UNIVERSIDADE DO GRANDE RIO “Prof. José de Souza Herdy”
UNIGRANRIO
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DAS CIÊNCIAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Antonio Carlos Bastos

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA DISCUSSÃO SOBRE O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Duque de Caxias – RJ – Março
2016

Antonio Carlos Bastos

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA DISCUSSÃO SOBRE O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ensino das Ciências na Educação Básica da Universidade do Grande Rio “Prof. José de Souza Herdy”, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientação: Profa. Dra. Eline das Flores Victer

Co-orientação: Profa. Dra. Jurema Rosa Lopes

Duque de Caxias
2016

CATALOGAÇÃO NA FONTE/BIBLIOTECA - UNIGRANRIO

B327r Bastos, Antonio Carlos.
Resolução de Problemas: uma discussão sobre o ensino de análise combinatória / Antonio Carlos Bastos. – 2016.
129 f.: il. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básica) – Universidade do Grande Rio “Prof. José de Souza Herdy”, Escola de Educação, Ciências, Letras, Artes e Humanidades, 2016.
“Orientadora: Profa. Eline das Flores Victer”.
“Co-orientação: Profa. Jurema Rosa Lopes”.
Bibliografia: f. 111-113.

1. Educação. 2. Matemática - História. 3. Matemática – Estudo e ensino. 4. Instituições de ensino médio. 5. Resolução de problemas. I. Victer, Eline das Flores. II. Lopes, Jurema Rosa. III. Universidade do Grande Rio “Prof. José de Souza Herdy”. IV. Título.

CDD – 370

Antonio Carlos Bastos

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA DISCUÇÃO SOBRE O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ensino das Ciências na Educação Básica da Universidade do Grande Rio "Prof. José de Souza Herdy", como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Aprovada em 29 de março de 2016

Comissão examinadora:

Eline Victer

Profa. Dra. Eline das Flores Victer
Universidade do Grande Rio – Unigranrio

Jurema Rosa Lopes

Profa. Dra. Jurema Rosa Lopes
Universidade do Grande Rio – Unigranrio

Profa. Dra. Giselle Faur de Castro Catarino
Universidade do Grande Rio – Unigranrio
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

Wallace Vallory Nunes

Wallace Vallory Nunes
Instituto Federal do Rio de Janeiro – IFRJ

Lucia Maria Aversa Villela

Lucia Maria Villela Aversa
Universidade Severino Sombra - USS

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus, por estar comigo em todos os momentos.

A minha família, pelo carinho e compreensão.

A minha orientadora Eline das Flores Victer, por me mostrar suas críticas e sugestões para elaboração deste trabalho, e com o mesmo carinho, a minha co-orientadora Jurema Rosa Lopes.

Aos professores e funcionários do programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências na Educação Básica da UNIGRANRIO pela atenção e dedicação.

Aos amigos de Mestrado, pelas discussões e reflexões que compartilhamos.

Aos alunos que participaram da pesquisa, pela dedicação às atividades realizadas, pelo carinho a minha pessoa e, claro, de modo reciproco.

Aos professores da Banca, pelas críticas e várias sugestões que contribuíram para o refinamento deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho buscou investigar uma proposta de ensino que utiliza como ferramenta didática a História da Matemática e a Resolução de Problemas, para o ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória, assunto normalmente tratado no 2º ano do Ensino Médio. Por sua vez a Análise Combinatória tem por finalidade estabelecer métodos de contagem, ou mais simplesmente, problemas de contagem, e é tida como um dos assuntos de maior dificuldade. Para a realização desse feito, buscamos na literatura autores que são favoráveis à utilização da História no ensino e aprendizagem da Matemática e seus principais argumentos, autores que acreditam na eficácia do ensino e aprendizagem a partir da Resolução de Problemas e por fim salientamos as contribuições vindas de obras e textos sobre a História da Matemática. O presente trabalho visou contribuir com o ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória; a fim de trazer uma Matemática mais humanizada, relacionada com fatos históricos e com aplicações no mundo real. Em seguida este trabalho foi aplicado a uma turma do Ensino Médio, em uma escola pública do Estado do Rio de Janeiro e analisado. Verificamos que o conteúdo foi assimilado com facilidade e houve um melhor aproveitamento pelos alunos. Desejamos que, a partir desse trabalho haja um melhor entendimento acerca desse tema que é relevante no estudo de Matemática. Ainda com base na dissertação, elaboramos um livro, com o seguinte título: “A Análise Combinatória Desenvolvida com Aspectos Históricos”, que é o produto educacional, onde estabelecemos conceitos combinatórios através de fatos históricos e problemas. A maior dificuldade que tivemos foi a falta de trabalhos que se referem especificamente à História da Análise Combinatória.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Ensino Médio. Resolução de Problemas. História da Matemática.

