita, já que a essência do infinito é o próprio infinito. Entretanto, é contraditório afirmar que uma parte do infinito seja infinita, já que o infinito carece de limites e a noção de parte carrega consigo a ideia de limite. Logo, o infinito não pode ser divisível. Já que o infinito não é uma substância, ele estaria nas coisas sensíveis enquanto um atributo, entretanto, é impossível existir um corpo infinito. Também não é possível falar em números infinitos em ato (BRUNO, G., 1984).

> Toda vez que fala-se algum número ocorre algum tipo de limitação. Quando diz-se "três", fala-se um número limitado e, portanto, não é infinito. Até mesmo os

> números ditos infinitos, como ocorre com o π (3,1415...) a mesma lógica é aplicada, pois para trabalhar-se matematicamente com o número π ocorre algum tipo de limitação. Os números somente são infinitos enquanto pensáveis, mas não em ato: Aristóteles (séc. IV ao séc. VII). (BRUNO, G, 1984 p. 5).

De qualquer forma, a visão de um mundo fechado e finito já é questionada e a possibilidade de um infinito enquanto ato, questão essa de cunho filosófico, torna-se um dos pontos centrais da Filosofia e base para as investigações matemáticas e científicas. Tudo desenvolve-se levando em consideração que o mundo é infinito.

O período compreendido pelos séculos XV, XVI e XVII é marcado por uma grande transformação na visão de mundo. Em tal época insere-se aquilo que é denominado de Revolução Científica. Trata-se de um forte movimento de ideias que não apenas transforma a imagem que se tem do mundo, mas, como consequência dessa transformação, muda-se a ideia a respeito do homem, acerca da ciência, no tocante ao trabalho científico e às relações entre ciência e sociedade, entre ciência e filosofia, e entre saber científico e fé religiosa. Noções e formas de ser deste período permaneceram por um longo tempo na mentalidade humana, tal como a imagem newtoniana do universo como uma máquina, ou seja, como um relógio, ou a impossibilidade de fazer-se ciência sem a técnica, visão essa presente ainda hoje. Apesar de considerarem a Revolução Científica tendo o seu lugar a partir do século XVI, com a publicação do *De revolutionibus* de Nicolau Copérnico, é possível afirmar que muitos dos seus alicerces foram lançados já no século XV. Isso torna-se claro ao observar determinados elementos que influenciaram o seu desenvolvimento, tais como a noção de infinito. A noção de correspondência entre elementos de dois conjuntos de objetos, o Homem, na história da matemática, já a possuía e dela constantemente fazia uso (EVES, 2008 p.457).

A “contemplação” das coisas do universo levou o Homem à observação da correspondência entre os objetos mais próximos e os dedos da mão, depois dos pés. Esgotando-os, depois cada grupo já esgotado com um novo dedo e assim sucessivamente. Era o esforço do Homem para aprender a contar. Além disso, houve a necessidade da criação dos símbolos para representar essa contagem. Foram os primeiros passos na criação dos números inteiros. O Homem mais primitivo conhecia apenas os primeiros deles e à medida que a ciência avança, vão se encontrando novos campos numéricos. Ainda hoje, na África Central, existem tribos que conhecem muito pouco deles. A ideia de se colocar, num conjunto de objetos, mais um objeto, despertou a possibilidade de um processo repetitivo. Ou seja, essa possibilidade ilimitada de repetição é percebida, hoje, no postulado de Peano, de modo que “todo número inteiro tem um sucessor imediato, diferente de si mesmo”. Nesse enunciado já está implícita a noção de ordem, tão antiga quanto a invenção dos primeiros números inteiros, que tinham propriedades indutivas, o que levava a propriedade a se estender a todos eles, mas ficava a ideia de que o todo é maior que qualquer de suas partes. É uma ideia finita, ou seja, de intuição finita. Nesse sentido, ficava-se curioso para saber qual é o maior dos números inteiros. Haverá esse número? O postulado de Peano responde negativamente essa pergunta. Ou seja, não há um maior número na sequência dos números naturais, pois ela fica em aberto devido ao fato da repetição indefinida, da inclusão de novos elementos sempre.

Uma outra questão era: é possível saber quantos números existem? Esse fato, com o que temos e conhecemos, não podemos responder, mas uma ideia foi pensada: infinito. E até um símbolo (∞) foi inventado para representar essa quantidade. Assim sendo, não se pode estender a ele, as propriedades indutivas dos números inteiros, imputando-lhe a qualidade de número, porém deixa-o intimamente relacionado. Portanto, o conceito de infinito já pode ser visto a partir da noção de indução.

Desde a época de Arquimedes se pensava num número que ultrapassasse os limites da inteligência do Homem, o qual deveria ser maior que o número de grãos de areia contidos numa esfera de raio equivalente à distância do centro da Terra à abóboda celeste. Para Arquimedes, esse problema não passava de um problema de numeração escrita e falada. Dizia ele: “Muitos pensam que o número de grãos de areia é infinito”. Ou seja, ele negava a existência de um número maior que todos os outros, logo percebe-se que ele tinha uma concepção muito atual de infinito. Foi dele o mérito de introduzir na Matemática da Antiguidade os melhores conceitos de infinito e de infinitesimal, sendo considerado como o precursor do cálculo infinitesimal e autor do método do exaustão, realizando, com esse método, verdadeiras integrações.

A noção de continuidade reside nas ideias de infinito, na repetição indefinida de divisões sucessivas e na subdivisão ilimitada das grandezas de espaço e tempo. A questão da continuidade assumiu na antiguidade aspectos bem próximos dos atuais, com as “concepções atômicas” de Demócrito e outros filósofos gregos, com as ideias de corpúsculos elementares contíguos: os átomos. Estava claro que, na época, a ideia da continuidade estava relacionada com a ideia de movimento.

A crise criada na matemática grega, com a descoberta dos números irracionais, de alguma forma, estava relacionada com a ideia de continuidade e de infinito. A crítica notável feita por Zenão, infelizmente, não foi levada a sério por muitos dos seus contemporâneos e, de certo modo, inexplicavelmente menosprezada por várias gerações até que Weierstrass a redimiu, dando ao discípulo de Parmênides o papel de destaque que mereceu por seus famosos paradoxos. Se eles, realmente, tinham um papel destruidor, serviu de alerta a todos para que instituíssem teorias em fundamentos sólidos. Merecendo, portanto, nesse trabalho a citação dos paradoxos de Zenão dirigidos à escola Pitagórica (ROQUE, T. 2012 p. 132-139).

3.2.1 A contribuição da escola grega

3.2.1.1 Pitágoras, Zenão, Eudoxo e Arquimedes

É da geometria Grega que, historicamente, conseguiremos a matéria-prima da análise infinitesimal. A descoberta do número irracional, sem dúvida, foi um dos acontecimentos de mais alta importância na história da matemática e do pensamento humano. Ele marcou a origem da verdadeira contribuição grega à formação do verdadeiro espírito do rigor matemático, modificando, consideravelmente, o desenvolvimento da matemática e de toda a ciência, consolidando o espírito da crítica e a revisão permanente de seus princípios básicos. Isso ficou claro quando, em detrimento da ciência e dos rigores de uma seita, tentaram esconder a descoberta dos incomensuráveis, que findava com a filosofia da famosa escola "pitagórica" sobre o universo, baseada na concepção do espaço com pluralidade de pontos. De modo que a medida de um segmento seria feita por um número proporcional ao número (inteiro) de pontos compreendidos entre seus pontos extremos.

Os pitagóricos acreditavam em uma espécie de atomismo numérico que concebia todas as coisas como sendo compostas de unidades. Essas unidades seriam números, a matéria básica que compõe o universo. Como consequência, o espaço seria composto de pontos e o tempo, de instantes. Porém, se considerarmos um quadrado de lado unitário, sua diagonal, calculada a partir do teorema de Pitágoras, deveria ser expressa por um número que elevado ao quadrado, fosse igual a 2 e, como esse número não era possível perceber a partir de inteiros, satisfazendo a condição acima, logo, a diagonal do quadrado não tem medida, dentro da concepção pitagórica. Esse fato impõe a existência de um outro tipo de número que deve dar conta dessa medida. Isso se deu através da apelação aos processos infinitos, o que levou a escola pitagórica a tentar ocultar os fatos, para não se ver em maus lençóis, como meio de prolongar o predomínio de sua filosofia. Havia, no entanto, uma outra escola, dos eleatas – que tinha um de seus expoentes em Parmênides – que defendia a unidade do espaço, que deveria ser indivisível, e a permanência do ser no tempo, ou seja, a ausência de mudança.

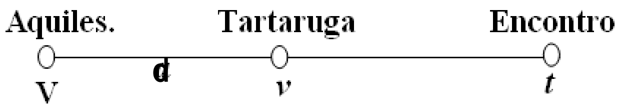
Parmênides foi um dos maiores opositores à concepção de número da escola pitagórica. Contra a preponderância do número na filosofia de Pitágoras, Parmênides postulava a diferença entre o cálculo e a razão. A noção arcaica de número admitia uma unidade indivisível, concebida como um ponto, mas com espessura. Zenão, amigo e seguidor de Parmênides, pretendia demonstrar que o número não é nem um indivisível, nem algo suscetível de ser subdividido infinitamente. Herdou o espírito da crítica à escola pitagórica, e apresentou quatro famosos paradoxos, que se tratava de saber se o contínuo é infinitamente divisível ou composto de infinitos indivisíveis, como acreditavam os pitagóricos (ROQUE, T. 2012 p. 132-139), a saber:

3.2.1.2 A dicotomia:

"não existe movimento, pois o que se move deve alcançar, a princípio, metade de seu percurso, antes de chegar ao final do mesmo" Ou seja, qualquer que seja o movimento admitido, esse pressupõe outro movimento e este, por sua vez, outro e assim por diante "*ad infinitum*". Para refutar esse argumento foi necessário desenvolver certos conceitos lógicos, como o de classes, até se chegar em classe infinita, etc. Para os contemporâneos de Zenão, incapazes de argumentar contra, bem como para ele próprio, esse argumento não passou de um sofisma, ou seja, de um jogo engenhoso de palavras.

3.2.1.3 Aquiles e a Tartaruga:

Figura 2: Corrida entre Aquiles e a Tartaruga



Fonte: O autor

É o mais famoso dos paradoxos. Aquiles, o corredor, tendo dado uma certa vantagem inicial à tartaruga, nunca a alcançará, pois, para consegui-lo, terá que alcançar, primeiro, o ponto de partida da tartaruga, em cujo tempo já atingiu uma nova posição etc, de modo que permanecerá sempre à frente de Aquiles. Argumento que só se refutará com modernos conceitos de equivalência de conjuntos infinitos. Bertrand Russel ilustrou-o como todos os outros paradoxos de Zenão, com exemplos aritméticos, colocando-os sob tratamento analítico e refutando-os um a um, no seu livro "The principles of mathematics" Foram, decerto, argumentos como esses que envolveram os processos infinitos. Com efeito, é certo que Aquiles alcançaria a tartaruga num tempo t, obtido a partir da equação: $d + \mathrm{v\,t} = \mathrm{V\,t}$, onde: d representa a vantagem inicial da tartaruga, v e V, as velocidades, respectivamente, da tartaruga e de Aquiles, sendo, ainda, V > v (fig.2). A solução é, portanto, dada por (ROQUE, T. 2012 p. 134):

$$\mathrm{t} = \frac{d}{V - v},$$

o que poderá ser alcançado seguindo rigorosamente o raciocínio de Zenão, por meio de uma série geométrica conforme mostraremos: Diz Zenão: enquanto Aquiles percorre o espaço *d,* e o faz no tempo, $\mathrm{t}_1 = \frac{d}{V}$ a tartaruga terá percorrido um espaço $b = \mathrm{v} \cdot \mathrm{t}_1 = \mathrm{v} \cdot \frac{d}{V} = \frac{d\,v}{V}$.

Aquiles, então, percorrerá o espaço b, no tempo $\mathrm{t}_2 = \frac{b}{V} = \frac{d \cdot v}{V^2}$, mas a tartaruga terá por sua vez percorrido um espaço $c = v \cdot t_2 = \frac{d \cdot v^2}{V^2}$. De novo, Aquiles levará um tempo $t_3 = \frac{c}{V} = \frac{d \cdot v^2}{V^3}$, para alcançar a tartaruga e assim indefinidamente. O tempo total gasto por Aquiles para alcançar a tartaruga será evidentemente, o limite:

$$t = \lim_{n \to \infty} (t_1 + t_2 + t_2 + \cdots + t_n)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{d}{V} + \frac{d \cdot v}{V^2} + \frac{d \cdot v^2}{V^3} + \cdots + \frac{a \cdot v^{n-1}}{V^n}\right)$$

Estamos, evidentemente, diante de uma série geométrica cuja razão é $\frac{v}{V}$, com V > v e, portanto, menor que 1. Logo, a série geométrica converge para:

$t = \dfrac{\frac{d}{V}}{1-\frac{v}{V}} = \dfrac{d}{V}\cdot\dfrac{V}{V=v} = \dfrac{d}{V-v}$ que coincide, exatamente, com a solução da equação acima referida. Logo, sendo **t** finito, Aquiles alcançará a tartaruga. (ROQUE, T. 2012 p. 135)

3.2.1.4 A Flecha

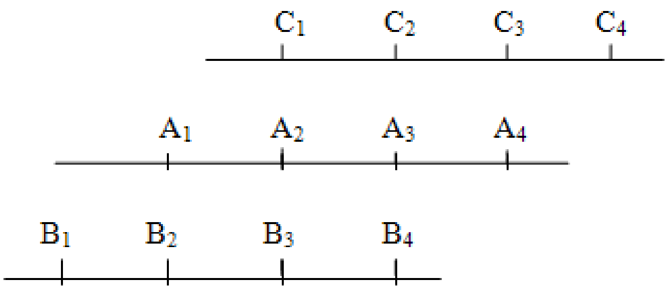
Uma flecha que se move, em um dado instante, está em repouso ou não, ou seja, move-se. O ponto é, nesse caso, o espaço ocupado pela própria flecha, portanto, ela ocupa um espaço que é igual a ela mesma. Mas tudo aquilo que ocupa um espaço que é igual a si mesmo, na verdade, não se move, pois a velocidade é a variação do espaço com o tempo. Logo, a flecha está em repouso a cada instante de seu voo, não podendo, assim, estar em movimento. Ou seja, se o instante é indivisível, a flecha não pode se mover, pois, se o faz, o instante ficaria dividido imediatamente. Como o tempo, porém, é composto de instantes, e a flecha não pode mover-se em qualquer desses instantes, infere-se que a flecha estará sempre parada. Esse paradoxo para aqueles que eram contra a “divisão infinitamente continuada” (p, 136).

Bertrand Russel observa uma certa razão no pensamento de Zenão e Eric *Temple Bell* em “*Men of Mathematics*”, um dos mais notáveis livros escritos sobre o assunto. Referindo-se a Zenão, considera-o uma “mente moderna em um corpo antigo”. A refutação a esse argumento, Russel a faz instituindo uma “teoria estática” da variação, que consiste em, partindo do elementar princípio de que “todo valor possível de uma variável é uma constante”, conceituar precisamente o que se entende pela expressão “x varia dentro de um domínio D”. Essa teoria nega completamente que haja diferenças infinitesimais, ou seja, que a diferencial de uma função seja uma diferença ou um acréscimo infinitesimal. O quarto paradoxo é o da medida (o Estádio):

3.2.1.5 O Estádio

Se apenas contra aqueles que colocam os indivisíveis como últimos elementos na escala da divisão repetida sucessivamente. Observando o movimento como Bertrand Russel, que o compara ao fato de que, “em um momento discreto” um corpo está em um “lugar discreto”, em outro momento também discreto, está, porém, em outro lugar discreto. Ou seja, imaginemos uma linha reta e três pontos A. B e C sobre ela, nessa ordem. Não se pode ir de A para C, sem passar por B, pois, senão, o instante é indivisível, bem como o espaço. Isto é, estamos supondo que o tempo pode ser subdividido até um elemento indivisível chamado o "instante". Agora, dados A_i, B_i e C_i. Supondo que cada B chegue ao A (mais próximo) em um instante que é o menor intervalo de tempo possível e que cada C chegue ao A (mais próximo) em um instante que é o menor intervalo de tempo possível. Sejam A_i, B_i e C_i corpos de mesmo tamanho, dispostos como segue (fig. 3A):

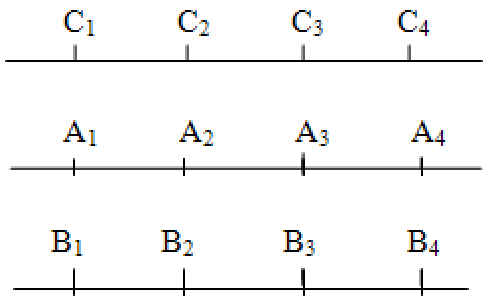
Figura 3A: A flecha e o estádio



Fonte: ROQUE, 2012 p.137

Os B_i e os C_i movem-se de maneira que, um instante depois, ocupem as mesmas posições abaixo (fig. 3B):

Figura 3B: A flecha e o Estádio



Fonte: ROQUE, 2012 p.137

Mas, para chegar a estas posições, cada C_i passou por dois B_i e, portanto, o instante considerado como o intervalo de tempo que cada B_i levou para chegar num A_i não era o menor possível e nem era indivisível (ROQUE, T. 2012 p. 137).

Como percebemos, os argumentos de Zenão fazem apelos constantes ao que se vê, ao que se sente e a intuição. Dessa forma, os conceitos tomam formas mais nítidas, dando espaço às teorias abstratas, atreladas apenas à lógica, modificando o senso comum do que seja a "existência do ser", chegando a um conjunto de postulados e de proposições para o que seja o contínuo, o infinito, o limite etc. Da análise desses paradoxos se infere naturalmente que, embora de modo muito vago, um novo conceito e um novo método operatório estava por vir, fecundado a partir da noção de infinito.

Deve-se, inquestionavelmente, a Eudoxo de Gnido, a utilização, pela primeira vez, do método do exaustão: "Se de um segmento, retira-se a sua metade ou mais e repetindo-se essa operação um número suficientemente de vezes, no segmento que resta, pode-se conseguir um segmento menor que qualquer outro dado, da mesma espécie, ou seja, um tão menor quanto se queira", contido no livro XII dos elementos de Euclides e atribuído por muitos a Arquimedes, que dele fez frequente uso, mas que ele próprio, no prefácio de uma de suas obras, confessa ter sido Eudoxo empregado, na demonstração de que o volume do cone equivale à terça parte do volume do cilindro, de mesma base e de mesma altura. Esse método é conhecido, hoje, como fundamentado no postulado de Arquimedes, mas é devido a Eudoxo (EVES, 2008 p.418).