ABSTRACT

This work aimed to investigate a proposal for teaching that uses as a teaching tool to the History of Mathematics and Problem Solving, for the teaching and learning of Combinatorial Analysis, subject usually treated in the 2nd year of High School. In its turn, the Combinatorial Analysis aims to establish counting methods, or more simply, counting problems, and is considered as one of the issues of greatest difficulty. For the realization of that done, we seek in literature authors who are favorable the use of History in the teaching and learning of mathematics and its main arguments, authors who believe in the effectiveness of teaching and learning with the Problem Solving and finally we emphasize the contributions from works or texts on the History of Mathematics. The present work aimed to improve the teaching and learning of Combinatorial Analysis; lastly, bring a Mathematic more humanized, related with historical facts and with real-world applications. Then this work was applied to a class of High School, in a public school of the State of Rio de Janeiro and analyzed. We found that the content was assimilated easily and there was a better exploitation of the students. We hope that, from this work, the study of Combinatorial Analysis, there is a better understanding of this subject of Mathematics. Still based in the dissertation we prepared a book with the title: "The Combinatorial Analysis Developed with Historical Aspects", which is the educational product, where we established combinatorial concepts through historical facts and problems. The greatest difficulty we had was the lack of work specifically relate to the History of Combinatorial Analysis.

Keywords: Combinatorial Analysis. High School. Problem Solving. History of Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A grande mídia aponta ano após ano para o permanente fracasso no desempenho dos estudantes em Matemática: dados da Prova Brasil e as notas do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) são exemplos de que há um abismo entre o que se ensina e o que de fato é aprendido. No que se refere à Resolução de Problemas de Matemática aplicado à vida real, o Brasil ocupa a 38ª posição entre 44 países avaliados pelo Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, Pisa (sigla em inglês). Um dos conteúdos considerado de mais difícil entendimento, na Escola de Ensino Médio, é a Análise Combinatória. Por isso, como professor de Matemática do Ensino Médio, há mais de vinte e cinco anos atuando na rede pública de ensino, a princípio como professor da Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro e nestas duas últimas décadas atuando no Instituto Federal do Rio de Janeiro do Campus de Nilópolis e presenciando o desencanto dos discentes por esse tema, comecei a refletir sobre a possibilidade de investigar sobre o ensino e aprendizagem da Análise Combinatória através da História da Matemática associada à Resolução de Problemas.

De acordo com o Caderno do professor, organizado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, essa dificuldade em Combinatória existe não só entre alunos, mas também entre professores do Ensino Médio: "os conteúdos pertinentes `a Análise Combinatória e ao Cálculo de Probabilidades, [...] costumam trazer desconforto não apenas aos estudantes, mas também aos professores" (SEE/SP - 2008, p. 9, apud LOPES e REZENDE, 2011, p. 76).

De acordo com Morgado et al. (2006, prefácio), referindo-se a Análise Combinatória no 2º grau (hoje Ensino Médio): "tem sido frequentemente indicada por professores do 2º grau como sendo a parte da Matemática mais difícil de ensinar".