Ele operou, pela primeira vez, com "quantidade tão pequenas quanto se queira, quando estabeleceu que as áreas dos círculos são proporcionais aos quadrados dos seus diâmetros, inscrevendo sucessivamente, neles, polígonos regulares de 4, 8, 16, 32 ... lados, observando que a diferença entre as áreas dos círculos e dos polígonos vai diminuindo em mais que a sua metade e, em virtude de seu postulado, pode-se chegar a ser tão pequena quanto se queira". Percebe-se que, desse modo, tinha Eudoxo a perfeita noção moderna de limite, embora não tenha chegado a dar uma definição. Mas teve o mérito de ter sido ele o primeiro a dar a definição dos números irracionais, instituindo a teoria das grandezas incomensuráveis a qual Euclides fez incluir no seu "Livro V" dos elementos. Sua genial definição da razão de duas grandezas homogêneas se exprime da seguinte forma:

> Diz-se que a primeira de quatro grandezas tem com a segunda, a mesma razão que a terceira com a quarta, quando, tomando qualquer equimúltiplo da primeira e da terceira, o múltiplo da primeira é maior, igual ou menor que o da segunda, conforme o múltiplo da terceira seja maior, igual ou menor que o da quarta.

A obra de Eudoxo permitiu uma melhor compreensão da continuidade de Aristóteles, que aceitava o infinito potencial, negava o infinitésimo, considerando toda grandeza como finita, e dissipou as dúvida de Zenão que, de certo modo, foram superadas e durante séculos adormecidas na estrutura íntima do infinito, eclodindo no fim do século XIX e começo do século XX, provocando uma crise na matemática contemporânea. Há quem considere Arquimedes como o maior dos matemáticos de todos os tempos. Há, também, quem o compare a Newton e a Galileu. Ele praticou exaustivamente o cálculo de limites através do método do exaustão do Eudoxo, a quem Erastótenes, que foi seu amigo íntimo, chamava de "divino". A percepção da inexistência de um limite último ou de um mínimo absoluto, tendo sempre uma grandeza menor do que outra dada, confere à matemática grega o contributo de ampliar a profundidade da compreensão do conceito de número.

> O infinitesimal tem importância fundamental na determinação de medidas, principalmente considerando o contexto grego que impulsionou, sobremaneira, a geometria. Antes da contribuição grega, os problemas que envolviam medidas eram resolvidos por aproximação (Kill, 2010).

Arquimedes inventou métodos geniais para o cálculo de áreas de figuras planas limitadas por linhas curvilíneas e de volumes de sólidos limitados por superfícies curvas, métodos esses que aplicou a vários casos particulares, como ao círculo, à esfera, ao segmento parabólico, à área compreendida entre dois passos da espiral por ele descoberta etc. Calculou também o valor de π e descobriu um método para a extração de raízes quadradas aproximadas, antecipando-se assim à invenção feita pelos hindus do algoritmo das frações contínuas periódicas. Foi Arquimedes o primeiro matemático a efetuar verdadeiras integrações, antecipando-se, também, em 2000 anos a Newton e a Leibnitz na invenção do Cálculo Integral. Em um dos seus problemas, o da tangente à sua espiral, por ele resolvido, antecipou a criação do cálculo diferencial, sendo desse modo o pai do Cálculo Infinitesimal, sem dúvida o mais poderoso instrumento das ciências exatas atuais, na investigação das leis dos fatos naturais. Pela teoria dos limites na evolução da matemática, o método dos limites está impregnado de todos os capítulos da Análise Infinitesimal, que, por sua vez, é a responsável por toda a evolução desde o século XVII até os dias contemporâneos, enriquecendo tão fabulosamente o patrimônio da humanidade.

3.3 Da idade moderna aos dias contemporâneos

Depois de Arquimedes, pouco foi acrescentado de relevante em relação ao estudo do infinito. Com Kepler no ano de 1615 surge a "*Steriometria deliorum*" onde se esboça uma teoria imperfeita de cubatura de sólidos de revolução, trabalho a que foi levado por força da necessidade prática de proceder a grande número de medidas de volume por ocasião de uma grande colheita de uvas na Áustria.

A partir de Viéte e Kepler, tem início uma fase nova de estudos cada vez mais intensos do infinitésimo e do infinito que haveriam de culminar com a invenção do Cálculo Infinitesimal de nossos dias. Citaremos alguns mais importantes e suas obras.

Pierre Fermat, com seu método de máximos e mínimos, em 1629, e mais tarde, em 1657, com problemas de quadratura; Roberval com a quadratura e a retificação da ciclóide em 1636; René Descartes com a sua imortal ”Geometria”, onde determina a tangente a uma curva em cada ponto, em 1637; Boaventura Cavalieri com sua Geometria *Indivisibilibus*, em 1645; Torricelli com a retificação da espiral logarítmica; Neil, retificando a parábola semi-cúbica; e John Wallis com sua *Arithmetica Infinitorum* que introduz pela primeira vez o método aritmético na integração, abandonando os processos geométricos de seu contemporâneos. Em 1655, Wallis deu um grande passo, instituindo o conceito de limite nos termos rigorosos atuais, impondo ao limite a condição de que a diferença, tomada em valor absoluto, entre a variável e o limite seja tão pequena quanto possível. Seu mérito não foi maior que o de Eudoxo, muito embora ignorasse por completo os trabalhos desse que, por muitos anos, até quase nossos dias, foi figura injustiçada na história. Os trabalhos de Wallis serviram de apoio a uma grande elaboração de novos métodos para os limites.

Eram dois problemas-chave da época, com os primeiros estudos do infinito e do infinitésimo: o problema das quadraturas, que gerou o Cálculo Integral, e o problema das tangentes, que criou o Cálculo diferencial. Os métodos de estudo adotados até meados do século XVII isolavam os dois problemas um do outro, aumentando, desse modo, a dificuldade do progresso mútuo da matemática nesse aspecto.

Foi a genialidade de Isaac Barrow que teve a magistral ideia de fundir os dois problemas em um só, concebendo a área como uma função primitiva do integrando, em outras palavras, o problema das áreas como o problema inverso do das tangentes.

Assim, foi possível fundir os dois cálculos num só. Faltava-lhe, apenas, a sistematização, ou seja, a criação de notações adequadas e o aprofundamento dos estudos. Newton e Leibnitz, com os seus talentos, embora por caminhos distintos, consolidam definitivamente o edifício grandioso, a mais fecunda fonte de progresso da ciência moderna, o Cálculo Infinitesimal. O século XVIII foi caracterizado pelo sucesso prático do cálculo infinitesimal.

Guilherme François (Marquês de L'Hopital) escreve o primeiro tratado do Cálculo Diferencial e abandona a vida de aristocrata para se dedicar inteiramente ao novo cálculo. Brook Taylor, os Bernoulli, Euler, Clairant, D'Alembert, Lagrange, Legendre, Laplace e Gauss foram as figuras de maior renome na constelação dos matemáticos do século XVIII que se preocuparam com o cálculo.

Euler reconhecia o cuidado especial que deveria se ter nos trabalhos com séries infinitas, advertindo que, não sendo elas convergentes, não era possível operar com a expressão algébrica que as definia, tida como a sua soma, dando o seguinte exemplo:

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots$$

Onde, fazendo $\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}$, tem-se o absurdo:

$$-2 = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots.$$

Reconhecendo, porém, a necessidade de ser cauteloso com os processos infinitos, não teve a devida cautela em alguns de seus trabalhos em que a fé na análise o fez tropeçar. Gauss, porém, impôs em definitivo a condição de que "a série infinita convirja para um limite finito, impondo condições a x e a n, no desenvolvimento binomial de :

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

Onde n não é necessariamente inteiro e para $x \geq 0$. Como conseqüência, desse resultado, deduz-se a importantíssima desigualdade:

$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$, para $n \geq 2$ (Desigualdade de Bernoulli).

Sendo considerado, pelo seu estudo a respeito desse assunto, como primeiro rigorista.

O século XIX deu ao mundo notáveis mestres, entre eles Abel, Cauchy, contemporâneo de Gauss e Weierstrass, e Dedekind, seus sucessores. Os trabalhos de Gauss no novo campo da análise, como o uso correto dos processos infinitos, foram quase definitivos em certos capítulos da teoria do infinito matemático, mas, somente com G. Cantor, veio a ser aceita como certa a ideia do infinito real, pois ele só admitia o infinito em potência, quando se expressou claramente contra, em 183:

> Protesto contra o uso da grandeza infinita como uma coisa completa, que jamais se pode permitir na

> matemática. Infinito é simplesmente uma forma de falar e a sua verdadeira significação é de um limite de que certas razões se aproximam indefinidamente, enquanto outras aumentam sem restrição.

Nascido num contexto da geometria, relacionado à perspectiva e à admissão de pontos no infinito, o infinito real (em ato) possibilita a quantificação e a resolução de problemas do mundo real. Ele é a essência dos elementos idealizados (número infinito, ponto no infinito, séries infinitas). A demonstração por recorrência se justifica pela passagem do infinito em potência ao infinito em ato. Pascal se refere a essa situação quando diz que sabemos que há um infinito, mas ignoramos a sua natureza.

O conceito e a teoria do infinito têm sido, no decorrer dos tempos, um objeto permanente de estudo. A penetração no infinito tem levado muitos homens da ciência a especulações metafísicas, de certo modo prejudiciais ao progresso da teoria científica, como foram observados nos trabalhos escritos, nos dois últimos séculos, por: Fontenelle (Elementtos de La Geometrie de l'infini), considerado um perfeito modelo de raciocínios imperfeitos; Lagrange, com notáveis escritos sobre o assunto; H. Fleury (Théorie Rationelle de l'infini Mathématique et du calcul Infinitesimal), com pesadíssimas críticas contra todos seus antecessores; e Carnot, com as "Reflexions sur La metaphysique Du Callcul Infinitesimal", de onde se inicia um movimento em sentido contrário, sendo a primeira tentativa, talvez, de se descartar a investigação científica.

Iniciado o rigor com Gauss, houve um novo movimento em Abel e Cauchy, dois grandes líderes da época. Observando os pontos fracos da teoria das séries, assumindo forma impecável de rigor, combatendo alguns tipos de indução, concentrando-se nas demonstrações aritméticas, procurando se afastar dos apelos aos raciocínios e apelo à intuição geométrica. Cauchy dá às noções de função, de limite e continuidade a forma atual com que se apresentam nos trabalhos moderno da Análise. B. Riemann, em 1854 e, logo após, Weierstrass, de funções contínuas, não admitindo derivadas em infinidade e até na totalidade dos pontos do domínio. Esse trabalho, no início, embora buscasse uma aritmetização da matemática era, de certo modo, orientado pelo modelo de teoria encontrado nos Elementos de Euclides: as noções não definidas, como ponto e reta, os postulados, os elementos puramente lógicos gerando os teoremas que serviam de ponto de partida para novos caminhos lógicos em busca de novas verdades. À medida que se purificava a Análise, a Geometria euclidiana sofria o seu primeiro revés em quase 20 séculos, com a criação de outras geometrias, tais como os trabalhos de Lobathewski, Bolyai, Poincaré e, posteriormente, Riemann, dentre outros. Com esses trabalhos, a matemática libertou-se definitivamente da condição de evidência que lhe impunham a intuição e as ciências naturais, principalmente a física, que passou a se identificar com a própria matemática.

Alguns postulados da Análise durante muito tempo se dissolviam no seu próprio seio, impossibilitando, assim, que ela satisfizesse às condições de Pasch, enunciadas em 1882, referentes ao rigor matemático. Com Cantor e Dedekind, destaca-se o postulado da continuidade, que serviu para os domínios da análise e aos da geometria, assumindo aspectos distintos, porém, equivalentes conforme o conjunto de pontos da reta. Com Stolz, isola-se o postulado de Arquimedes, que já vimos ser de Eudoxo, e o postulado de Pasch, relacionado ao conceito de ordem, fazendo parte dos axiomas e do rigor para suplementar os fundamentos da geometria euclidiana, propostos por Hilbert, em 1899.

Bolzano comprovou a correspondência biunívoca entre o intervalo [0; 5] e o intervalo [0;12], entretanto, preferiu rejeitar o fato comprovado, denominando-o como mera ilusão. Dedicou toda uma obra para discutir o infinito, principalmente, na concepção atual (MORENO, L. E , WALDEGG, E. G, 1991).

Depois da introdução feita por Cantor dos números transfinitos e das teorias modernas dos números reais (Dedekind, Meray, Cantor, Weiertrass e outros), parecia que, em caráter definitivo, estavam estabelecidos os capítulos da Análise. Kronecher se opôs rigorosamente às ideias de Cantor, chegando a qualificá-las, alarmado pela comparação de um conjunto com um de suas partes próprias, como capazes de transformar a matemática numa ciência de loucos. No entanto, essa reação foi passageira, pois a “teoria do infinito” de Cantor se firmou e as soluções de Dedekind e dele próprio, dadas ao problema do infinito e do contínuo, chegaram a alcançar uma pacífica aceitação. Tanto foi assim que em 1901, Bertrand Russell dizia:

> Zenão se refere a três problemas... do infinitesimal, do infinito e do contínuo. Desde sua época à nossa, os melhores talentos da matemática de cada geração têm atacado esses problemas, porém, falando em termos gerais, sem sucesso... Dedekind, Weierstrass e Cantor os resolveram completamente. Suas soluções são tão claras que não deixam lugar à menor dúvida. Esta conquista é, provavelmente, a mais importante de que se tem ideia até a nossa época.... O problema do infinitesimal foi resolvido por Weierstrass, a solução dos outros dois foi

> começada por Dedekind e, definitivamente, terminada por Cantor. (BOYER, 1974)

Decorrido muito pouco tempo dessa discussão, constata-se, que, infelizmente, já não se pode falar com muito entusiasmo de B. Russell, porque a matemática contemporânea está novamente em "crise", parecendo que a natureza da mesma seja, ainda como na Grécia antiga, a incompleta solução dos três problemas referidos. H. Poincaré, ainda sobre a teoria dos conjuntos de Cantor, admitiu ter encontrado certos paradoxos, certas aparentes contradições, daquelas que fizeram as delícias de Zenão. Realmente, nesse século (XX), a definição de corte, dos números irracionais e, como consequência, a continuidade de Dedekind, parecem ter alcançado uma fase de superação. Weill critica a definição de número irracional dizendo que ela está baseada em um ciclo vicioso, considerando, apenas, o aspecto numerável. Contra Weill e Brouwer, seguidores de Kroneker, foram usadas a autoridade dos logicistas, como Hilbert (seguidor de Peano), dividindo as opiniões nesse século em duas ideias antagônicas. Nos últimos anos mais se acirraram as divergências, permanecendo as questões em aberto.(BOYER, 1974 p. 440-445).

3.4 O infinito e os processos infinitos

Existem muitos processos finitos e infinitos que podem ser trabalhados na educação básica. Os mais interessantes são aqueles que utilizam a noção de infinito potencial. Nesse capítulo, mostraremos alguns deles que representam proceitos matemáticos conhecidos e usados por todos os estudantes da educação básica, como o caso do número π, por exemplo.

3.4.1 Método de Exaustão de Eudoxo

Consta que Antífon teria antecipado a ideia de que, por sucessivas duplicações do número de lados de um polígono regular inscrito em um círculo, a diferença entre o círculo e o polígono por fim terminaria. Mesmo muito contestada, esta abordagem apresentava o início do método de exaustão. O método de exaustão foi uma resposta da escola platônica aos paradoxos de Zenão e foi desenvolvido por Eudoxo. Este método consiste em admitir que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente.

De todos os matemáticos da antiguidade, quem melhor aproveitou este conceito em seus trabalhos foi Arquimedes. Em suas abordagens de áreas e volumes ele chegou a resultados muito próximos a algumas integrais definidas hoje, as quais estão presentes nos vários livros de cálculo (EVES, 2008 p.418).

3.4.2 O Método do Equilíbrio de Arquimedes

O método de exaustão é rigoroso, mas extremamente trabalhoso. Parte do princípio de que, conhecida a fórmula, o método de exaustão é o caminho para prová-la.

No livro "O método", descoberto em 1906, tratado escrito por Arquimedes, mostra que, para determinar a área ou o volume, deve-se cortar a região correspondente num número muito grande de tiras planas ou fatias paralelas finas e (mentalmente) pendurar esses pedaços numa das alavancas dadas, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume e centróide conhecidos. Por este método, Arquimedes descobriu a fórmula do volume da esfera. (EVES, 2008 p.422).

3.4.3 A soma limite

Uma série infinita é uma soma de infinitas parcelas de uma sequência de termos, em geral números reais, indicada por:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + ...$, ou, abreviadamente, por $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Chama-se a série determinada pela sequência (a_n) , a sequência (s_n), onde:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
....
$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$
....

Os números $a_1, a_2, a_3, ...$ são chamados os termos da série e os $s_1, s_2, s_3, ..., s_n, ...$ são suas somas parciais ou reduzidas.

Uma série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ se diz convergente se a sequência (s_n) de suas reduzidas converge para algum $s \in \mathbb{R}$. Nesse caso, o número s é chamado a soma da série e escreve-se: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$.

Uma série infinita do tipo $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots$, onde a e q são números reais dados ($q \neq 0$), chama-se série geométrica. Assim sendo, se $-1 < q < 1$, então, a série geométrica de infinitos termos $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge qualquer que seja a sequência geométrica a_n e a sua soma s é dada por: $s = \frac{a}{1 - q}$ (DOMINGUES, H., 1991 p. 256-257).

3.4.4 O limite de $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Se x representa a medida de um arco em radiano, então, a expressão $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ está definida para todo x, exceto para x = 0. Sabemos que o ângulo subtendido y está relacionado com o arco x, pela relação $x = \frac{\pi}{180} \cdot y = 0{,}01745\ y$, com cinco casas decimais de aproximação, conforme mostra o quadro 2. Portanto:

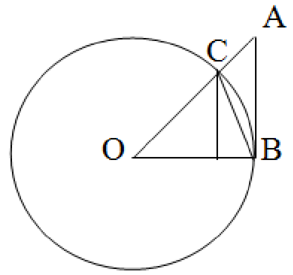
Quadro 2: A noção de aproximação do limite

Y	X	sen x	$\frac{\text{sen } x}{x}$
10º	0,17451	0,17360	0,99482
...	...	...	...
5º	0,08725	0,08714	0,99872
...	...	...	...
2º	0,03493	0,03491	1,00000
1º	0,01750	0,01750	1,00000

Fonte: COURANT, ROBBINS, 2000 p. 354

Considerando o ciclo trigonométrico de raio igual a 1 e sendo x, em radianos, a medida do arco que subtende o ângulo BOC, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Observando a figura 5 a seguir:

Figura 4: Um começo para o valor limite



Fonte: COURANT, ROBBINS, 2000 p. 355

Temos, portanto, $\text{sen } x < x < \text{tg } x$ Dividindo tudo por sen x, que é positivo nesse intervalo, temos: $1 < \dfrac{x}{\text{sen } x} < \dfrac{1}{\cos x}$, ou ainda : $\cos x < \dfrac{\text{sen } x}{x} < 1$

Mas, $1 - \cos x = (1 - \cos x) \cdot \dfrac{(1 + \cos x)}{1 + \cos x} = \dfrac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \dfrac{\text{sen}^2 x}{1 + \cos x} < \text{sen}^2 x < x^2$

Ou seja, $1 - \cos x < x^2$. Ou ainda, $1 - x^2 < \cos x$. Logo:

$1 - x^2 < \dfrac{\text{sen } x}{x} < 1$. Fazendo $x \longrightarrow 0$, tem-se que $\dfrac{\text{sen } x}{x} \longrightarrow 1$.