Embasados nos referenciais teóricos que subsidiam esta pesquisa, encontramos elementos que demonstram a eficácia de uma abordagem pedagógica fundamentada na História da Matemática. Os autores Miguel (1997) e Fauvel e Maanen (apud MENDES, 2006), entre outros, listam várias potencialidades pedagógicas da História na Educação Matemática, tais como fonte de motivação para o ensino-aprendizagem e humanização da Matemática. Da mesma forma, a Resolução de Problemas também é defendida na literatura para o ensino e a aprendizagem de Matemática: os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) apontam para essa importância, além de autores, como Van de Walle (2009), Polya (2006) e D´Ambrosio (1993), entre outros.

A preocupação com o Raciocínio Combinatório no Ensino Médio é destacada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000). Estes documentos expressam a importância e o cuidado que devemos ter quando abordamos os conteúdos de contagem, estatística e probabilidade, pois envolvem aplicações em questões da Matemática no mundo real que tiveram um crescimento grande e se tornaram bastantes complexas.

Embora a Análise Combinatória seja um assunto de notória relevância, poucas pesquisas envolvendo o tema Raciocínio Combinatório foram encontradas, tanto a nível nacional quanto internacional, segundo o grupo GERAÇÃO de pesquisa em Raciocínio Combinatório (ALMEIDA, 2010, p. 20).

Pode-se dizer que atualmente os métodos combinatórios são aplicados no cálculo de probabilidade, de estatística, problemas de pesquisa operacional, da teoria da informação, em problemas de transportes e problemas de matemática pura (M0RGADO et al., 2006, p. 5; BACHX et al., 1975, p.1).

Além de suas várias aplicações, o professor precisa despertar no aprendiz uma curiosidade crescente ao apresentar o conteúdo da Análise Combinatória, possibilitando que este desenvolva um espírito crítico e responsável, despertando sua curiosidade e criando condições para progredir com segurança no trabalho ou em estudos superiores. Por isso, o estudo da Combinatória merece atenção especial no Ensino Médio. Essa postura crítica diante do conhecimento, não torna o aluno passivo nem subordinado ao que Freire (2003) denomina de ensino "bancário". Ao contrário, conduz o aprendiz estimulado a se aventurar pelos novos conhecimentos.

Contar a História da Matemática não é só trazer fatos históricos de forma mecânica para sala de aula, mas desenvolver a Matemática com esses acontecimentos, relacionar a Matemática com fatos sociais, culturais e políticos, uma Matemática como criação humana, de fato, essencial para o desenvolvimento das sociedades. Ainda, consideramos que através de problemas também estabelecemos os conceitos matemáticos, e com problemas contextualizados, interdisciplinares ou até mesmo da Matemática pura, acreditamos que podemos ter um ensino significativo e de fácil compreensão. Desta forma, pensamos também que as fórmulas se perdem na memória com o tempo, mas o desenvolvimento do raciocínio é eterno.

Diante do exposto procuramos responder à seguinte questão nesta pesquisa: que contribuições uma proposta de ensino que recorra às potencialidades pedagógicas da História da Matemática como ferramenta didática, associada à Resolução de Problemas, pode trazer para a aprendizagem de Análise Combinatória para uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública do Estado do Rio de Janeiro?

Nossa hipótese aponta que é possível ensinar e aprender Análise Combinatória de modo mais interessante e significativo para os alunos quando se desenvolve uma proposta baseada na História da Matemática integrada à Resolução de Problemas.

Nosso objetivo geral foi investigar as potencialidades pedagógicas da História da Matemática associada à Resolução de Problemas em uma proposta de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, para uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública do Estado do Rio de Janeiro.

Para isso, traçamos alguns objetivos específicos:

1º.) elaborar um produto educacional com base na História da Matemática e Resolução de Problemas;

2º.) avaliar como foi o aprendizado da Análise Combinatória a partir do uso da História da Matemática e Resolução de Problemas;

3º.) identificar as potencialidades da História da Matemática que apareceram com mais evidências em sala de aula (encontros) e verificar a relevância (ou boas razões) da Resolução de Problemas em sala de aula, para a construção de conceitos e conteúdos pertinentes a Análise Combinatória, por alunos do Ensino Médio.