É importante introduzir, no conteúdo em sala de aula, a noção de tendência e a do limite (fig. 4).

3.4.5 A Medida, o Número Decimal e as Dízimas

Para se comparar duas grandezas de mesma natureza, escolhe-se uma delas como unidade de referência, ou seja, de medida, e associa-se, então, um número a cada uma. A razão entre os valores numéricos associados pode ser um número natural ou um número racional, por exemplo, um terço; um sexto; dois quintos etc. Entretanto, podem ocorrer situações como:

0,5 = 5/10; 0,001 = 1/1000; 0,666... = 2/3; 1,11090909 ... = 1222/1100 etc que são números decimais exatos ou não-exatos, podendo ser representado por fração, ou nenhuma das duas coisas, como em:

1,20220222022220... ; 0,153153315333153333 ..., dentre outros.

As reticências indicam que a quantidade de dígitos ou casas decimais, com repetição periódica de certos blocos, é infinita ou que o processo mantém o padrão de forma indefinida.

Mas isso pode nos levar a nenhuma razão das quantidades. Nem sempre é possível obtermos uma razão dos valores numéricos associados às quantidades referentes às grandezas, ou seja, a comensurabilidade entre elas. O que nos permite definir: duas grandezas são ditas comensuráveis se a razão entre os valores associados a cada uma delas puder ser expressa por um número racional. Do contrário, serão chamadas incomensuráveis, o que determina o conjunto dos números irracionais. O número 2/3 é comensurável com a unidade, porém isso não ocorre com o comprimento da diagonal do quadrado e o próprio lado do quadrado. Geometricamente falando, dois segmentos são comensuráveis se existir um terceiro segmento que caiba exatamente em cada um deles, o que será mais esclarecido e exemplificado no apêndice deste trabalho. Caso contrário, são ditos incomensuráveis. Os números que representam a incomensurabilidade são denominados irracionais.

De um modo geral, fazendo a comparação entre os segmentos, $\overline{AB}$ pode conter um número r, inteiro, de vezes o segmento CD, ou seja: $\overline{AB} = r\,\overline{CD}$. Ou pode resultar que não haja qualquer múltiplo inteiro de CD igual a $\overline{AB}$. Nesse caso, podemos dividir o segmento CD em, digamos, n segmentos iguais, cada um de comprimento $\overline{CD}/n$, de tal forma que algum múltiplo m inteiro desses novos segmentos, agora, seja igual ao segmento AB. Isto é:

$$\overline{AB} = \frac{m}{n}\,\overline{CD}\,.$$

Daí, podemos, dizer que todos os segmentos AB comensuráveis com o $\overline{CD}$ são dessa forma, para algumas escolhas de inteiros m e n ($n \neq 0$). Se escolhermos o $\overline{CD}$ como o segmento unitário, [0;1], então, os segmentos comensuráveis com ele, corresponderão a todos os pontos $\frac{m}{n}$ racionais, sobre a reta numerada, e que consistem nos números racionais.

3.4.6 Representação Decimal de Números Racionais

Os números racionais podem ser representados através da notação do sistema do decimal, como mostra o exemplo:

$235{,}143 = 2\cdot 10^{2} + 3\cdot 10^{1} + 5\cdot 10^{0} + 1\cdot 10^{-1} + 4\cdot 10^{-2} + 3\cdot 10^{-3}$, ou ainda:

$235{,}143 = 2\cdot 10^{2} + 3\cdot 10^{1} + 5\cdot 10^{0} + 1\cdot \frac{1}{10} + 4\cdot \frac{1}{10^{2}} + 3\cdot \frac{1}{10^{3}}$. Portanto:

$$235{,}143 = 2\cdot 10^{2} + 3\cdot 10^{1} + 5\cdot 10^{0} + 1\cdot \frac{1}{10} + 4\cdot \frac{1}{100} + 3\cdot \frac{1}{1000}\,.$$

Já o número racional: $0{,}143 = 0 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} + 3 \cdot \frac{1}{1000}$ e a dízima periódica:

$$0{,}333\ldots = 0 + 3 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{100} + 3 \cdot \frac{1}{1000} + \ldots = 0 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots .$$

Como sabemos, essas dízimas periódicas têm infinitas casas decimais, consistindo de uma soma infinita dos termos de uma sequência geométrica cuja soma converge para a soma

a soma limite: $\dfrac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \dfrac{1}{3}$ Ou seja: $0{,}333\ldots = \dfrac{1}{3}$.

De um modo geral, podemos representar um número racional q, qualquer, na forma: $q = m, m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_6 \ldots m_p \ldots$, para $m > 0$, com p algarismos e sendo p uma quantidade finita ou não. Ou seja:

$q = m + \frac{m_1}{10} + \frac{m_2}{100} + \frac{m_3}{1000} + \frac{m_4}{10000} + \frac{m_5}{100000} + \frac{m_6}{1000000} + \ldots + \frac{m_p}{10^p} \ldots$ e para $m < 0$, como:

$q = -(-m + \frac{m_1}{10} + \frac{m_2}{100} + \frac{m_3}{1000} + \frac{m_4}{10000} + \frac{m_5}{100000} + \frac{m_6}{1000000} + \ldots + \frac{m_p}{10^p} \ldots)$. Ou seja, podemos representar o racional: $\frac{m}{n} = a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_p \ldots$, onde os a_i, com $0 \le i \le p$, são algarismos da expansão decimal, e usar a notação acima. Por outro lado, os números que não sejam racionais também podem ser representados nessa notação decimal. Ou seja, se α é um número não racional positivo, podemos representá-lo, também, por uma expansão decimal como acima. Isto é:

$\alpha = m, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_k \ldots$, com a_i algarismos da expansão decimal de α, com $1 \le i \le k$.

Com efeito, considere $[\alpha] = m$ (o maior inteiro). Com $m \le \alpha < m + 1$. Se $\alpha = m$, então o próprio m é a representação procurada. Agora, se $m < \alpha < m+1$, considere o maior dos números:

$m,\ m + \frac{1}{10},\ m + \frac{2}{10}, \ldots,\ m + \frac{9}{10}$ que não supere α. Se $m + \frac{a_1}{10}$ é esse número, então:

$\alpha_1 = m + \frac{a_1}{10} \le \alpha < m + \frac{a_1 + 1}{10} = \alpha_1'$ Se $\alpha = \alpha_1$, então, $\alpha = m, a_1$, encerrando a

demonstração.

Caso contrário, repete-se o raciocínio anterior, tomando-se o maior dos

números:

$m + \frac{a_1}{10}$, $m + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{100}$, ..., $m + \frac{a_1}{10} + \frac{9}{100}$ que não supere α. Se $m + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100}$ é esse

número, então: $\alpha_2 = m + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} \leq \alpha < m + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{100} = \alpha_2'$. Se $\alpha = \alpha_2$, então:

$\alpha = m, a_1 a_2$. Portanto, não tendo mais a fazer. Do contrário, repete-se o mesmo

procedimento até que, para algum r, tenhamos: $\alpha = m, a_1 a_2 \ldots a_n$, concluindo a prova.

Notadamente, os raciocínios servem, de um modo geral, para os reais. Entendo que um número real é aquele que pode ser representado dessa forma.

Ainda no caso dos números irracionais, um raciocínio por absurdo apareceu, originalmente, na demonstração da irracionalidade de números como: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ até a $\sqrt{17}$ relatado por Platão no diálogo *teaetetus*. Aristóteles, em sua metafísica, propôs uma demonstração da irracionalidade da $\sqrt{2}$, mostrada no apêndice desse trabalho.

3.4.7 As aproximações sucessivas da raiz quadrada – algoritmo de Heron

Seja $a > 0$. Define-se uma sequência (x_n), tomando $x_1 = c > 0$ arbitrariamente e pondo:

$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$. Essa sequência converge para a $\sqrt{a}$. Ou seja, existe $b > 0$ tal que,

$b = \frac{1}{2}(b + \frac{a}{b})$, com $x_{n+1} \to b \leftarrow x_n$ e x_{n+1} subsequência de x_n, pois, se a sequência converge, suas subsequências convergem para o mesmo limite (um resultado da análise real bem conhecido). Logo: $b = \frac{a}{b}$ *ou* $b^2 = a$, dai: $b = \sqrt{a}$, pois $a > 0$. Assim, podemos calcular de modo aproximado o valor $\sqrt{2}$. Esse processo determina uma sequência de valores cada vez mais próximos desse valor e uma sequência de intervalos de comprimentos decrescentes, ou seja, de comprimentos cada vez menores, que tendem a conter o verdadeiro valor da raiz quadrada de a. Ou seja, esses intervalos vão se deslocando até conter o verdadeiro valor da $\sqrt{a}$.

Com efeito, considere a aproximação, por exemplo, $x_1 = 1,5$. Portanto, fazendo as iterações necessárias, temos: $x_{1+1} = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{a}{x_1})$, ou seja: $x_2 = \frac{1}{2}(1,5 + \frac{2}{1,5}) = 1,416666 \ldots$.

Agora , considere o intervalo: [1,416667 ; 1,5]. Calculando o próximo termo, temos:

$x_3 = \frac{1}{2}(1,416667 + \frac{2}{1,416667}) = 1,414215686 \ldots$. Considere [1,414215686 ; 1,416667].

Calculando o próximo termo, temos:

$$x_4 = \frac{1}{2}(1,414215686 + \frac{2}{1,414215686}) = 1,414213562374\ldots \ .$$

Considere [1,414213562374 ; 1,414215686]. E o próximo termo é:

$$x_5 = \frac{1}{2}(1,414213562374 + \frac{2}{1,414213562374}) = 1,414213562373\ldots$$

Considere o intervalo [1,414213562373 ; 1,414213562374].

As próximas iterações irão se repetir. Portanto, com aproximação de nove casas decimais, temos: $\sqrt{2} = 1,414213562\ldots$.

O seu valor mais aproximado é: 1,4142135623730950488016887242097 ... , com 31 casas decimais.

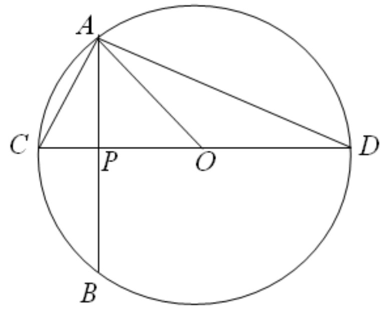
Os processos iterativos devem ser incentivados na sala de aula, principalmente no ensino médio. É mais uma noção que deve ser abordada nos planejamentos desse segmento de ensino que contribuirá para o progresso do ensino da matemática, reduzindo os obstáculos apontados nas pesquisas de nossa revisão bibliográfica, bem como aquelas citadas na nossa fundamentação teórica.

3.4.8 O cálculo de π - método dos polígonos

Os matemáticos antigos, até o século XVI (e, portanto, antes da invenção do Cálculo), tentaram obter valores de π usando polígonos regulares inscritos na circunferência com número de lados cada vez maior. Vamos mostrar como faziam isso. A ideia era tomar um polígono pequeno e ir dobrando o número de lados.

Na figura a seguir, l_n = AB é o lado do polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência de raio igual a 1. Se C é o ponto médio do arco AB, então, AC = l_{2n} é o lado do polígono regular de 2n lados inscrito na mesma circunferência (fig. 5).

Figura 5: Lados de polígonos regulares



Fonte: COURANT, ROBBINS, 2000 p. 146

3.4.9 Determinação do lado do polígono regular de 2n lados a partir do polígono de n lados.

De todos os polígonos regulares, o hexágono é o mais simples de construir. Começa-se com um círculo de raio r; o comprimento do lado de um hexágono regular inscrito nesse círculo é igual a *r*. Ele pode ser construído marcando-se, sucessivamente, cordas de comprimento igual a *r*, a partir de qualquer ponto do círculo.

A partir do n-ágono (polígono de n lados), podemos obter o 2n-ágono dividindo-se ao meio o arco subtendido sobre o círculo circunscrito a cada lado do n-ágono.

Se l_n representa o lado do n-ágono inscrito no círculo unitário, então, o lado do 2n-ágono, l_{2n} tem comprimento igual a

$$l_{2n} = \sqrt{2-\sqrt{4-l_n^{\,2}}}$$

Isto pode ser provado do seguinte modo (considerando, agora, a circunferência circunscrita de raio igual a 2): Observando a figura, l_n = AB = 2AP A área do triângulo retângulo ACD é dada por:

$\frac{1}{2}\,\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}$ e por $\frac{1}{2}\,\mathrm{BD}\cdot\mathrm{AD}$. Como $\mathrm{AD}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-DB^2}$, encontramos substituindo:

AB = 2, BD = l_{2n}, CD = $\frac{1}{2}\,l_n$ e igualando as duas expressões para a área, temos:

$l^2_n = l^2_{2n}(4 - l^2_{2n})$. Resolvendo essa equação do segundo grau para l_{2n}, encontramos a expressão acima, finalizando a prova.

A partir dessa fórmula e do fato que $l_4 = \sqrt{2}$, temos que:

$$l_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$l_{16} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$l_{32} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$ e, assim por diante.

De um modo geral, para $n > 2$, tem-se:

$$l_{2n} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}$$, com $n-1$ raízes quadradas aninhadas.

Note que o comprimento da circunferência do $2n$-ágono inscrito no círculo é $2^n \cdot l_{2n}$, a medida que n tenda para o infinito e $2^n \cdot l_2$ aproxima-se do comprimento da circunferência do círculo unitário, que é, por definição, 2π. Ou seja, fazendo $m = n-1$, com $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$ e simplificando o fator 2, temos a forma limite para π (COURANT, R , ROBBINS, H., 2000 p. 145-147).

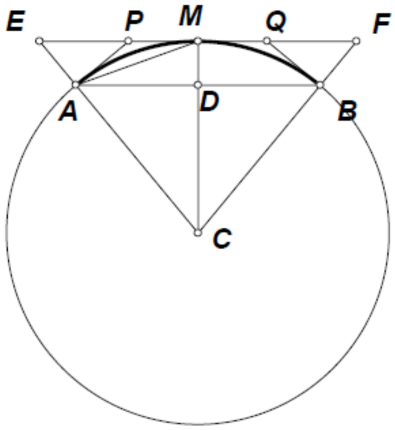
A ideia do aninhamento que aqui aparece também é vista nos intervalos encaixantes e nas frações contínuas, dentre outras situações. É uma noção relacionada com a ideia de composição, muito comum na matemática. É mais uma noção que deve constar nos planejamentos da nossa educação básica.

3.4.10 O cálculo aproximado da área do círculo de raio unitário

Sendo dados os lados de um polígono regular inscrito e de um polígono semelhante circunscrito, achar as superfícies dos polígonos regulares inscrito e circunscrito de um número de lados duplo (fig. 6).

Sendo AB (figura abaixo) o lado do dado inscrito, e EF, tangente em M e paralela a AB, o lado do polígono semelhante circunscrito. Seja C o centro do círculo. Se tirarmos a corda AM e as tangentes AP, BQ a corda AM será lado do polígono inscrito de um número de lados duplo, e PQ, dobro de PM, será o lado do polígono semelhante circunscrito (Proposição 6). Isto posto, como a mesma construção terá lugar nos diferentes ângulos iguais a ACM, basta considerar somente o ângulo ACM, e os triângulos nele contidos estarão entre si como os polígonos inteiros.

Figura 6: Lados dos polígonos inscrito e circunscrito.



Fonte: LEGENDRE livro IV p. 13

Seja A a superfície do polígono inscrito, do qual AB é um lado, B a superfície do polígono semelhante circunscrito; A' a superfície do polígono que tem por lado AM, B' a superfície do polígono semelhante circunscrito; A e B são conhecidos, trata-se de achar A' e B'. (Apresentaremos, aqui, os resultados sem demonstrações).

Com efeito:

$$A' = \sqrt{A \times B}$$

$$B' = \frac{2 \cdot A \times B}{A + A'}$$

Agora, basta calcular a razão da circunferência para o diâmetro. Considerando o círculo de raio igual a 1, o lado do quadrado inscrito será $\sqrt{2}$; o do quadrado circunscrito é igual ao diâmetro 2, logo a superfície do quadrado inscrito é igual a 2, e a do quadrado circunscrito é igual a 4. Se fizermos agora A = 2 e B = 4, acharemos pelas relações precedentes, o octógono inscrito A' = $\sqrt{8}$ = 2,8284271, e do octógono circunscrito B' = $\frac{16}{2+\sqrt{8}}$ = 3,3137085.

Conhecendo assim os octógonos inscrito e circunscrito, acharemos, por meio deles, os polígonos de número de lados duplo e, para isso, deveremos supor, agora:

A = 2,8284271, B = 3,3137085, e teremos A' = 3,1825979 e B' = 3,1825979.

Depois estes polígonos de 16 lados servirão para conhecer os de 32, e continuaremos assim até que o cálculo não dê mais diferença entre os polígonos inscrito e circunscrito, ao menos na casa de decimais em que paramos, que é a sétima neste exemplo. Chegado a esse ponto, concluiremos que o círculo é igual ao último resultado, porque o círculo deve sempre estar compreendido entre o polígono inscrito e o polígono circunscrito; logo, se estes não diferirem entre si até certa ordem de casas decimais, o círculo também não há de diferir até a mesma ordem.

Quadro 3: Cálculo desses polígonos até a sétima casa decimal.

Número de lados	Polígono inscrito	Polígono circunscrito
4 . . .	2,0000000 . . .	4,0000000
8 . . .	2,8284271 . . .	3,3137085
16 . . .	3,0614674 . . .	3,1825979
32 . . .	3,1214451 . . .	3,1517249
64 . . .	3,1365485 . . .	3,1441184
128 . . .	3,1403311 . . .	3,1422236
256 . . .	3,1412772 . . .	3,1417504
512 . . .	3,1415138 . . .	3,1416321
1024 . . .	3,1415729 . . .	3,1416025
2048 . . .	3,1415877 . . .	3,1415951
4096 . . .	3,1415914 . . .	3,1415933
8192 . . .	3,1415923 . . .	3,1415928
16384 . . .	3,1415925 . . .	3,1415927
32768 . . .	3,1415926 . . .	3,1415926
...	...	...