Este estudo está inserido no âmbito de pesquisa qualitativa em Educação Matemática, em concordância com Ludke, André (2001, p.12), por isso a ênfase é muito mais no processo do que no produto ou resultado. Dentro do nosso problema estudado, para a coleta de dados empíricos, utilizamos observação participante que de acordo com Moreira (2002, p.52) o principal produto dessa observação participante resume em “relatos detalhados do que acontece no dia-a-dia das vidas dos sujeitos e é derivado das notas de campo tomadas pelo pesquisador”. Os acontecimentos e as observações foram anotados no decorrer da aplicação da pesquisa, com detalhes, num caderno, que denominamos de diário de pesquisa (ou de campo). Além disso, para obtermos mais subsídios para a pesquisa aplicamos um questionário e avaliações de provas escritas (discursivas), com os alunos.

Esta dissertação, além da introdução, está organizada em cinco capítulos. No primeiro, apresentamos uma breve revisão bibliográfica com cinco trabalhos de pesquisadores brasileiros que nos inspiraram para a nossa proposta a ser investigada.

No segundo, será enfatizada um pouco da História da Matemática na Educação no Brasil. Serão destacadas as políticas públicas; os pesquisadores em Educação Matemática, Historiadores da Matemática e Matemáticos, que nos ajudaram na construção da nossa fundamentação teórica. Em seguida algumas discussões reflexivas sobre o ensino da Matemática. Além disso será apresentada uma definição de Análise Combinatória adequada ao Ensino Médio, e também, uma segunda definição de maneira mais geral e, por fim expomos um pouco dessa teoria para embasar os capítulos que se sucedem.

No terceiro capítulo será abordada a importância da contagem no desenvolvimento das civilizações e as contribuições que estas civilizações trouxeram para a Análise Combinatória, além dos acontecimentos e matemáticos que aconteceram na Europa, principalmente do século XVII, período em que a Combinatória começou a ser formalizada e teve um desenvolvimento exponencial, graças ao seu entrosamento com a teoria das probabilidades.

No quarto capítulo, será apresentado nosso produto educacional e a metodologia da pesquisa com a descrição do passo a passo dos procedimentos metodológicos.

Finalmente no quinto capítulo é apresentado os resultados dos encontros, as discussões e análises.

Em nossa pesquisa recorremos às reflexões da teoria da aprendizagem significativa crítica de Moreira (2011). De acordo com Moreira (2011) na perspectiva aprendizagem significativa crítica é permitido o sujeito ao fazer parte de sua cultura e, ao mesmo tempo, estar fora dela, manejar a informação, criticamente, não se sente paralisado diante dela; mudar sem ser dominado pela mudança; faz uso de novas tecnologia sem idolatrá-la; rejeitar as verdades fixas, as certezas, as definições absolutas, as entidades isoladas.

O presente estudo obteve aprovação do projeto de pesquisa no Comitê de Ética da UNIGRANRIO. Protocolado sob o número de CAEE 35562614.5.0000.5283(Anexo1).

1. PESQUISAS DESENVOLVIDAS NA ÁREA

Neste capítulo apresentamos cinco pesquisas recentes relacionadas com o ensino e a aprendizagem da Matemática, de forma que alguns pontos dessas pesquisas trouxeram inspirações para o nosso trabalho. As duas primeiras envolvendo a História da Matemática, a terceira o tema central é Resolução de Problemas e as últimas sobre a Análise Combinatória no Ensino Médio. Salientamos que todas as pesquisas apresentadas foram realizadas por pesquisadores brasileiros.

O tema: “História da Matemática e suas potencialidades pedagógicas em salas de aula do Ensino Fundamental” se refere ao artigo de Roque e Gomes (2012). O artigo apresenta os principais resultados de uma investigação sobre as potencialidades pedagógicas da História da Matemática em uma situação real de sala de aula, em turmas do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da Rede Municipal de Belo Horizonte. A realização dessa pesquisa teve a cooperação da professora das turmas do 7º ano. As atividades foram elaboradas de forma que relacionassem a História da Matemática com o tema “Números Inteiros”. As autoras buscaram os teóricos da aprendizagem situada, com origem nos trabalhos de Lave (1996), Lave e Wenger (1991) e Wenger (1998). Nela a aprendizagem é vista, de acordo com Matos (1999, p.67), como: “um fe- nômeno situado e construído socialmente”.

A coleta de dados se deu através da observação participante, dois questionários aplicados aos alunos, relacionados com as atividades e também entrevistas com a professora da turma e com alguns alunos. Após a investigação, evidenciaram a História como fonte de motivação, bem como fonte de método pedagogicamente adequado e interessante, para a abordagem dos números inteiros; sendo portanto uma contribuição para a prática didática.

Roque e Gomes (2012), afirmam que as dificuldades para integrar a História da Matemática às práticas pedagógicas foram duas, a primeira se refere aos recursos, ou seja, dificuldades de encontrar materiais produzidos no Brasil e a outra diz respeito à especialidade, isto é, a necessidade de o professor não só ter conhecimento de Matemática, mas conhecimentos históricos.

O trabalho: “Contribuições da História da Matemática para a Construção dos Saberes do Professor de Matemática” apresenta os resultados de Araman e Batista (2013), que trata de uma investigação a respeito dos conhecimentos advindos de estudos da História da Matemática para o processo de formação dos saberes docentes. As investigações evidenciaram que os conhecimentos teóricos e metodológicos da História da Matemática são importantes para a formação do professor. Para isso foram entrevistados professores que vivenciaram o processo da construção e aplicação da proposta, apoiada na História da Matemática, em sala de aula. Os resultados trazem alguns saberes docentes, que fazem parte ou vão além daqueles saberes já explicitados pela literatura.

O objetivo da pesquisa foi compreender e explicar algumas relações entre os conhecimentos teóricos e metodológicos advindos da História da Matemática e a construção dos saberes de professores de Matemática.

São muitas as pesquisas que discutem os saberes docentes e a importância de investigações que estudem e explicitem os saberes construídos e mobilizados pelos professores no exercício profissional. Dentre elas, foram citadas Almeida, Biojone (2007); Brito, Alves (2008); Fiorentini, Souza Junior, Melo (2003); Gauthier et al. (1998); Shulman (1986); Tardif (2002).

A metodologia da pesquisa está inserida no rol de pesquisa qualitativa em Educação Matemática, por isso a investigação apresentada tem natureza descritiva, onde a preocupação maior do pesquisador é no processo e nos seus significados e não com os resultados (BOGDAN; BIKLEN, 1994; LÜDKE; ANDRÉ, 1986).

Foram definidos, após estudos teóricos, alguns aspectos da História da Matemática que são importantes para a formação dos saberes do professor de Matemática e, para a análise de dados empíricos, utilizaram entrevistas semiestruturadas e a análise de conteúdo, onde estes aspectos definidos influenciaram.

Síntese do perfil dos professores participantes da pesquisa: do total de 6 professores, 3 eram mestres e 3 doutores, todos tinham um certo tempo de profissão e atuavam no ensino fundamental, médio e superior; a pesquisa foi aplicada em turmas do ensino fundamental ou médio. Esses profissionais além de terem contato com a História da Matemática e com estudos que evidenciam suas potencialidades na Educação Matemática, construíram e aplicaram propostas para uso da História da Matemática em sala de aula.

O estudo está inserido no âmbito de pesquisa qualitativa em educação. Alguns destaques da pesquisa em relação às entrevistas dadas pelos participantes evidenciaram: a formação recebida pelos professores muitas vezes não é suficiente para toda a complexidade de uma situação real de ensino e da aprendizagem – Brito e Alves (2008); Paiva (2008).

Como indica a literatura (BARDIN, 2000 e BURSAL, 2010), os professores apresentam uma compreensão mitificada do conhecimento matemático, ou seja, uma visão pouco adequada do conhecimento matemático, com a criação de mitos e heróis, e não uma visão de coletividade na construção do conhecimento.