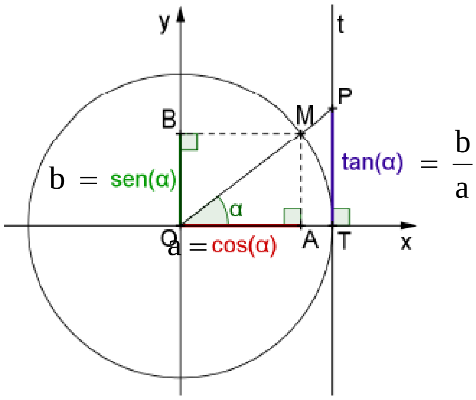
Fonte: LEGENDRE, LIVRO IV p. 14

Donde concluímos que a superfície do círculo de raio igual a 1 é 3,1415926.

3.4.11 A divisão por zero

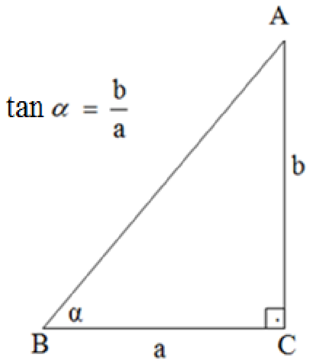
O caso da divisão por zero é visto, por alguns autores, como algo que não está definido e, portanto, não será abordado aqui exaustivamente. Porém, é natural acontecer que quantidades do tipo permaneçam indefinidas, como no caso da tg 90°. No modelo das funções trigonométricas no círculo unitário, o seno é definido como o valor de y (= b) e o cosseno, como o valor de x (= a) (fig. 7A). Portanto, a tangente (tan) é igual a $\frac{y}{x}$ (fig 7B). Quando a medida do ângulo α é 90º, tem-se y = 1 e x = 0. Portanto, $\frac{y}{x} = \frac{1}{0}$ e valor $\frac{1}{0} \cong \tan 90°$.

Figura 7A: A tangente no ciclo trigonométrico



Fonte: SEE-SP Material do Professor 1ª Série EM Vol III p. 38

Figura 7B: Representação do triângulo retângulo ABC



Fonte.: O autor

3.4.12 O cálculo de π pelo método do produto infinito

Um outro processo infinito que pode ser apresentado na educação básica é o da obtenção de uma expressão de um produto de infinitos termos, cujos produtos parciais se aproximam do número $\frac{\pi}{2}$. Ou seja:

$$\left\{\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right\} \to \frac{\pi}{2}$$ à medida que $n \to \infty$.   Daí, temos:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ \ldots\ .$$

Que multiplicada por 2, tem-se o número π. Essa expressão é denominada produto infinito e foi descoberta pelo matemático inglês John Wallis (1616–1703) (COURANT, R , ROBBINS, H., 2000 p. 346).

3.4.13 O número *e* (neperiano)

Quando se estuda o crescimento de uma população, seja de seres humanos, seja de animais, consideram-se as taxas porcentuais de crescimento ou decrescimento. Considerando uma população com, inicialmente, N_0 elementos.

Se o ano fosse dividido em 100 partes iguais, com o crescimento de 100% ao ano distribuído ao longo delas, sendo de 1% em cada uma, a população, ao final do ano, seria igual a:

$$N = N_0 \cdot (1 + \frac{1}{100})^{100}$$

Portanto, se imaginarmos o crescimento de 100% ao ano distribuído uniformemente ao longo do ano, subdividido em n partes, então o valor de N ao final do ano será:

$$N = N_0 \cdot (1 + \frac{1}{n})^{n}$$

É interessante observar o valor da expressão $(1 + \frac{1}{n})^{n}$ para quando n cresce indefinidamente. Ou seja: $n \rightarrow \infty$. Com efeito, no quadro 4, mostramos alguns resultados para um dado n:

Quadro 4: Sequência de valores convergindo para o valor limite *e*.

Para $n = 100$;	$(1+\frac{1}{100})^{100} = 2{,}704813829...$
$n = 365$;	$(1+\frac{1}{365})^{365} = 2{,}714587485...$
$n = 1000$;	$(1+\frac{1}{1000})^{1000} = 2{,}716923932...$
$n = 3000$;	$(1+\frac{1}{3000})^{3000} = 2{,}717828893...$
$n = 10\ 000$;	$(1+\frac{1}{10000})^{10000} = 2{,}718145927...$
$n = 100\ 000$;	$(1+\frac{1}{100000})^{100000} = 2{,}718268237...$
$n = 1\ 000\ 000$;	$(1+\frac{1}{1000000})^{1000000} = 2{,}718280469...$
$n = 10\ 000\ 000$;	$(1+\frac{1}{10000000})^{100000000} = 2{,}718281693...$

n = 100 000 000;	$(1+\frac{1}{100000000})^{100000000} = 2{,}718281815...$
. . .	. . .

Fonte: SEE-SP, 2009 Material do Professor 1ª Série EM Vol III p. 38

Dizendo de outra maneira: quanto maior é o valor de n, mais o valor da expressão $(1+\frac{1}{n})^{n}$ se aproxima do número 2,7182818... . Este número é representado pela letra e, e escrevemos: $e \cong 2,7182818$.

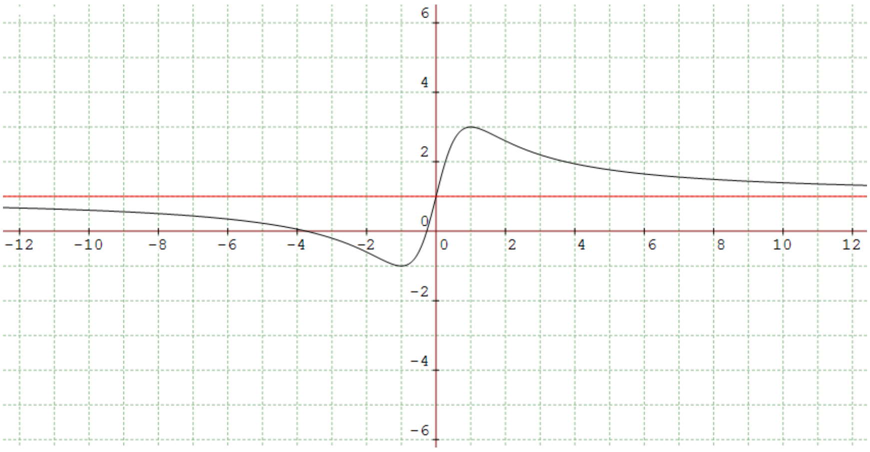
Aqui é mais uma oportunidade para trabalhar as noções relacionadas com o conceito de infinito. Nesse caso, as ideias de aproximação, tendência, iteração, de limite e, principalmente, de infinito.

3.4.14 O comportamento Assintótico – Assíntotas

Seja f uma função. Se existir uma reta y = m x + n tal que $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (m x + n)]$ então, diremos que y = m x + n é uma assíntota para f. Se m = 0, teremos uma assíntota horizontal (fig. 8A), e se $m \neq 0$, uma assíntota oblíqua (fig. 8B).

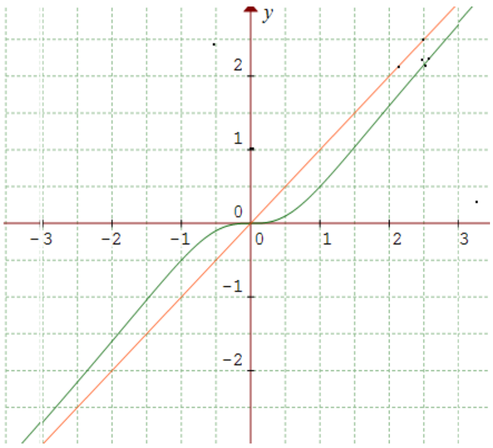
Se f for da forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, com p e q polinômios, f admitirá assíntota se o grau p – grau q for menor ou igual a 1. Se grau de p - grau de q for 1 ou 0, para determinar a assíntota basta extrair os inteiros. Se o grau de p - o grau de q for estritamente menor que 0, o grau de g for estritamente , então, y = 0 é uma assíntota.

Figura 8A: Gráfico de uma curva com assíntota horizontal



Fonte: O autor

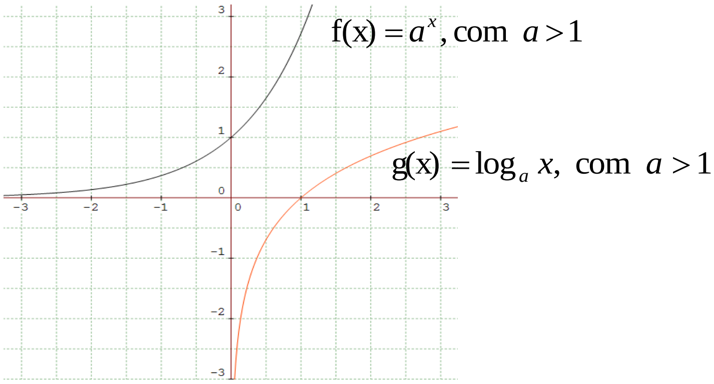
Figura 8B: Gráfico de uma curva com assíntota inclinada



Fonte: O autor

É importante o comportamento assintótico nos gráficos da função exponencial $f(x) = a^x$, com $0 < a \neq 1$ (assíntota ao eixo horizontal) e da função logarítmica $g(x) = \log_a x$, com $a > 0$ (assíntota ao eixo vertical) (fig. 9). No comportamento assintótico, há uma relação com a noção de infinito que a noção de se aproximar cada vez mais, o que deveria ser mais explorada no ensino médio. Além do mais, são comportamentos característicos dessas funções. Em geral, esse tipo de comportamento específico diferencia os modelos matemáticos na sua aplicação.

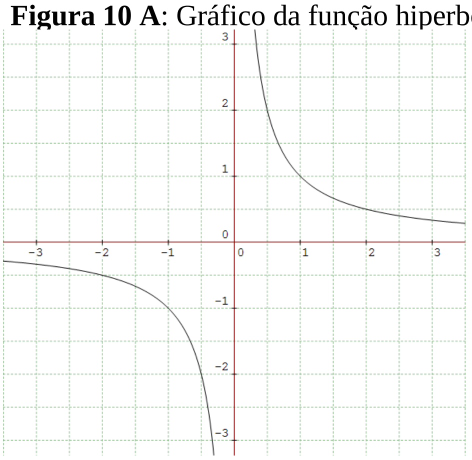
Figura 9: Gráficos de funções exponencial e logarítmica



Fonte: O autor

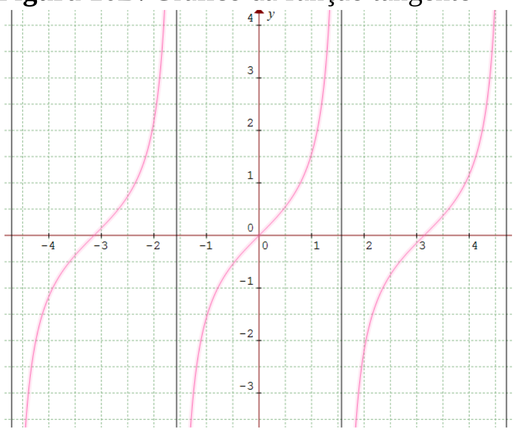
Já as funções racionais do tipo: $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, com $p(x)$ e $q(x) \neq 0$, polinômios, como a função hiperbólica $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, cujo gráfico tem comportamento assintótico nos dois eixos coordenados x e y (fig. 10A), e de algumas funções trigonométricas, como a função tangente, dentre outras (fig. 10B).

Figura 10 A: Gráfico da função hiperbólica



Fonte: O autor

Figura 10B: Gráfico da função tangente



Fonte: O autor

Apresentamos uma série de processos e, em alguns deles, com procedimentos distintos, que manipulam noções básicas do cálculo e noções que estão relacionadas com essas noções, com o objetivo de criar conceitos, ao mesmo tempo que possibilitamos o entendimento e a aprendizagem por parte dos alunos através desse processo e que pode ser trabalhado na educação básica. Em cada um deles, é necessário que haja uma problematização sobre a atividade proposta no sentido de direcionar as ações para que aconteça a interiorização, a acomodação dessas noções visando à encapsulação do processo ou a sua reificação, com finalidade de criar proceitos na matemática. Essa é uma das dinâmicas que promove aprendizagem (SFARD, 1991).

CAPÍTULO 4

4.1 A análise dos Livros Didáticos

Em 2004, por meio da Secretaria de Educação Básica, o Governo Federal lançou o Programa Nacional do Livro do Ensino Médio (PNLEM) para os componentes curriculares de Língua Portuguesa e Matemática. Por meio dele, livros didáticos passaram a ser distribuídos, gratuitamente, a partir do ano subsequente para os alunos da rede pública nacional.

Este programa tem como um dos objetivos que, nesse livro didático, as informações venham de forma estruturada; que os conhecimentos específicos; as competências, as habilidades e os valores que serão transmitidos pelos professores às novas gerações sejam contemplados.

Dessa forma, esse material pedagógico vem se tornando uma ferramenta indispensável no processo ensino-aprendizagem e deve oferecer ao professor orientação para seu trabalho docente, não como único mecanismo do processo ensino-aprendizagem, mas como uma importante ferramenta, pois, entende-se que os conhecimentos obtidos pelo professor durante sua formação escolar ou durante sua atuação profissional compõem grande parte do material de ensino que os educadores utilizam em sua sala de aula.

No processo de escolha dos livros didáticos pelo PNLEM, o universo dos livros didáticos é disponibilizado por diversas editoras no país. Assim sendo, saber escolher um bom livro ajuda na busca do sucesso da prática docente. Uma primeira análise é feita por uma equipe do próprio MEC. A partir dos resultados dessa análise, os livros didáticos aprovados são encaminhados para a escola para que o professor faça uma nova escolha.

Como material orientador, os professores recebem o Catálogo do Programa Nacional do Livro do Ensino Médio (BRASIL, 2004). Nele encontramos as seguintes diretrizes que indicam o que o livro didático deve almejar:

(i) Favorecer a ampliação dos conhecimentos adquiridos ao longo do ensino fundamental;

(ii) Oferecer informações capazes de contribuir para a inserção dos alunos no mercado de trabalho, o que implica a capacidade de buscar novos conhecimentos de forma autônoma e reflexiva, bem como possibilitar que eles possam dar continuidade nos seus estudos, com qualidade e aprofundamento; e

(iii) Oferecer informações atualizadas, de forma a apoiar a formação continuada dos professores, na maioria das vezes impossibilitados, pela demanda de trabalho, de atualizar-se em sua área específica (BRASIL, 2007, Pág. 17).

Os livros didáticos que selecionamos para nossa análise foram aprovados pelo PNLDEM e distribuídos em escolas brasileiras. As duas coleções estão entre as utilizadas em escolas públicas do Rio de Janeiro, inclusive nas instituições nas quais atuamos. Estas são as principais razões que nos levaram a selecioná-las para esta etapa de nossa pesquisa. Para essa análise, optamos por fazer uma adaptação resumida dos itens utilizados pelos analistas/pareceristas do MEC para a aprovação de cada um desses materiais. Assim, selecionamos e adaptamos os seguintes itens, que consideramos serem suficientes para nossa análise a respeito da verificação de como estão sendo desenvolvidas as noções relacionadas com o conceito de infinito e do próprio infinito nessas obras:

1) Se faz uma atividade de motivação no início do trabalho com o tema para que os alunos explicitem suas ideias prévias, relacionadas com o infinito.
2) Se os conceitos aparecem como consequência de uma atividade de familiarização perceptível, de forma declarativa e não processual, ou seja, se não é possível identificar uma visão da construção do conceito, partindo do processo para o conceito.
3) Se existem conceitos que são definidos a partir de outros conceitos que guardam alguma relação com o conceito de infinito.
4) Se aproveitam os aspectos históricos como componentes do processo de construção do conceito ou do próprio processo.

Observaremos se, no primeiro do ensino médio, os autores abordam conceitos relevantes para a continuidade do ensino em relação aos processos infinitos, já que estamos tratando de uma educação básica. Em relação à matemática, o objetivo é atender aqueles cursos que trabalham com algumas noções do cálculo, uma vez que o conceito de infinito é imprescindível em qualquer um deles. Entendemos, portanto, que todos devem ter a oportunidade de aprender as noções relacionadas com os conceitos do cálculo como limite, continuidade, taxa de variação, dentre outras noções usadas para lhes dar significado.

Consideramos que as noções de indução, aproximar, convergir, tendência, monotonicidade, cota inferior, cota superior, conjuntos limitados, conjuntos fechados, conjuntos abertos, ínfimo, supremo, processos iterativos, continuidade, limite etc são algumas dessas noções que podem ser trabalhadas na educação básica e que favorecem os conceitos relacionados com o cálculo e o próprio cálculo. Buscaremos identificar a abordagem e a metodologia usadas, com base nas sugestões da nossa pesquisa. Proporemos, na ausência dessas noções, um trabalho que resulte num maior embasamento dos nossos estudantes de curso superior. Acreditamos que devemos cuidar do que temos e atender, dentro do possível, a todos ou, no mínimo, a quem possa interessar. É o nosso dever de educador!

4.1.1 A análise do livro: Matemática: Contexto e Aplicações , Luiz Roberto Dante, Vol. 1 1ª Edição, Código: 25116COL02 Editora Ática São Paulo SP, 2011.

Logo nas primeiras páginas, o autor afirma que o objetivo da obra é criar condições para que o aluno que inicia o ensino médio possa compreender as ideias básicas da Matemática, atribuindo significado a elas, além de compreender como aplicá-las na resolução de problemas do mundo real. Afirma que todos os conceitos próprios do ensino médio na matemática foram explorados de forma intuitiva e compreensível e que as receitas prontas e o formalismo foram evitados, porém mantendo-se o rigor e o nível.

A coleção apresenta a seção “Matemática e as práticas sociais”, a qual leva o aluno a formular, resolver e interpretar situações-problema que exigem a participação consciente do cidadão na sociedade. Além disso, cada capítulo contém uma seção de atividades adicionais com questões de vestibulares de todas as regiões do Brasil e engloba todos os assuntos que costumeiramente são trabalhados no ensino médio, além de auxiliar os alunos em sua preparação para os processos seletivos de ingresso nos cursos da educação superior.

Sobre a abordagem do infinito verificamos que, logo no início da produção, o autor faz uma revisão de produtos notáveis e fatoração (p. 1-17). No capítulo seguinte, ele dá início ao que poderia ser uma teoria para se trabalhar conjuntos: apresenta uma introdução histórica, comentando sobre o trabalho com os números naturais e as frações. Em seguida, analisa a grande crise da irracionalidade, o número de ouro dos gregos, culminando com a teoria dos conjuntos de George Cantor, no século XIX. Mostra alguns elementos da natureza em que se observa a presença do número de ouro, como, por exemplo, a sequência de Fibonacci, concha de um Nautilus, dando origem à curva de Nautilus. Na construção dessa curva, observamos uma primeira relação com um processo infinito, mas nada foi comentado.