Os professores ouvidos alegaram que o contato que tiveram com o desenvolvimento histórico do conteúdo matemático pesquisado proporcionou um tipo de compreensão diferente daquela que tinha até então. Como indicam Brito e Carvalho (2009).

A autoras declaram que os resultados auxiliaram na percepção da relevância dos conhecimentos teóricos na formação do professor, contribuindo para a perspectiva do ofício feito de saberes.

O título: “Discutindo resolução de problemas[1] e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino de matemática” é do artigo produzido por Lamonato e Passos (2011). O tema central é a Resolução de Problemas, quando o assunto é ensinar Matemática, nos diversos níveis de escolaridade. Este artigo analisa aproximações e distanciamentos entre Resolução de Problemas e exploração–investigação matemática, mostrando as contribuições e trazendo reflexões.

Para as autoras Lamonato e Passos (2011, p. 54):

> Há necessidade de entender, compreender e tratar a Matemática como um processo, como uma ciência, de fato, que tem caráter de investigação, que é um conhecimento historicamente em construção e não somente construído.

Assim, de acordo com essa visão, a Matemática não é uma disciplina pronta e acabada, ou seja, estática, desqualificada como ciência.

[1]As autoras preferiram escrever Resolução de Problemas, com iniciais minúsculas.

As autoras, Lamonato e Passos (2011), afirmam que a literatura apresentada em Educação Matemática, categorizam sob diversos temas ou abordagens, à Resolução de Problemas nos currículos escolares. Elas destacam que para Stanic e Kilpatrick (1989, p. 8, 9) em três temas: (1) a "Resolução de Problemas como contexto" subentende os problemas como "meios para atingir fins"; (2) a "Resolução de Problemas como instrumento" os problemas são vistos como competências "a serem ensinadas no currículo escolar" e finalmente (3) "Resolução de Problemas como arte" os alunos devem aprender a arte de resolver problemas; neste tema os autores nomeiam Polya, enfatizando que, segundo este autor, a Matemática consiste em saber-fazer, e nisto está a capacidade de resolver problemas.

Onuchic e Allevato (2004) afirmam que problema

> é tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em saber. [...] O problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm método ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta. (ONUCHIC, ALLEVATO, 2004, p. 221)

A exploração-investigação matemática, pode ser entendida, de acordo com Lamonato e Passos (2011, p. 62-63), como um meio pelo qual pode ocorrer a aprendizagem da Matemática em um processo que busca possibilitar ao estudante momentos de produção/criação de seus conhecimentos matemáticos, respeitando o nível de desenvolvimento em que ele se encontra. Evidencia que aprender e ensinar sejam diferentes de transmitir e adquirir conhecimentos.

Na busca de aproximações e distanciamentos, em relação à Resolução de Problemas e exploração-investigação matemática, segundo as autoras(2011), não importa a maneira como é entendida a Resolução de Problemas, mas o que vai fazer a diferença é a forma como será apresentada a tarefa e o modo de condução da mesma. Além disso, quanto mais a Resolução de Problemas for entendida como prática para a aplicação de procedimentos, mais ela diverge da exploração-investigação matemática. Tanto a Resolução de Problemas como a exploração-investigação matemática são opções centradas no aluno.

As autoras destacam algumas das potencialidades, entre outras, para o ensino e aprendizagem de Matemática, nestes tipos de atividades, como:

> Proporcionar momentos de trabalho em grupo que apostam na organização e na troca de experiências e conhecimentos; colaborar

> para que as crenças e concepções dos alunos a respeito da Matemática e seu ensino estejam mais próximos da natureza desta disciplina, valorizando o caráter científico da Matemática, com influência direta em sua posição perante esta ciência; possibilitar ao professor momentos de partilha de informações e melhor conhecimento dos processos de aprendizagem de seus alunos, com consequências para suas crenças e concepções a respeito do ensino, da aprendizagem da Matemática e das aulas propriamente ditas. (LAMONATO e PASSOS, 2011, p. 70)

De acordo com o tratamento dado à Resolução de Problemas, na visão de Lamonato e Passos (2011), o trabalho poderá ou não aproximar-se da exploração-investigação matemática. Tudo dependerá dos objetivos e ações do professor, das oportunidades aproveitadas na sala de aula e atividades do aluno.

O título: “Uma Abordagem da Análise Combinatória sem o uso Abusivo de Fórmulas” se refere ao trabalho de dissertação desenvolvido por Santos (2013), que visa o ensino e aprendizagem da Análise Combinatória sem o uso abusivo de fórmulas, para o Ensino Médio das escolas públicas brasileiras. A questão motivadora do trabalho foram as dificuldades existentes com o ensino ou aprendizagem da disciplina citada.

Santos (2013) começa seu trabalho abordando tópicos da História da Análise Combinatória, sendo enfático em aspectos da origem da contagem. Ele considera a História da Análise Combinatória como um recurso metodológico em sala de aula e um importante e rico material didático. Para contar um pouco de História o autor busca, principalmente, Biggs (1979) e Vazquez (2004).

Salientamos que Santos (2013) não esclareceu como poderíamos usar a História como recurso; limitou-se a contar um pouco de História da Combinatória.

Seu estudo está baseado, entre outros autores, Morgado et al. (2006) e Lima (2006).

Santos (2013) busca Morgado et al. (2006) para cita que apesar da Combinatória dispor de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, muitas vezes em que vamos resolver um problema de contagem, utilizamos um processo engenhoso que exige a compreensão plena da situação descrita pelo problema.

Santos (2013) continua, acrescentando que Lima (2006) destaca como um dos aspectos que pode contribuir para o sucesso dos estudantes do Ensino Médio, no que se refere à aprendizagem da Análise Combinatória, é evitar o uso abusivo de fórmulas ou excesso de casos particulares, que obscurece as ideias gerais e torna o entendimento do assunto mais complicado.

Santos (2013) acredita ser fundamental procurar habilitar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema e que, para a Resolução de Problemas de contagem será necessário parar, concentrar, discutir, pensar, se imaginar no papel da pessoa que vai fazer a “coisa” pedida pelo problema, procurando trocar a decisão a ser tomada por uma sequência de decisões mais simples e sucessivas.

Uma variedade de exemplos são apresentados em seu trabalho, fazendo um paralelo entre solucionar os problemas de contagem usando simplesmente o Princípio Fundamental da Contagem e solucionar os problemas usando algumas fórmulas tradicionais da Combinatória.

Propõem uma atividade[2] destinada a alunos do segundo ano do Ensino Médio relacionada ao dia-a-dia, com o intuito de despertar nos alunos um maior interesse pela Análise Combinatória e por outro lado motivá-los a aprofundar seus conhecimentos desse assunto, como pré-requisito para a atividade seria necessário que o aluno já tivesse contato com o Princípio Fundamental da Contagem.

Santos (2013) busca Silva (2006) para dizer que todo o conhecimento que o aluno desenvolve é construído na relação consigo, com os outros e com o objeto do conhecimento – tudo ao mesmo tempo. Ou seja, o aluno nunca aprende sozinho. Por esta razão recomenda que a atividade seja realizada em dupla.

Santos (2013), para fazer uso de materiais e tecnologia, aconselha a título de revisão e maneira interessante de abordar a Combinatória, os links do Rived, que têm como objetivo facilitar o processo de ensino e aprendizagem através de exemplos práticos e explicações de várias situações práticas, envolvendo a Combinatória.

O título: “Ensinando e Aprendendo Análise Combinatória com Ênfase na Comunicação Matemática: Um Estudo com o 2º ano do Ensino Médio” é da pesquisa de Almeida (2010), que investiga uma proposta de ensino que tem como ênfase a Comunicação Matemática, construída com base na resolução de situações-

---

[2] A atividade proposta por Santos (2013): Uma garota encontra-se no balcão de uma padaria que oferece seis opções diferentes de salgadinhos. Ela tem dinheiro para comprar três salgadinhos e ela também pode escolher salgadinhos repetidos. Nessas condições, de quantos modos diferentes ela pode comprar os 3 salgadinhos? Resposta: 56 modos diferentes.

problema para a aprendizagem de Análise Combinatória, em uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Itabirito (MG).