No capítulo1, é feita uma introdução como subtítulo 1. Nessa introdução, é apresentada uma situação-problema referente a uma pesquisa de opinião sobre modalidades esportivas. A seguir, introduz-se a noção de conjunto como uma coleção de objetos. A questão é a garantia da existência do conjunto para que se possa iniciar uma teoria (p. 20). Entretanto, os conjuntos são representados por especificação, extensão e diagramas, sem qualquer formalidade. Mesmo como uma noção, entendemos que seria necessário informar a notação que será usada, a forma de representação ou discutir de onde se está partindo essa noção.

Observamos que algumas propriedades dos axiomas da teoria dos conjuntos são utilizadas sem especificar esses axiomas. Os conjuntos vazio e universo, por exemplo, são apenas citados e representados, sem discutir a existência ou não, o que seria necessário dentro de uma teoria dos conjuntos.

Destacamos que, a partir dos axiomas da teoria dos conjuntos, é possível discutir sobre essas existências e caracterizá-los (p. 10-11). É demonstrado que o conjunto está contido em todos os outros conjuntos (p. 11). É uma importante demonstração na teoria dos conjuntos. O importante conjunto das partes de um conjunto (p. 26) é citado e definido como o conjunto formado por todos os subconjuntos de um conjunto. É observada a sua cardinalidade, porém sem compará-la com a cardinalidade do próprio conjunto.

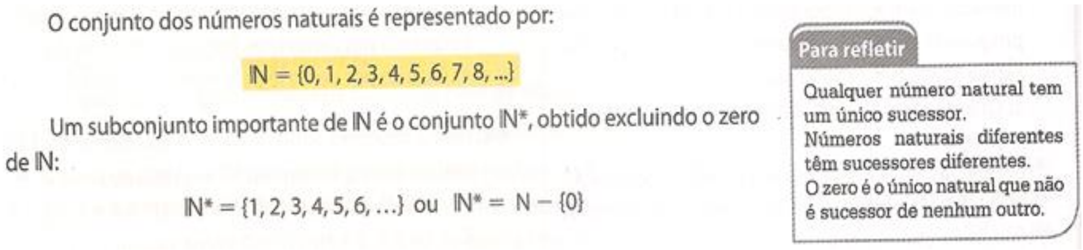
Essa comparação poderia permitir observar que, dado qualquer conjunto, o conjunto de suas partes tem mais elementos que ele. O que é bastante interessante no caso das cardinalidades dos conjuntos infinitos, mostrando que existe infinito maior que outro. Esse tópico ficaria bem explorado a partir de uma abordagem com base numa teoria dos conjuntos.

Nas operações com conjuntos, define-se inicialmente a diferença, depois a união, sem se importar com as condições em que podemos realizar tais operações. Ou seja, é possível fazer união de conjuntos (p. 29-33) ?

Consideramos que essa é uma discussão que poderia ser muito rica para o aluno, em termos da construção de uma teoria, bem como para o seu amadurecimento com as técnicas da matemática. Pelos axiomas da união e da especificação, essas operações seriam possíveis.

Na introdução do conjunto dos números naturais, é feita uma espécie de preparação para a conceituação, associando os números naturais à contagem de uma grandeza discreta. Os números naturais são apenas representados por extensão e citando algumas propriedades como, por exemplo, que a adição e a multiplicação são sempre possíveis em $\mathbb{N}$, todo natural tem um único sucessor e que naturais diferentes têm sucessores diferentes. Afirma-se categoricamente que, da não possibilidade de se realizar a operação subtração em $\mathbb{N}$, surge a necessidade dos números inteiros. Essas propriedades são colocadas fora do texto como um destaque, para a reflexão dos alunos, fazendo parte da proposta didático-metodológica do autor do livro, com o título “Para Refletir” (p. 36-41). Como mostram as ilustrações a seguir:

Figura 11: Representação dos números naturais



O conjunto dos números naturais é representado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$$

Um subconjunto importante de $\mathbb{N}$ é o conjunto $\mathbb{N}^*$, obtido excluindo o zero de $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\} \text{ ou } \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$$

Para refletir

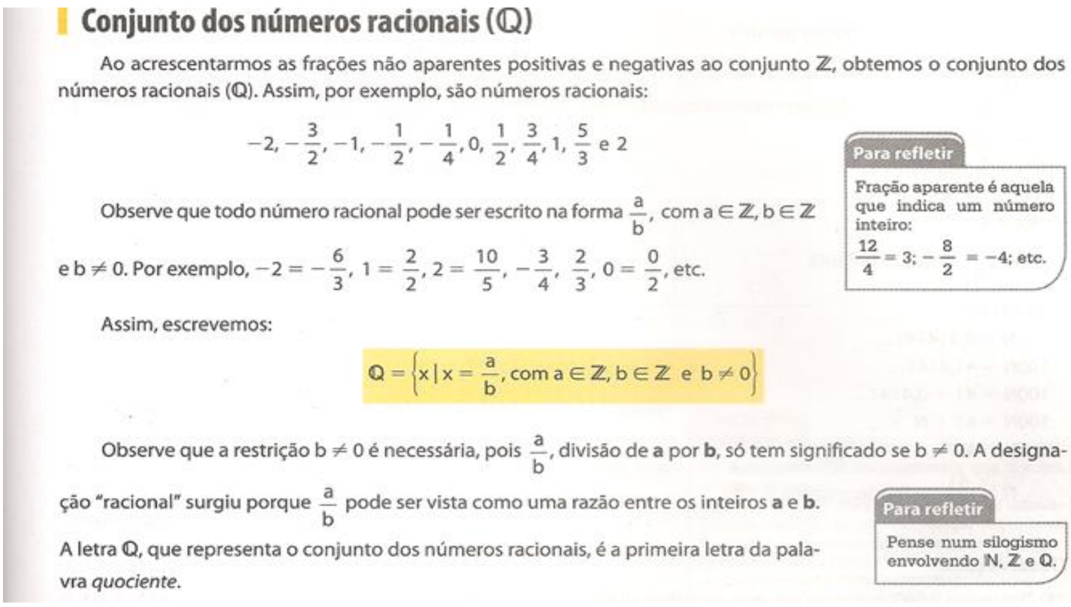
Qualquer número natural tem um único sucessor.
Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.
O zero é o único natural que não é sucessor de nenhum outro.

Fonte: DANTE, 2011 p.36

O axioma da especificação permite variadas formas de representação do conjunto, através de propriedades que caracterizam os seus elementos e que permitem identificá-los. Existem outras formas de representação como, por exemplo, por diagramas e por extensão: citando os seus elementos ou enumerando-os (fig. 11).

O Conjunto dos números racionais relativos é apresentado a partir dos números inteiros, destacando-se alguns de seus elementos (fig. 12). Mostra-se que uma fração pode representar um número inteiro no "Para refletir", finalizando com representação por especificação. Notadamente, é uma abordagem dos racionais, sem o contexto das medidas.

Figura 12: A representação do conjunto dos números racionais.



Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$)

Ao acrescentarmos as frações não aparentes positivas e negativas ao conjunto $\mathbb{Z}$, obtemos o conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$). Assim, por exemplo, são números racionais:

$$-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{3} \text{ e } 2$$

Observe que todo número racional pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Por exemplo, $-2 = -\frac{6}{3}$, $1 = \frac{2}{2}$, $2 = \frac{10}{5}$, $-\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $0 = \frac{0}{2}$, etc.

Assim, escrevemos:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b}, \text{com } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\right\}$$

Observe que a restrição $b \neq 0$ é necessária, pois $\frac{a}{b}$, divisão de **a** por **b**, só tem significado se $b \neq 0$. A designação "racional" surgiu porque $\frac{a}{b}$ pode ser vista como uma razão entre os inteiros **a** e **b**.

A letra $\mathbb{Q}$, que representa o conjunto dos números racionais, é a primeira letra da palavra *quociente*.

Para refletir

Fração aparente é aquela que indica um número inteiro:
$\frac{12}{4} = 3$; $-\frac{8}{2} = -4$; etc.

Para refletir

Pense num silogismo envolvendo $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

Fonte: DANTE, 2011 p.37

A obra apresenta o conjunto dos números irracionais como sendo o conjunto dos números não racionais, ou seja, o conjunto daqueles que não podem ser representados por fração. E, em seguida, dão-se alguns exemplos de alguns de seus elementos, como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π e seus respectivos valores aproximados, com uma construção para primeiras raízes quadradas do exemplo. No “Para Refletir”, comenta sobre a irracionalidade de π e sobre o seu cálculo através de computação. É uma boa oportunidade para relacionar π a processos infinitos ligados à geometria (p. 39).

Os números reais são apresentados como a união dos números racionais com os irracionais. Acreditamos que uma construção possível para esse conjunto, pelo menos, poderia ser comentada. A prática geral, utilizada na obra, é apresentar algumas propriedades do conjunto dos números reais, sem qualquer comentário referente a sua construção.

Consideramos que, nesse nível de ensino, cabe pelo menos um comentário sobre algumas possíveis construções para $\mathbb{R}$, já que discutimos noções que permitem o seu entendimento.

A obra apresenta os intervalos apenas como subconjuntos dos números reais, por especificação e representação na reta, sem qualquer discussão da sua existência ou não em $\mathbb{R}$ e, em seguida, trabalham-se com as operações com intervalos através de exercícios, sem defini-las.

É feito um trabalho com o plano cartesiano e o conceito de relação, relação binária, domínio e imagem de relações, diagrama de flechas, relação inversa; são apresentados problemas e atividades envolvendo medidas, gráficos, problemas envolvendo operações com conjuntos, intervalos e atividades envolvendo práticas sociais (p. 51-68).

Consideramos importante que se explore a noção de correspondência nos conjuntos finitos e infinitos como domínio, contradomínio e imagem, enfatizando a infinidade dos pontos do plano cartesiano, assim como as relações nos domínios discretos e contínuos, com os gráficos.

O conceito de relação, relação de ordem, de ordem total ou parcial, de classes de conjunto formadas a partir dessas relações, as definições das operações com os intervalos, a discussão da existência ou não dos intervalos como resultados dessas operações são ideias que possibilitam o manejo de noções relacionadas com o conceito de infinito que, como observamos antes, são noções utilizadas nos cursos relacionados com o cálculo ou a análise no curso superior. É diferente porque não é igual, a igualdade é uma relação importante e a partir dela, vem a diferença. Esse é um bom caminho. (fig. 13).

Figura 13: As coordenadas cartesianas

Coordenadas cartesianas

A notação (a, b) é usada para indicar o *par ordenado* de números reais **a** e **b**, no qual o número **a** é a primeira coordenada e o número **b** é a segunda coordenada. Observe que os pares ordenados (3, 4) e (4, 3) são diferentes, pois a primeira coordenada de (3, 4) é 3, enquanto a primeira coordenada de (4, 3) é 4.

Fonte: DANTE, 2011 p. 47

No estudo dos domínios das funções reais, existe a possibilidade de esse conjunto ser infinito como o próprio $\mathbb{R}$ ou qualquer um de seus subconjuntos infinitos. Ainda nesse estudo, as funções podem apresentar, na sua expressão, operações que apresentam certas restrições operatórias para a etapa, como a raiz quadrada de números negativos, a divisão por 0, que não são números reais. O conceito de domínio da função é importante nesses casos.

No capítulo3, dá-se início ao estudo das funções. Os conceitos de domínio, contradomínio e imagem prevalecem. Na abordagem por meio de conjuntos, a natureza dos conjuntos (finito, infinito, discreto ou contínuo), principalmente dos domínios, não é enfatizada. Essa caracterização tem influência nos gráficos. Nem mesmo no ponto em que se propõe a estudar o domínio de uma função real, a natureza do domínio é explorada.

O capítulo 4 é destinado ao trabalho com as funções afins; o capítulo 5, às funções quadráticas, e as funções modulares, no capítulo 6. Destacamos nesses capítulos o não aparecimento das taxas de variação média dessas funções (p.110-224). Destacamos que a ideia de crescer ou a de decrescer em qualquer restrição do domínio é importante, pois estão relacionadas com as ideias de tendência, convergência e limite.

Nas observações feita pelo autor a partir das tabelas e gráficos , também consideramos oportunidades de desenvolver um trabalho com mais significado, principalmente, das noções relacionadas com o conceito de infinito, a partir das características da exponencial (fig. 14).

Na abordagem das funções exponenciais e logarítmicas (capítulos 7 e 8), há poucas atividades em que podemos destacar as noções relevantes para o trabalho com o conceito de infinito. Embora possamos entender a existência de oportunidades para que isso aconteça. No início destes capítulos encontramos uma revisão de potências e suas propriedades, a conceituação e a representação gráfica. A seguir, uma aplicação da exponencial no cálculo do número e (p. 228-291) (fig. 15).

Figura 14: Características da função exponencial

Pela observação das tabelas e dos gráficos podemos concluir que, para uma função exponencial:

- $D(f) = \mathbb{R}$, $CD(f) = \mathbb{R}_+^*$, $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$, $f(1) = a$ e $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$;
- o gráfico é uma figura chamada curva exponencial, que passa por (0, 1);
- o gráfico não toca o eixo **x** e não tem pontos nos quadrantes III e IV;
- para $a > 1$ a função é crescente ($x^1 > x^2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$);
- para $0 < a < 1$, a função é decrescente ($x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$);
- a função exponencial é sobrejetiva: $Im(f) = CD(f)$, ou seja, para todo número real $b > 0$, existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$ (todo número real positivo é uma potência de **a**);
- a função exponencial é injetiva ($x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$ ou $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$), pois ou ela é crescente ($a > 1$) ou é decrescente ($0 < a < 1$);
- a função exponencial é bijetiva, logo, admite função inversa;
- a função exponencial é ilimitada superiormente.

Fonte: DANTE, 2011 p. 238

Figura 15: Valores convergindo para o número *e* (número neperiano)

Vamos considerar a sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ com $n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \ldots, \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}, \ldots, \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}, \ldots, \left(1+\frac{1}{500}\right)^{500}, \ldots$$

$\downarrow$ 2,000; $\downarrow$ 2,2500; $\downarrow$ 2,3703; $\downarrow$ 2,5937; $\downarrow$ 2,7048; $\downarrow$ 2,7156

$$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}, \ldots, \left(1+\frac{1}{50000}\right)^{50000}, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ldots$$

$\downarrow$ 2,7169; $\downarrow$ 2,7182

Quando **n** aumenta indefinidamente, a sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tende muito lentamente para o número irracional e = 2,7182818284...

Para refletir

$1 + \frac{1}{n}$ é sempre maior do que 1, quando $n \in \mathbb{N}^*$.

Fonte: DANTE, 2011 p. 249

Na abordagem apresentada no Quadro 4, fala-se em aumento indefinido: uma expressão associada ao conceito de infinito e de tendência. Entendemos que uma atividade para mostrar a tendência para algum número real deva ter várias etapas para a concepção da tendência e se convencer dela, ou seja, o convencimento (aceitação) da ideia de "tender para".

Conforme feito na atividade seguinte e na mesma página, no cálculo de $f(x) = e^x$ e de $f(x) = e^{-x}$, para valores de x variando de 0,0 a 6,0, com intervalo variação padrão de fixo de 0,1. A ideia de apresentar as duas variações (quadro 4) é importante para as comparações: a noção do infinitamente pequeno e a tendência para $+\infty$, na primeira; e para 0, na segunda, devido às bases serem: $e > 1$ e $0 < {}^{1}\!/_{e} < 1$, respectivamente.

Quadro 5: Valores exponenciais de base neperiano

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0,0	1,0000	1,00000	3,0	20,086	0,04979
0,1	1,1052	0,90484	3,1	22,198	0,04505
0,2	1,2214	0,81873	3,2	24,533	0,04076
0,3	1,3499	0,74082	3,3	27,113	0,03688
0,4	1,4918	0,67032	3,4	29,964	0,03337
0,5	1,6487	0,60653	3,5	33,115	0,03020
0,6	1,8221	0,54881	3,6	36,598	0,02732
0,7	2,0138	0,49659	3,7	40,447	0,02472
0,8	2,2255	0,44933	3,8	44,701	0,02237
0,9	2,4596	0,40657	3,9	49,402	0,02024
1,0	2,7183	0,36788	4,0	54,598	0,01832
1,1	3,0042	0,33287	4,1	60,340	0,01657
1,2	3,3201	0,30119	4,2	66,686	0,01500
1,3	3,6693	0,27253	4,3	73,700	0,01357
1,4	4,0552	0,24660	4,4	81,451	0,01228
1,5	4,4817	0,22313	4,5	90,017	0,01111
1,6	4,9530	0,20190	4,6	99,484	0,01005
1,7	5,4739	0,18268	4,7	109,95	0,00910
1,8	6,0496	0,16530	4,8	121,51	0,00823
1,9	6,6859	0,14957	4,9	134,29	0,00745
2,0	7,3891	0,13534	5,0	148,41	0,00674
2,1	8,1662	0,12246	5,1	164,02	0,00610
2,2	9,0250	0,11080	5,2	181,27	0,00552
2,3	9,9742	0,10026	5,3	200,34	0,00499
2,4	11,023	0,09072	5,4	221,41	0,00452
2,5	12,182	0,08208	5,5	244,69	0,00409
2,6	13,464	0,07427	5,6	270,43	0,00370
2,7	14,880	0,06271	5,7	298,87	0,00335
2,8	16,445	0,06081	5,8	330,30	0,00303
2,9	18,174	0,05502	5,9	365,04	0,00274
3,0	20,086	0,04979	6,0	403,43	0,00248

Fonte: DANTE, 2010 p. 249

Figura 16: Características da função logarítmica

Como consequência da definição de função logarítmica e da análise dos gráficos, podemos concluir que:

- o gráfico da função logarítmica passa pelo ponto (1, 0), ou seja, $f(1) = 0$, ou, ainda, $\log_a 1 = 0$;
- o gráfico nunca toca o eixo **y** nem ocupa pontos dos quadrantes II e III;
- quando $a > 1$, a função logarítmica é crescente ($x_1 > x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$);
- quando $0 < a < 1$, a função logarítmica é decrescente ($x_1 > x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$);
- somente números positivos possuem logaritmo real, pois a função $x \rightarrow a^x$ assume somente valores positivos;
- se $a > 1$, os números maiores do que 1 têm logaritmo positivo e os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo negativo;
- se $0 < a < 1$, os números maiores do que 1 têm logaritmo negativo e os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo positivo;
- a função logarítmica é ilimitada, superior e inferiormente.
  No caso de $a > 1$ ser ilimitada superiormente significa que se pode dar a $\log_a x$ um valor tão grande quanto se queira, desde que tomemos **x** suficientemente grande;
- ao contrário da função exponencial $f(x) = a^x$ com $a > 1$, que cresce rapidamente, a função logarítmica $\log_a x$ com $a > 1$ cresce muito lentamente. Veja, por exemplo, que, se $\log_{10} x = 1\,000$, então $x = 10^{1\,000}$. Assim, se quisermos que $\log_{10} x$ seja maior do que 1 000, será preciso tomar um número **x** que tenha pelo menos 1 001 algarismos;
- a função logarítmica é injetiva, pois números positivos diferentes têm logaritmos diferentes. Ela é também sobrejetiva, pois, dado qualquer número real **b**, existe sempre um único número real positivo **x** tal que $\log_a x = b$. Portanto, ela é bijetiva (há uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}_+^*$ e $\mathbb{R}$).

Para refletir

No caso de $a > 1$, o que significa ser ilimitada inferiormente?

Fonte: DANTE, 2011 p. 276

Notadamente, nas observações anteriores (fig. 16), algumas noções como crescer, decrescer, limitadas inferior e superiormente, tão grande quanto se queira e suficientemente grande, por exemplo, que são noções relacionadas com o conceito de infinito, necessitam ser mais exploradas, embora se tenha em mãos, elementos que podem ser explorados nesse sentido.

Mais uma vez, aparecem situações em que é possível o trabalho com as noções que estão relacionadas com o conceito de infinito, bem como o próprio conceito. São essas noções comentadas e apresentadas na parte II de nosso Produto Educacional, como sugestões para os professores da educação básica que desejem se aprofundar no tema ou fazer uma revisão de conteúdos básicos para continuidade do ensino da matemática com mais qualidade.

O capítulo em que se trabalham as progressões geométricas, destacando, apenas, a soma infinita de uma sequência geométrica de infinitos termos com razão q, restrita ao intervalo $-1 < q < 1$, com $q \neq 0$, situação onde há a convergência da série, como mostra a Figura 17, a seguir:

Figura 17: Limite da soma de uma progressão geométrica.

Nas progressões geométricas em que $0 < |q| < 1$, a soma dos **n** primeiros termos tem um limite finito quando **n** tende a infinito. Nesse caso, q^n aproxima-se de zero para **n** suficientemente grande, ou seja, $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$.

Sabemos que $S_n = a_1 \cdot \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$, $q \neq 1$. Logo, $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = a_1 \cdot \dfrac{1 - 0}{1 - q}$, isto é:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q},\ 0 < |q| < 1$$

Para refletir

O que acontece com a soma dos termos de uma PG infinita de termos positivos e razão maior do que 1?

Exemplo:

Vamos calcular o limite da soma dos termos da progressão geométrica $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Neste caso, $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ e temos:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Logo, $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 1$. Isso significa que, quanto maior for **n**, a soma

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$ será mais próxima de 1.

Para refletir

$S_1 = \frac{1}{2}$

$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots$ tende a 1.

Fonte: DANTE, 2011 p.327

Nas introduções para definir as progressões nada se comenta da possibilidade de a progressão ser ou não infinita. Na progressão geométrica, o caso da possibilidade da soma de infinitos termos com a restrição mostrada na ilustração acima é bastante explorado nas dízimas periódicas e nas atividades pertinentes, bem como nos problemas. O que se chama de soma limite das somas parciais, é demonstrada a forma de se obter a expressão do cálculo dessa soma limite, utilizando-se do conceito de infinito e de convergência da série nas condições favoráveis discutidas na ilustração. Na .mesma página, o autor faz, repentinamente, um estudo das aproximações, usando quase todas as noções relacionadas com o infinito, apontadas na nossa pesquisa.

O último capítulo da obra é dedicado à matemática financeira, relacionando os juros simples, os juros compostos e o cálculo de seus respectivos montantes, com o termo geral da progressão aritmética e da progressão geométrica, respectivamente, no caso finito, para um número finito de períodos.

Em relação à progressão geométrica infinita, podemos utilizá-la no cálculo das perpetuidades em situações-problema de cálculos com os aluguéis. É mais uma oportunidade para trabalhar situações que envolvam os conceitos de tendência, de aproximação, de convergência, de infinito e do próprio limite.

4.1.2 **Análise do livro: Coleção Novo Olhar Joamir Roberto de Souza Vol. I , 1º Edição, Código: 25133COL02 Editora FTD, São Paulo SP, 2010.**

Na apresentação, o autor entende que uma das atribuições do cidadão é olhar o mundo em sua volta, compreendê-lo, interagir com ele, participando criticamente dos rumos da sociedade onde está inserido, visando ao bem comum. Ler e interpretar criticamente informações apresentadas de diferentes formas, provenientes dos mais diversos meios de comunicação, tomar decisões baseadas em constatações matemáticas, como escolher entre comprar à vista ou comprar a prazo, financiar ou adquirir um consórcio, etc. Argumenta que a coleção foi elaborada de forma auxiliar nesses assuntos e no caminho posterior a essa etapa de ensino, como no ingresso no mercado de trabalho e no ensino superior.

A coleção apresenta diversos exemplos e atividades resolvidas, seguidos de propostas de atividades que buscam promover a consolidação da aprendizagem. Dentre outras seções, ao final do livro há questões do ENEM e vestibulares. Oferece sugestões de orientação do professor com a introdução dos tópicos "Explorando o tema" e "Refletindo sobre o capítulo".

O capítulo 1 é o dos conjuntos, e os conceitua como coleções de objetos de quaisquer natureza: objetos, pessoas, animais e números. Representa os conjuntos por propriedades, citando seus elementos ou por diagrama (p. 10-11).

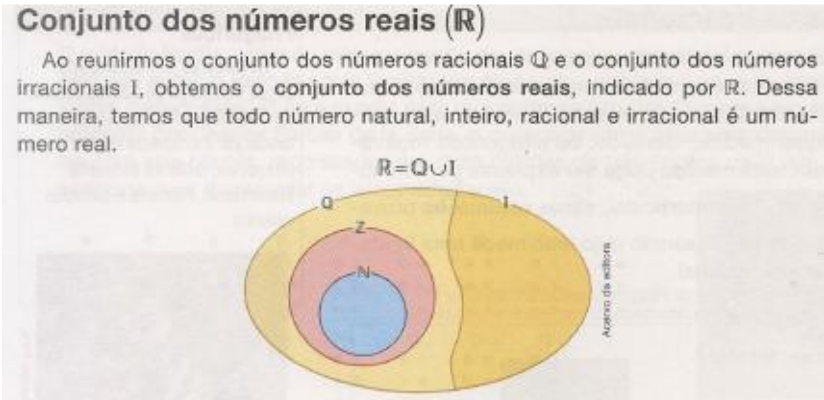
Consideramos que, na realidade, não temos aqui uma definição específica para conjunto, porém há a indicação de que ele é formado por elementos, ou seja, aquilo de que ele é formado se chama elementos. De uma maneira geral, na teoria dos conjuntos, parte-se sempre da existência de um conjunto como um axioma. Podendo existir mais de um, desde que possamos identificar diferenças, olhando por toda a sua extensão, verificando por que não se trata do mesmo conjunto, como no axioma da extensão, a saber: dois conjuntos são iguais quando têm os mesmos elementos. Ou seja, na verificação de que não se trata do mesmo conjunto, devemos olhar em toda a sua extensão se há algo diferente, baseando-se no axioma da extensão.

Ainda nesse capítulo, definem-se os conjuntos vazio e universo, sem qualquer preocupação com a sua existência. Define-se subconjunto e conjunto das partes; determina-se a quantidade de elementos do conjunto das partes, relacionando com a quantidade de elementos do próprio conjunto, sem compará-los.

Analisamos que, desta forma, a ideia que predomina é só a da determinação da quantidade de elementos do conjunto formado pelas partes do outro; é importante estabelecer uma relação entre essas quantidades, estabelecendo quem é o maior, ou seja, onde há mais elementos. Essa ideia pode se tornar mais interessante para o estudante quando se trabalha com conjuntos infinitos. Nem todos os infinitos têm o mesmo número de elementos!

No capítulo 2, em seguida, definem-se os conjuntos numéricos: naturais, inteiros, racionais e irracionais, com representação na reta por expansão decimal e algumas situações práticas. Mostra-se que a diagonal do quadrado é $\sqrt{2}$ e que o comprimento da circunferência é dado pela expressão: $\pi \cdot D$, com D o diâmetro da circunferência. Coloca $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$, onde $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números racionais (p. 32-34) e I, dos números irracionais (Figura 18).

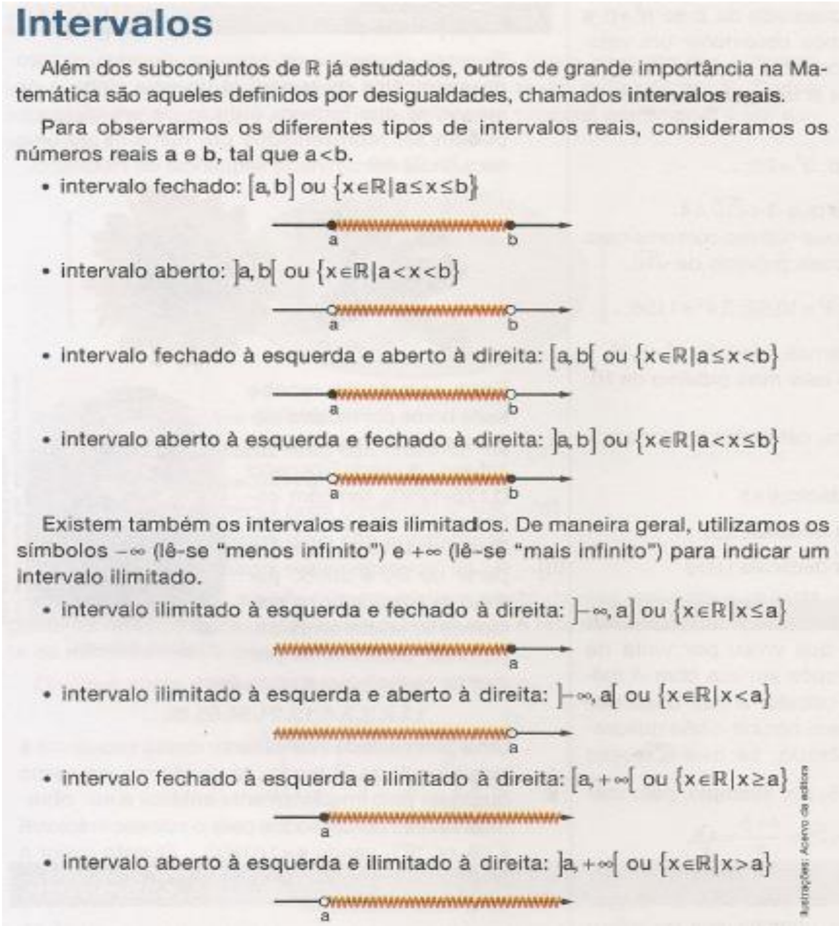
Figura 18: Representação do conjunto dos números reais



Fonte: JOAMIR, 2010 p. 34

Os intervalos são definidos em abertos, fechados, fechado à esquerda e aberto à direita, aberto à esquerda e fechado à direita, com representação na reta e por propriedade. Os intervalos ilimitados, com um dos extremos no infinito ou os dois (fig. 19) são apenas definidos a partir de propriedades e notações, sem qualquer menção sobre o significado do infinito.

Figura 19: Representação dos intervalos



Intervalos

Além dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ já estudados, outros de grande importância na Matemática são aqueles definidos por desigualdades, chamados **intervalos reais**.

Para observarmos os diferentes tipos de intervalos reais, consideramos os números reais a e b, tal que $a<b$.

- intervalo fechado: $[a, b]$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- intervalo aberto: $]a, b[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- intervalo fechado à esquerda e aberto à direita: $[a, b[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- intervalo aberto à esquerda e fechado à direita: $]a, b]$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Existem também os intervalos reais ilimitados. De maneira geral, utilizamos os símbolos $-\infty$ (lê-se "menos infinito") e $+\infty$ (lê-se "mais infinito") para indicar um intervalo ilimitado.

- intervalo ilimitado à esquerda e fechado à direita: $]-\infty, a]$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
- intervalo ilimitado à esquerda e aberto à direita: $]-\infty, a[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
- intervalo fechado à esquerda e ilimitado à direita: $[a, +\infty[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
- intervalo aberto à esquerda e ilimitado à direita: $]a, +\infty[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

Ilustrações: Acervo da editora

Fonte: JOAMIR, 2011 p. 36

Destacamos que a Figura 19 apresenta a primeira aparição do infinito na obra. Entretanto não o relaciona a qualquer processo, a qualquer noção, ou a qualquer conceito.

O capítulo 3 é o das funções. Nele, o produto cartesiano foi definido formalmente a partir de par ordenado, o qual não foi definido antes. Acompanhado com esse produto vem o sistema cartesiano, criando um quadriculado para a representação dos pares ordenados. Seguem ainda no capítulo as relações e o conceito de função, através do conceito de relação. Conforme mostra a Figura 20.

Figura 20: O conceito de função através da Relação dos conjuntos

Sejam os conjuntos *A* e *B* não vazios, uma relação *f* de *A* em *B* é uma **função** quando associa a cada elemento *x*, pertencente ao conjunto *A*, um único elemento *y*, pertencente a *B*. Essa função pode ser indicada por:

$f: A \rightarrow B$ ou $A \xrightarrow{f} B$ (lê-se "função *f* de *A* em *B*")

O conjunto *A* é denominado **domínio** (D(f)) e o conjunto *B*, **contradomínio** (CD(f)) da função *f*. Cada elemento *y* de *B* que possui correspondente *x* em *A* é chamado **imagem de** *x* pela função *f*. O conjunto formado por todas as imagens é denominado **imagem da função** (Im(f)).

Fonte: JOAMIR, 2011 p. 52

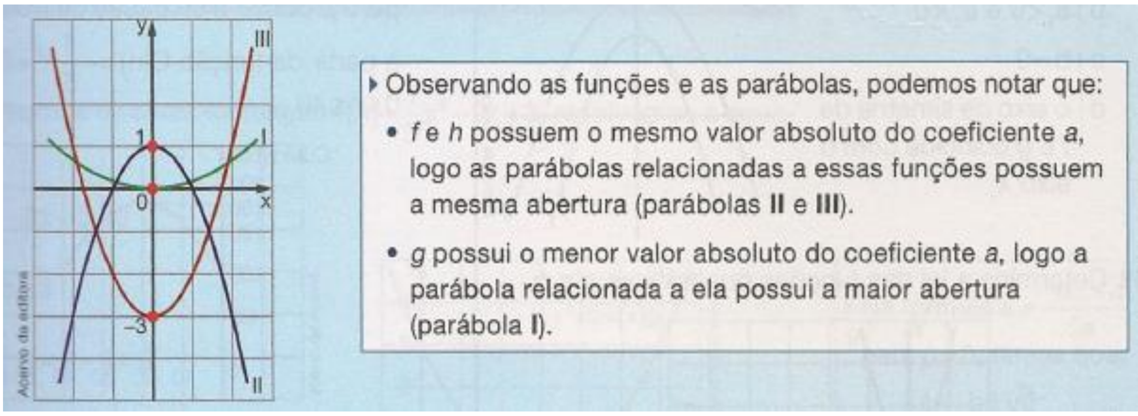
O estudo dos domínios de função antecede o estudo dos gráficos, do comportamento das funções: crescer, decrescer ou se manter constante. São gráficos de situações aplicadas. Todas as curvas do gráfico se apresentam de forma limitada, embora pareçam pretender passar uma ideia infinita. É importante que os gráficos sejam constantemente relacionados com o plano cartesiano e a representação dos pontos nesse plano. Com isso, poder-se-ia discutir a ideia de lugar geométrico.

O capítulo 3 é o das funções afins. Essas funções são definidas formalmente, observando propriedades, elaborando-se gráficos, resolvendo equações e inequações − simples, produto e quociente. A noção de infinito e noções relacionadas não foram identificadas nesta parte, e apenas no trabalho com os intervalos é que aparece o símbolo do infinito com um extremo dos intervalos (p. 81-115).

Destacamos que a taxa de variação da função afim, que define o comportamento da função em relação ao seu crescimento ou não, tem um papel importante na análise das situações-problema e, além disso, contribui para o significado do conceito de derivada. É uma noção importante no trabalho das funções.

O capítulo 4 foi reservado para o trabalho com as funções quadráticas. A partir de atividades é apresentada a definição formal dessa função, em seguida apresenta-se seu gráfico, identificando-se os seus coeficientes e o comportamento dos mesmos quando são alterados (p.116-153) (fig. 21).

Figura 21: Representação de parábolas, relacionadas com seus coeficientes.



Fonte: JOAMIR, 2010 p. 123

Consideramos que a identificação e a análise dos coeficientes são importantes para a matemática, porém, para o propósito da análise, é mais importante para a situação aplicada no contexto. Observar que as parábolas têm suas concavidades para cima ou para baixo, abrem mais ou fecham mais, têm simetria, identificando seu eixo de simetria, tudo isso é importante, mas é necessária a relação com a realidade, ou seja, quais os efeitos que essas modificações fazem na realidade. Entendemos que essas observações são valiosas na interpretação das situações-problema. As situações extremas são importantes. Ou seja, quando qualquer um dos coeficientes tende para o infinito (- ou +) ou para 0. O tópico “Explorando o tema’ ou o “Refletindo sobre o capítulo” são oportunidades para destacar essas observações. Notadamente, as chances do infinito e das noções relacionadas aumentam.

O capítulo 5 é o das funções exponenciais. Nele, é feita uma revisão de potência com operações e propriedades, além de atividades preparatórias para atingir o conceito que só mais tarde é definido de maneira formal com domínio, contradomínio, imagem e fórmula para a obtenção das imagens. Em seguida, faz-se a elaboração dos gráficos, identificando comportamentos, padrões. Equações, inequações e resolução de problemas (p. 154-175).

Analisamos que os conceitos relacionados com o conceito de infinito não são abordados, nem o fato do comportamento assintótico é observado nos gráficos. Apesar de uma série de atividades utilizando contextos da realidade diagnosticados como aplicação, não foi feito nenhum trabalho envolvendo a noção de tendência, convergência e limite.

O capítulo 6 é o dos logaritmos. O capítulo se inicia por uma atividade que pode estar relacionada com o conceito de infinito, define-se em seguida o logaritmo, as propriedades chegando às funções logarítmicas, definidas de maneira formal. Estamos diante de um tema de vasta aplicação (p. 176-219).

Consideramos que é importante identificar as propriedades, comportamentos e relacioná-los às observações da realidade, entretanto, a impressão que a obra nos deixa é de vasto conhecimento ligado à matemática (condições, restrições, comportamentos etc), porém, ainda falta encaixar no contexto, para tirar o máximo de informação do problema proposto, objetivando a tomada de decisão. São essas ideias que caracterizam o crítico, o consciente, o que compreende a realidade para ser inserido no contexto social.

O capítulo 7 é o das funções modulares. De uma foram geral, é o que apresenta menor possibilidades de aplicação a contexto da realidade, pelo menos nesse nível (ensino médio). Começa com a definição de módulo de um número real, em que associa a importante definição de módulo ao conceito de distância. A distância que pode ser medida e usada na noção de aproximação, que é uma noção relacionada com o conceito de infinito. É definida a função modular, mais uma vez, de maneira formal. A elaboração de gráficos, equações e inequações modulares, cumprindo com as exigências de um programa mínimo nessa etapa (p. 201-219).

O capítulo 8 se preocupa com as progressões: aritmética e geométrica. Aqui, há ampla possibilidade de aplicações em contextos sociais, científicos e da própria matemática. O capítulo faz uso de várias atividades relacionadas com as progressões. Começa com a definição de sequência e depois de sequências aritmética e geométrica. São várias atividades relacionadas a situações do dia a dia. Relaciona as progressões aritméticas e geométricas às funções afins e exponenciais, respectivamente. Calcula as somas parciais dos termos de progressões geométrica finita que, com certas condições, também as infinitas. No caso das somas parciais das progressões geométrica infinita, nas condições favoráveis, há uma série de atividades propostas interessantes. O conceito de infinito, nesses casos, é determinante, bem como as noções relacionadas com ele (p.220-259).

Consideramos que, em geral, nós, professores, quando trabalhamos com as sequências, as progressões, só temos olhos para a soma infinita por possibilitar uma série variada de problemas em que podemos criar situações adaptadas às condições da soma ilimitada, dentro de contextos reais ou fictícios. É uma possibilidade soberba para utilizar o conceito de infinito e as noções relacionadas com esse conceito.

O capítulo 9 é responsável pela trigonometria no triângulo retângulo. Faz uma revisão do teorema de Tales, teorema de Pitágoras, da trigonometria no triângulo retângulo, a trigonometria num triângulo qualquer, com as leis dos senos e do cosseno, com várias atividades propostas contextualizadas (p.262-299). Entretanto, não trabalha o ciclo trigonométrico, nem na primeira volta. O conceito de tangente possibilitaria, por exemplo, o uso do conceito de infinito, como as cotangentes. A expressão geral dos arcos, que normalmente é trabalhada nessa etapa será uma outra oportunidade, dentre outras.

4.2 Considerações gerais sobre as obras analisadas

A partir de nossa experiência como professor da educação básica, temos constatado que boa parte dos docentes que atuam nesta modalidade seguem, quase que unicamente, o livro didático escolhido pela sua escola. Podemos considerá-lo, portanto, como uma importante fonte de consulta de conteúdos, de exercícios, de atividades, de planejamento, metodologia e técnica de ensino. Daí decorre também a importância em analisá-lo e desenvolver propostas que complementem suas propostas de ação pedagógica.

As obras analisadas, que apresentamos neste capítulo, seguem a sugestão de um conteúdo mínimo indicado pelo MEC, que, consideramos, pode criar dificuldades aos alunos que almejam continuar seus estudos em cursos de nível superior que necessitem de bases matemáticas mais sólidas. Entretanto, consideramos que, mesmo com essa problemática, é possível ao docente realizar um trabalho com mais qualidade, desde que se faça um melhor aproveitamento daqueles conteúdos que estão sendo ministrados.

O professor pode criar ambientes para os seus alunos onde sejam ampliadas as possibilidades de construção de conhecimentos através de diálogos, da interpretação e da aplicação dos conceitos em situações do dia a dia. Concluímos este capítulo destacando que, nas duas obras analisadas, o conceito de infinito não recebeu o foco que conduza a essa ampliação que comentamos, embora possa ocorrer em diversos contextos, como sugerimos e buscamos mostrar.

CAPÍTULO 5

Nossa proposta: O produto educacional "Noções básicas do cálculo relacionadas com o conceito de infinito"

Nessa pesquisa, visitamos duas teorias que relacionam o processo ao objeto. Elas fundamentam a passagem de um processo para um objeto, ou seja, como e quando um processo pode ser entendido como um objeto ou se transformar nele. As teorias da Encapsulação (DUBINSKY, 1991) e a teoria da Reificação (SFARD, 1991), já apresentadas na nossa fundamentação teórica, discutem como ocorrem, exatamente, essa passagem ou essa transformação. As atividades propostas em nosso Produto Educacional foram elaboradas considerando essas teorias de ensino e aprendizagem. A nossa metodologia usada para alcançar a reificação do processo ou a sua encapsulação no objeto foi a da problematização, consistindo num conjunto de perguntas direcionadas para atingir esses objetivos.

Algumas pesquisas têm apontado para as dificuldades na aprendizagem dos alunos, diagnosticando erros e suas possíveis causas. Nós, professores, no entanto, quase sempre ficamos longe dessas discussões, reproduzindo modelos metodológicos e didáticos de que participamos, apenas, como aluno em nossas épocas, sem muito sucesso, em nossa sala de aula. Além dessas dificuldades, é importante observar a qualidade do trabalho pedagógico quanto aos objetivos propostos, ou seja, é possível que estejamos fazendo apenas um trabalho superficial e de baixa qualidade, sem qualquer aprofundamento das noções a serem trabalhadas na educação básica.

Os questionamentos em cada atividade visam a alcançar a interiorização da ação para a sua condensação, na construção do processo e para atingir, futuramente, a encapsulação do mesmo ou a sua reificação. Ao perceberem o processo, os alunos se apropriam de concepções operacionais e, ao encapsularem esse processo no objeto, eles se apropriam de concepções estruturais, compreendendo as estruturas de grupo, espaços, anéis, domínios e corpos, por exemplo. O contato com os processos permite que os alunos possam utilizar os conceitos desenvolvidos em novos processos.

Este capítulo apresenta a estrutura de nosso Produto Educacional, a partir de um conjunto de atividades relacionadas com as noções básicas do cálculo, envolvendo o conceito de infinito, que visam a facilitar o trabalho pedagógico dos professores no ensino médio e a reduzir a carência de estudos e de materiais didáticos desta área.

As atividades partem de propostas que manipulam as ideias básicas do conceito de limite e continuidade no desenvolvimento do cálculo e noções básicas relacionadas com o infinito potencial e o infinito cardinal. Em cada atividade as noções são construídas através de uma problematização envolvendo perguntas, sugestões e conceitos que levam à construção, aprofundamento e formalização na produção de significados.

Destacamos que as referências teóricas apresentadas anteriormente nesta dissertação foram primordiais para a construção de nossa proposta, pelo fato de as teorias envolvidas tratarem basicamente da produção de conceitos a partir de processos. Essas duas teorias, como já dissemos, analisam de que forma, a partir do processo, chega-se ao conceito e vice-versa. Foram observadas as concepções operacionais e as concepções estruturais em cada atividade, buscando a transição das operacionais, ligadas ao processo, para as estruturais, ligadas aos conceitos e definições.

Além destas referências, mais uma vez nos utilizamos das indicações encontradas no PNLDEM, tais como a importância de que a atividade matemática possa se valer da motivação e da familiarização dentro do contexto.

Destacamos que a confecção de nossa revisão bibliográfica e da própria análise dos livros didáticos que efetuamos −e foram apresentadas no capítulo anterior − foram de extrema importância para a elaboração dessas atividades e poderiam contribuir para ampliarmos a qualidade do processo de ensino/aprendizagem do conceito de infinito.

Por fim, destacamos, com relação às referências que utilizamos para a confecção de nosso produto educacional, as obras de Boyer (1974), Courant e Robbins (2000), Domingues (1991), Gibilisco (1990), Halmos (2001), Lima (1976), Resende (2003), Roque (2012), entre outros.

O Produto Educacional foi organizado em duas partes complementares: I) De atividades propostas e II) De leituras complementares.

Na parte I, temos 15 atividades. Destacamos que é um conjunto de atividades originais que podem ser utilizadas pelo professor na sequência em que foram organizadas, ou reorganizadas em outras estruturas, de acordo com a turma, o nível e o assunto com que o docente estiver trabalhando. Em cada atividade são apresentados o enunciado, proposta de desenvolvimento da atividade e comentários que acrescentam possibilidades de análises sobre esse desenvolvimento, assim como diversas sugestões de adaptações dessas atividades aos objetivos e metas propostos pelo docente em sua aula de aula. As atividades são:

Atividade 01: Comparação de conjuntos
Atividade 02: Potencialidade do infinito na divisão do intervalo
Atividade 03: Potencialidade do infinito no infinito
Atividade 04: Tendência do infinitamente pequeno
Atividade 05: Do menor para o maior, do maior para o menor
Atividade 06: Inferioridade e superioridade
Atividade 07: Distância e vizinhança
Atividade 08: Quem vizinho não fica isolado
Atividade 09: Abrir ou fechar para ficar no interior
Atividade 10: Encaixar para ficar sempre dentro
Atividade 11: Corresponder para contar
Atividade 12: Enumerar para equivaler
Atividade 13: O todo é formado de partes
Atividade 14: É possível estar em qualquer lugar
Atividade 15: Tender até chegar a um limite

Para exemplificarmos, destacamos uma das atividades que compõem o nosso produto educacional e que foi elaborada com base nessa problematização:

ATIVIDADE 2: A potencialidade do infinito, na divisão do intervalo.

Objetivos da atividade: Utilização da noção de infinito potencial no conceito de indução e da possibilidade da divisão infinita.

Desenvolvimento da atividade:

Considere dois segmentos de tamanhos unitários. Na prática, pensemos em dois pedaços de fitas de comprimento igual a 1 u.c. Escolha um deles e recorte em dois outros pedaços de comprimentos iguais, ou seja, a metade do tamanho que tinha. Agora, considere, apenas, uma dessas metades. Faça a mesma coisa, ou seja, divida-a novamente em dois pedaços de comprimentos iguais a metade e considere, apenas, uma delas. Observe que continuando assim, sempre sobrará uma das metades sem ser dividida em cada passo desse processo. Podemos repetir até quantas vezes esse processo? Na prática, esse processo terá fim? Justifique a sua resposta. Teoricamente, esse processo terá um fim? Justifique a sua resposta. Para cada passo já realizado é possível realizar um próximo passo?. Agora, considere o outro segmento, ainda não dividido, e todas as metades que não foram divididas no passo seguinte. Colocando esse segmento (fita) e todas as outras metades não divididas lado a lado, justapondo-as, formaremos um segmento cada vez maior em cada etapa. Até o final desse procedimento, é possível determinar o comprimento total do novo segmento? Justifique. Teoricamente, é possível determiná-lo? Agora, considere a sequência numérica dos comprimentos de todos os segmentos não divididos do processo, desde o início. Dessa forma, calcule o comprimento do segmento a cada passo. Em cada etapa, o segmento formado terá um comprimento parcial. Em que o tamanho inicial do segmento pode influenciar? Faça uma figura alusiva ao processo. Considere o segmento AB, por exemplo, de comprimento a. Faça um desenho representativo do processo. Escreva uma expressão algébrica para representar a sua soma parcial. Qual é o seu comprimento final? Justifique.

Comentários sobre a atividade

Uma sequência geométrica a_n, de infinitos termos, é uma progressão tal que: $a_n = a_{n-1} \cdot q,\ a_1 = a\ dado$ e q é a sua razão. Se $|q| < 1$, a soma dos infinitos termos dessa sequência converge para uma soma limite dada por: $S_\infty = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Na parte II de nosso produto educacional, apresentamos um total de 15 textos. Caso o professor queira recordar ou aprofundar algumas noções abordadas em nossas atividades propostas, poderá consultar cada comentário apresentado no desenvolvimento da atividade. Nesta parte, o docente encontrará reflexões e considerações sobre a teoria dos conjuntos, discussões envolvendo o conceito de infinito, entre outros importantes temas. Os títulos dos textos são:

Texto 1: Conjuntos
Texto 2: Conjunto das partes
Texto 3: Axiomas da teoria dos conjuntos
Texto 4: Axioma de Peano
Texto 5: Noção de ordem
Texto 6: Noções relacionadas com o conceito de infinito
Texto 7: Número racional e medida
Texto 8: Homogeneidade dimensional
Texto 9: Enumerabilidade
Texto 10: A noção de conjunto denso
Texto 11; Existência do irracional
Texto 12: Noção de corte
Texto 13: Intervalos aninhados
Texto 14: Supremo e ínfimo
Texto 15: Números reais

Destacamos que a proposta foi desenvolvida tendo por base a percepção de que o conceito de infinito é essencial para a construção de muitos outros conceitos como limite e continuidade, por exemplo, ensinados num curso de cálculo.

Historicamente, o infinito apresentou duas noções importantes na sua significação: a potencialidade e a cardinalidade. A primeira, podemos considerar como uma concepção espontânea, ou seja, a ideia que todos nós temos de infinito: o que não tem fim. A segunda, bastante controvertida, ainda causa dificuldades para a sua compreensão, principalmente quando se admite que um conjunto infinito tem a mesma cardinalidade que um de seus subconjuntos próprios, bem como a de infinitos de diversos tamanhos.

Os professores dos cursos de nível médio, técnicos e/ou os de cursos superiores que possuem disciplinas que necessitam desses conceitos, como, por exemplo, o cálculo e a análise, dentre outras, têm apontado para a dificuldade dos alunos em acompanharem esses cursos, pela falta das noções básicas que deveriam ser trabalhadas anteriormente (RESENDE, 1994).

Em nossa proposta, procuramos reunir as principais ideias que, de alguma forma, estão relacionadas com o conceito de infinito e que, consideramos, servirão para lhe dar significado.

Esperamos que estas propostas de atividades auxiliem os colegas professores da educação básica no desenvolvimento e aprofundamento do seu trabalho, ampliando possibilidades de alcançar maior qualidade no processo de ensino/aprendizagem da matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos em nossa produção a importância do estudo do conceito de infinito na educação básica, e, de certa forma, a importância desse estudo para a boa preparação do estudante para adentrar em um curso superior que envolva tais conhecimentos de maneira mais aprofundada. Destacamos que apresentamos resultados de pesquisas que convergem para tais ideias, e ressaltam que a presença de noções de infinito em ambientes educacionais tem se apresentado de maneira bastante superficial, quer pela falta de materiais didáticos que proporcionem adequado suporte, quer pela própria dificuldade, por parte do docente, de manipulação desse conceito e das noções básicas relacionadas. Entretanto, esse conceito continua sendo utilizado para dar sentido a alguns outros, consistindo em dificuldades para a compreensão dessas novas noções.

Embora o PNLDEM estabeleça critérios norteadores para o trabalho nessa etapa do ensino, de cunho didático-pedagógico, a seleção dos conteúdos a serem trabalhados fica por conta de um currículo mínimo nacional, podendo ser enriquecido conforme as necessidades peculiares a cada instituição de ensino.

Defendemos que diversas atividades podem ser (re)elaboradas para atingirem um mínimo de significação do conceito, fazendo parte de uma etapa da construção ou aprofundamento desse conceito.

Os processos infinitos podem ser encapsulados ao conceito de infinito a partir da manipulação de noções básicas, trabalhadas em etapas de sua significação, como no método do exaustão de Eudoxo, com a divisão infinita; o cálculo do valor aproximado para as raízes quadradas de números positivos, pela iteração; o valor de π, a partir das frações contínuas; o limite da soma, com as somas parciais, etc. Em cada um desses processos, a realização da etapa seguinte não deve necessariamente depender da anterior, tendo uma visão ampla do processo, podendo, até, reinvesti-lo em outros. Nesse momento, o processo faz o papel do próprio conceito, ou seja, é o processo encapsulado no conceito. Da necessidade dessa visão proceitual, colaborando com a construção de conceitos, acontece a aprendizagem (SFARD, 2001).

O livro didático é uma fonte quase que exclusiva para o professor preparar e ministrar a sua aula; portanto, consideramos que sua análise é um bom indicativo do trabalho em sala de aula. Nos livros didáticos consultados, o infinito aparece quase despercebido, ocorrendo, apenas, nas dízimas e soma infinita da PG. É possível inferir que o sistema educacional brasileiro provê aos estudantes dois métodos diferentes de comparar conjuntos finitos: o método da contagem finita e o método da relação pela bijeção, sendo esse último pouco utilizado para o caso dos conjuntos infinitos. Percebe-se que o infinito potencial parece fazer parte do contexto diário das pessoas, e o infinito real ainda necessita da intervenção pedagógica do professor (KINDEL, 2012).

Um caso a se pensar é que, se o infinito é tão importante para 90% dos professores entrevistados por Kill (KILL, 2010), qual o porquê dessa escassez na educação básica brasileira (KINDEL, 2012)? Entendemos que, embora o infinito potencial seja a concepção dominante, são raras as atividades que envolvam esses processos nos livros didáticos, principal fonte de consulta do professor, como já comentamos.

Podemos, também, conjecturar que, nos trabalhos didático-pedagógicos apresentados nos livros didáticos analisados na nossa pesquisa, um número muito pequeno de atividades está relacionado a processos para produção de conceitos. Nesses casos, devemos produzir atividades capazes de levar o estudante a interiorizar as etapas, realizar as ações com vista na reificação do processo. Daí consideramos a contribuição de nosso produto educacional nestes processos, pois nas atividades que analisamos nas obras comumente utilizadas em escolas da educação básica, na forma ação, processo, objeto e esquema, quase nada foi observado no sentido de desenvolver a encapsulação do conceito de infinito ou qualquer comportamento proceitual do mesmo. Ou seja, não foi possível, em qualquer dos manuais consultados, identificar atividades de interiorização das etapas referentes a processos e a conceitos, bem como as atividades que levam às ações, a partir dessa interiorização, para possibilitar a reificação do processo infinito no conceito de infinito.

Na definição do número racional, por exemplo, a concepção é apenas estrutural, não havendo qualquer indício do operacional. O comportamento assintótico das funções exponencial e logaritmo não é destacado, consistindo em mais uma grande possibilidade de estudo das noções relacionadas com o conceito de infinito, na educação básica. Nos processos de determinação dos números e e π, pode-se desenvolver atividades que utilizam processos infinitos, a noção de tendência, convergência encapsulados no conceito de limite. e e π são considerados proceitos. Uma outra boa oportunidade existe, processo da obtenção do limite da soma encapsulado na soma limite. O trabalho com os números reais pode ser realizado a partir de construções relacionadas a processos infinitos, desenvolvendo noções operacionais como o corte de Dedekind e noções estruturais, como ideias das sequências de Cauchy, representação por desenvolvimento por expansão decimal.

Concluímos com a indicação de que estas e outras propostas podem ser apresentadas em aulas da educação básica, atentando para o objetivo e ritmo dos estudantes. Reiteramos que devem acontecer em ambientes propícios ao diálogo, propício às descobertas e ao desenvolvimento da criatividade, de tal forma que tanto os erros quanto os acertos dos estudantes sejam entendidos como parte do processo de construção dos conceitos matemáticos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARCAVI, A. Symbol Sense: Informal sense making in formal mathematics, 1994.

BOYER, C. B. História da Matemática. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BROUSSEAU, G Fondements et méthodes de La didactique dês mathématiques. Recherches em Didactique dês Mathematiques, v7 , n2, PP 33:115. Grenoble, 1986.

ARISTÓTELES Do Ceu Tradução de Edson Bini 1ª Edição, Edipro Edições Profissionais, 2014.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Guia de Livros Didáticos PNLD 2008: Matemática. Brasília: MEC, 2007.

CHEVALLARD, Y. La transposition didactique: di savoir savant au savoir eseigné. Grenoble, La Pensée Sauvage, 1991.

CORNU, B. Apprentissage de la Tese de doctorat de troigeime cycle de Mathematiques Pures Universite Scientifique et Medicale de Grenoble, 1983.

COURANT H, ROBBINS H O que é Matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos Ed. Ciência Moderna , 2000.

DANTE L. R. Matemática: Contexto e Aplicações 1º Ano Vol. 1 Editora Ática, 2011

DINA TIROSH, the role of Students' intuitions of infinity in teahing the Cautorian Theory.

DOMINGUES, H. H, Fundamentos de aritmética Atual Editora Ltda, São Paulo, 1991.

DOUADY R. De La didactiquedes mathématiques à Theure actuelle. Cahiers de Didactique dês Mathématiques, n.6 IREM de Paris 7, 1985.

DUBINSKY, E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Ed) Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Kluwer Academic, 1991 p.95-123.

E. FISSHBEM, D TIROSH AND P. HESS. "The intuition of infinity" Educacional Studies in Mathematics 10, p.3 - 40, Educacional studies in mathematic, 1979.

EVES, H. Introdução à História da Matemática Editora Unicamp 3ª Impressão, 2008

GIBILISCO S. "Reaching for infinity" Puzzles Paradoxes and Brainteaser #3 First Edition, 1990.

GIL, A. C. Método e Técnica de Pesquisa Social 5ª Edição São Paulo S.P Ed.Atlas, 2006.

KILL, T. G. Conceituações sobre o Infinito na História, nos Livros Didáticos e no Pensar de Futuros Professores de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, 2010.

LAKATOS, Maria Eva. MARCONI, Maria Andrade. Metodologia do Trabalho Científico 4ª Ed- São Paulo, Revista e ampliada. Atlas, 1992.

LE MLIEU. Le contrat didactique. Recherches em Didactique dês Mathématiques v.9, n.3, PP 309:336 Grenoble, 1988.

MORENO L. E., WALDEGG A. E. G. “The Conceptual Evolution of actual Mathematical infinity. ” Educational Studies in Mathematics 22,p. 211-231, 1991.

QUILLET, P. Introdução ao pensamento de Bachelard. Rio de Janeiro, Zahar, 1977.

RESENDE, W, M. Uma análise histórica-epistêmica do conceito de limite Dissertação de mestrado, USU, Rio de Janeiro, 1994.

_________________ O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza epistemológica Tese de Doutorado, USP São Paulo, 2003.

ROQUE, T. A História da Matemática: Uma visão crítica desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro, Zahar, 2012.

SFARD, A. D. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, v. 22 p. 1-36,1991.

SOUZA, Francisco das Chagas de. Escrevendo e Normalizando Trabalhos Acadêmicos: Um guia Metodológico. 2ª Ed- Florianópolis. Editora da UFSC, 2001.

SOUZA, J. R. Novo Olhar Matemática v.1 1ª Ed. São Paulo SP Ed. FTD, 2010.

TALL, D. O. The notion of infinite Measuring Number and its Realevance in the intuition of infinity. Educacional Studies in Matheamaties 11, p. 271-284. 1980.

APÊNDICE

ARTIGO PUBLICADO E DEFENDIDO NO EBRAPEM 2013

A Noção de Infinito na Educação Básica: reflexões e proposta

Luiz Marcos Cavalcanti Pereira[1]

GD3 – Educação Matemática no Ensino Médio

Resumo: O conceito de infinito está relacionado com muitos outros conceitos na matemática e sua importância para dar sentido a esses conceitos é inegável como mostram o trabalho de Cornu (1983), os trabalhos de Resende (1994) e Resende(2003), que citam o conceito de infinito como um dos obstáculos epistemológicos para o conceito de limite e a noção básica necessária para os cursos introdutórios do cálculo, no ensino superior, respectivamente. Entretanto, nossa pesquisa tem indicado a pouca atenção dada ao assunto nos livros didáticos do ensino fundamental e médio. Nesse trabalho procuraremos identificar os obstáculos de origem epistemológica, histórica e didática relacionados com o conceito de infinito, bem como buscaremos conhecer, também, quais são as concepções espontâneas, identificar as imagens de conceito que estão relacionadas e que são trazidas por alguns professores que atuam na rede pública e privada do estado do Rio de Janeiro, na educação básica.

Palavras-chave: Educação Matemática Infinitude. Obstáculo Epistemológico. Epistemologia. Sequência de aprendizagem.

[1]Mestrando em Ensino de Ciências - Universidade do Grande Rio, e-mail: luizmacape@yahoo.com.br
Orientador: Prof. Dr. Abel Garcia Lozano Co-Orientador: Prof. Dr. Adriano Vargas Freitas.

Introdução

Mesmo antes de terminar minha graduação em matemática, iniciei minha carreira de professor, atuando em escolas públicas e particulares da educação básica. Fui monitor nas disciplinas de cálculo I, II, III e IV no meu curso de graduação em matemática (UFRRJ), aluno do curso de estatística (UFRJ), bolsista da iniciação científica, estagiário e auxiliar de pesquisas no Projeto Fundão (UFRJ).

Assistindo aos debates de mesa redonda, participando de oficina, comunicações científicas e ouvindo algumas palestras em vários encontros estaduais (EEMAT), nacionais (ENEM), semanas de matemática de algumas universidades públicas estaduais e federais, verifiquei que havia uma queixa generalizada quanto ao ensino de cálculo relacionada à formação básica dos estudantes de cursos universitários que têm na sua grade curricular uma disciplina introdutória do cálculo. Na minha experiência profissional como professor na educação básica por muitos anos, eu não lembro um momento em que tentei trabalhar sequer com a noção de infinito em qualquer das séries que compõem esse segmento de ensino. Entretanto, como defende Rezende (1994), num curso inicial de cálculo ou de análise, essa necessidade se faz presente.

Muitos são os conceitos da matemática que estão relacionados com o conceito de infinito, e alguns dependem basicamente dele. Por exemplo: o conceito de convergência, de limite, de derivada, conjuntos abertos, vizinhança etc. A maior parte desses conceitos está relacionada ao cálculo ou à análise real. Para outros, tais como o conceito de áreas sob curvas, de volume de sólidos irregulares, reta tangente a curvas, plano tangente a superfícies etc, a noção de processos infinitos é bastante relevante.

Ao observarmos os conteúdos dos livros didáticos mais utilizados nas escolas do ensino fundamental do Rio de Janeiro[2], podemos perceber o pouco destaque ou até a inexistência de se trabalhar a ideia de infinito, bem como no ensino médio.

Conceitos como conjunto infinito, de dízimas, a divisão por zero, o número e o número π, frações contínu$e$s, de sequências infinitas, do limite da soma de uma progressão geométrica, o problema da incomensurabilidade, a existência dos números irracionais, de

[2] LUIS ROBERTO DANTE Matemática Vol. Único, Ed Ática 1ª edição SP, 2008;
GELSON IEZZI E OUTROS Matemática: Contexto e Aplicações, Vol. Único Ed. Atual 5ª edição SP, 2011 ;
IMENES E LELLIS Matemática, Ed. Moderna, 1ª Edição S.P, 2008.

números reais etc, são vistos e discutidos na educação básica e, no entanto, o conceito de infinito ainda permanece distante das discussões e atividades desenvolvidas no ambiente escolar , pelo menos explicitamente.

A partir das sugestões dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000), as práticas pedagógicas nas escolas brasileiras estão mudando e os professores estão procurando desenvolver um trabalho mais contextualizado, envolvendo a construção do conceito, a interdisciplinaridade e a história da matemática, por exemplo, buscando alcançar níveis tão próximos da conceituação ideal quanto possível.

> O critério central da organização do currículo no ensino médio é o da contextualização e o da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamentos (p.75)

Acreditamos que, com relação ao conceito de infinito, estas indicações também possam ser aplicadas, muito embora possamos perceber que passamos boa parte dos ensinos fundamental e médio e, em muitos casos também no superior, a trabalharmos superficialmente com a concepção inicial, sem mergulharmos mais substancialmente no conceito de infinito propriamente.

Culturalmente, temos, desde cedo, uma vaga ideia do que significa a palavra infinito[2] e até mesmo conceber algo sobre processos infinitos. Entretanto, essa ideia inicial não será o suficiente para a consolidação desse conceito, muito menos para sua utilização como ferramenta na construção de outros conceitos correlatos.

É importante ressaltar que essa ideia inicial e muitas vezes espontânea do que seja infinito pode ser utilizada pelo professor de matemática para a construção do conceito mais amplo do significado do infinito. Para tanto, é preciso que o professor tenha claras estas concepções. Entretanto, pesquisas envolvendo professores em formação (Resende, 1994) nos indicam que é possível encontrar falhas no entendimento desses conceitos por parte desses próprios estudantes, chegando ao ponto de relatarem não se sentirem confortáveis e motivados em sua sala de aula para dar o devido tratamento que esse conceito merece; indicam também falta de tempo para o estudo aprofundado do conceito e preparação de atividades pedagógicas que envolvam este conhecimento.

Com base nessas análises, pretendemos desenvolver uma sequência de aprendizagem para o ensino do conceito de infinito.

Nesse trabalho, analisaremos quais são as concepções espontâneas e próprias relativas ao conceito de infinito e como se processa a construção desse conceito a partir de informações colhidas via aplicação de questionários do tipo semi-aberto (Cornu,1983) a professores de matemática do ensino básico de escolas públicas e particulares no estado do Rio de Janeiro.

Nossa dissertação será desenvolvida em quatro capítulos da seguinte forma: primeiro abordaremos a revisão de bibliografia, buscando informações sobre os trabalhos já realizados em relação a esse tema, nas abordagens, na metodologia usada, na delimitação do tema e, principalmente, nos objetivos geral e específico de pesquisa.

No segundo capítulo, abordaremos as várias concepções relacionadas ao conceito de infinito ao longo de sua evolução histórica, levantaremos os obstáculos epistemológicos e os obstáculos didáticos observados. Nesse estudo, utilizaremos como referenciais teóricos os estudos de Fischbeim, Tirosh e Hess (1979), Tall (1980), Tirosh (ano?) e Moreno e Waldeg (1991), dentre outros.

No terceiro capítulo, relataremos a pesquisa realizada, a partir do perfil dos professores e da busca de uma sequência de aprendizagem capaz de proporcionar uma atividade relevante para os professores de matemática da educação básica e que possa reduzir, ao máximo, toda essa deficiência de abordagem em relação ao tema. A apresentação e testagem dessa sequência se consolidará em nosso produto educacional.

No quarto e último capítulo, apresentaremos as nossas considerações sobre o tema proposto, tendo sempre como foco central comparar os resultados encontrados com as conclusões observadas com base na fundamentação teórica, e no processo dialógico com os professores participantes.

Justificativa

Falar da importância do conceito de infinito é falar da importância do cálculo na matemática e da própria matemática. Segundo Resende (2003), o infinito é um dos ingredientes fundamentais para a construção da ponte do macroespaço epistemológico discreto/contínuo.

O conceito de infinito está presente no conceito de número real, de limite, de derivada, de integral, dentre outros, e através dos processos *ad infinitum* que estão presentes nas aproximações de curvas por linhas poligonais para o cálculo de seus comprimentos ou no cálculo de uma área de uma região plana por área de uma poligonal ou de um volume, por elemento de volume. Estas são algumas ideais básicas do cálculo que, de certa forma, estão relacionadas com o conceito de infinito, e é dessa maneira que a noção de infinito participa e contribui para a invenção e desenvolvimento do cálculo.

Ainda segundo Resende, no macroespaço das dificuldades do ensino do cálculo, encontra-se a dualidade finito/infinito, e afirma que é no mínimo curioso que os nossos estudantes de ensino do cálculo não tenham sequer consciência das dificuldades que envolvem a noção de infinito. Sabe-se que o cálculo surge e se desenvolve a partir das ideias do infinitamente pequeno e que até mesmo Cauchy, que fundamentou o cálculo na noção de limite, não ignorou a ideia do infinitesimal. Ou seja, a ideia é considerar quantidades infinitamente pequenas a priori e fazê-las através de um processo infinito, aproximá-las de zero. Tarefa para a análise real e para a análise não-standard. Assim não há como negar que a noção de infinitesimal é, com efeito, o portão de entrada das ideias básicas do Cálculo.

Pretende-se com essa emersão das ideias básicas do cálculo no ensino básico de matemática possibilitar ao Cálculo que possa desempenhar, desde cedo, o seu papel histórico na construção do conhecimento matemático. Consideramos que esta preparação para o Cálculo não só beneficiará o ensino superior de Cálculo, mas, sobretudo, o próprio ensino da matemática (Resende, p. 441,1994).

> O “ciclo da ignorância da noção de infinito” é alimentada pela ausência de conhecimentos básicos a respeito dos estudos matemáticos de Dedekind e Cantor sobre esta noção na formação do professor de matemática do ensino médio e fundamental, o que inviabiliza qualquer possibilidade de reação ao ciclo (Resende, p. 370, 1994).

Objetivos

Este trabalho tem como objetivo geral, num primeiro momento, analisar as abordagens feitas por professores da rede pública e particular de escolas do Rio de Janeiro no que se refere ao conceito de infinito na educação básica e, em especial, no ensino médio; num segundo momento, analisar alguns dos principais livros que estes professores utilizam em suas aulas de matemática, que foram aprovados e incluídos no programa do Programa Nacional do Livro Didático realizado pelo MEC e, por último, elaborar uma sequência de aprendizagem em relação a esse conceito.

Dentre os objetivos específicos, destacamos: levantar as noções relacionadas com o conceito de infinito; levantar as concepções do conceito de infinito; levantar os obstáculos epistemológicos de natureza histórica relacionados ao conceito de infinito; levantar os obstáculos de natureza didática; identificar as noções espontâneas e próprias utilizadas pelos professores de matemática; e identificar as imagens de conceitos trazidas por eles.

Métodos

A primeira parte da pesquisa será desenvolvida sob o modelo qualitativo no formato exploratório investigativo (GIL, 2006) com uma amostra de professores das redes pública ou particulares que atuam na educação básica, nas escolas do estado do Rio de Janeiro. Será feito um questionário para o levantamento do perfil profissional dos professores, procurando saber locais de trabalho, nível de ensino em que atuam na educação básica, série em que atuam, livro texto utilizado com frequência, tempo de efetivo trabalho no magistério dentre outras perguntas. Esse questionário estará constando de perguntas do tipo semi-aberta, e específicas para esse fim. Será feito um levantamento das principais noções utilizadas por esses professores ligadas ao conceito de infinito, o tipo de conceito usado e se essas noções estão presente nos trabalhos desses professores em sala de aula. Esse levantamento será realizado através das respostas a atividades propostas, contendo questionamentos relacionados ao conceito de infinito.

A pesquisa tem como fundamentação teórica a teoria dos campos conceituais (TAD) de Chevallard; nas imagens de conceito de David Tall; no sentido simbólico e na visão proceitual do conceito de infinito (AROS). Ou seja, vamos procurar desenvolver atividades investigativas das noções trazidas, a priori, pelos professores em relação a conceitos relacionados à noção de infinito, fundadas nessas teorias.

Serão selecionados alguns professores que trabalham no ensino fundamental ou médio da rede pública e particular do estado do Rio de Janeiro, em particular, do Colégio Pedro II e numa unidade da FAETEC, Colégio João Luis do Nascimento.

Serão elaboradas atividades contendo algumas concepções relacionadas com o conceito de infinito. Algumas perguntas serão elaboradas na tentativa da identificação das concepções espontâneas trazidas pelo professores e a partir daí, relacioná-las ou não com os obstáculos epistemológicos e identificação das imagens de conceitos relativa a esse conceito. Após a aplicação da atividade, iremos em busca das concepções próprias desses professores em relação ao conceito de infinito. A partir dessas concepções, procuraremos desenvolver uma sequência de atividades que possa dar suporte ao trabalho do professor nesse segmento da educação básica.

Considerações Finais

Esperamos, com essa pesquisa, despertar os colegas professores para o trabalho com um conceito tão relevante como o caso de infinito e que tão pouco fazemos para que seja considerado na importância que realmente merece. É necessário que o conceito de infinito possa atingir maior destaque nas séries da educação básica com vistas à sua utilização por partes dos estudantes que desejem ingressar em cursos de nível superior que de alguma forma façam uso desse conceito no ensino de outros conceitos em que o conceito de infinito seja adequadamente apresentado, contribuindo para melhoria da qualidade do processo de ensino e aprendizagem da matemática, em diversos outros tópicos dessa área de estudo.

Referências Bibliográficas

ARCAVI, A. **Symbol Sense: Informal sense: making in formal mathematics**, For the learning of mathematics. 14(3), 24-35, 1995.

BRASIL/MEC, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares Nacionais**. Brasília, 1997.

BRASIL, Lei nº 9394, de 20 de dezembro de 1996. **Lei de Diretrizes e Bases para Educação Nacional**. Brasília, 1996.

BRASIL/MEC, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. volume II ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, SEB, 2006.

BRASIL/MEC, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+).** Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de La didactique dês mathématiques. **Recherches em Didactique dês Mathematiques**. V7 , n2, PP 33:115. Grenoble, 1986.

BROUSSEAU, G Le contrat didactique. Le mlieu. **Recherches em Didactique dês Mathématiques** v.9, n.3, PP 309:336 Grenoble, 1988.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique: di savoir savant au savoir eseigné. Grenoble, La Pensée Sauvage**, 1991.

DAVID TALL, **Ed The Notion of Infinite Measuring Number and its Realevance in the Intuition of Infinity**. Educational Studies in Mathematics 11, p. 271-284. 1980.

DOUADY, R. De La didactiquedes mathématiques à Theure actuelle. **Cahiers de Didactique dês Mathématiques.** N.6 IREM de Paris 7, 1985.

E. E. FISHBEN, D TIROSH AND P. HESS. "**The Intuition of Infinity**", Educational Studies in Mathematics 10, p.3 – 40, 1979.

GIL, A. C. Método e Técnica de Pesquisa Social 5ª Edição São Paulo S.P Ed.Atlas, 2006.

LUIS E. MORENO A E GUILHERMINA WALDEGG, "**The Conceptual Evolution of actual Mathematical infinity**. " Educational Studies in Mathematics 22,p. 211-231, 1991.

QUILLET, P. **Introdução ao pensamento de Bachelard**. Rio de Janeiro, Zahar, 1977.

RESENDE, W,M. **Uma análise histórica-epistêmica do consceito de limite**. USU, RJ,1994.

VINNER S **Concept Definition, Concept Image and the Notion of function**, The International Journal of Mathematical Education in Science and technology, 14, 293-305.

STAN GIBILISCO, "**Reaching for infinity" Puzzles Paradoxes and Brainteaser** #3. First Editions, 1990.