Almeida (2010), para a construção de sua proposta, buscou, entre outros, principalmente, Martinho e Pontes (2007), para dar suporte à “Comunicação na sala de Aula de Matemática”.

Os objetivos a serem alcançados, em Almeida (2010, p. 16) foram: avaliar a mobilização dos conhecimentos combinatórios ao longo da proposta; identificar as principais estratégias utilizadas; analisar o desenvolvimento dos argumentos utilizados pelos alunos ao longo do estudo; investigar o papel das discussões em pequenos e grandes grupos e identificar como os estudantes avaliaram a proposta.

A autora buscou uma comunicação matemática entre alunos e professor para a construção de um entendimento melhor dos conceitos ligados à Combinatória e que estimulasse a argumentação e a expressão.

Em Almeida (2010), no ambiente da proposta os alunos foram estimulados à argumentação e a discussão de situações-problema em pequenos e grandes grupos. De modo que cada aluno se tornasse um participante importante para sua própria aprendizagem.

Para a coleta de dados foram utilizados notas de campo (diário da pesquisa), gravações em áudio e vídeo de todas as aulas, registros produzidos pelos alunos ao longo das aulas, questionários e testes diagnósticos (tudo realizado com a permissão dos alunos).

Ao final, no que tange à comunicação, de acordo com Almeida (2010), os alunos ainda apresentaram algumas dificuldades em argumentar apresentando suas ideias, mas já eram capazes, em alguma medida, de estabelecer analogias e observar criticamente as respostas e resoluções apresentadas pelos colegas. A autora observou também melhora na maneira de resolver problemas, comparada com a do começo da pesquisa, e a quantidade expressiva de alunos que utilizaram o Princípio Fundamental da Contagem e outras técnicas de contagem. Cem por cento dos alunos que responderam ao questionário afirmaram que houve aprendizagem. Este trabalho alcançou seus objetivos, de acordo com os resultados obtidos e analisados pela autora.

Os pontos relevantes das pesquisas que podemos associar ao nosso trabalho são: nas duas primeiras pesquisas envolvendo História no ensino e aprendizagem da Matemáticas, destacamos as contribuições que trouxeram para prática didática. Por outro lado os pesquisadores tiveram dificuldade em encontrar recursos para a integrar a História da Matemática às práticas pedagógicas. Ressaltamos também que não encontramos pesquisas envolvendo História da Matemática e Análise Combinatória.

Já as pesquisas envolvendo o ensino e aprendizagem da Análise Combinatória no Ensino Médio, os autores trabalharam com Resolução de Problemas. No nosso ponto de vista algumas das peculiaridades destas pesquisas e da pesquisa cujo tema central é a Resolução de Problemas que nos chamaram a atenção foram: o cuidado para o uso não abusivo de fórmulas e o excesso de casos particulares que podem tornar complicado o entendimento do tema abordado, a importância do trabalho em grupo, a forma com conduzir as atividades, respeitando o nível de desenvolvimento em que o aluno se encontra.

2. A HISTÓRIA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO-APREDIZAGEM EM MATEMÁTICA E ANÁLISE COMBINATÓRIA

Começamos este capítulo, com um breve resumo da História da Matemática na Educação no Brasil, onde destacamos as políticas públicas que incentivaram o uso da História da Matemática nas práticas escolares. Em seguida, de maneira sintética, trazemos os pensamentos de autores que evidenciam as potencialidades da História da Matemática em sala de aula e seus principais argumentos. Além disso, também com base na literatura, buscamos argumentos favoráveis à Resolução de Problemas para o ensino e a aprendizagem em Matemática, para em seguida discutirmos sobre o ensino da Matemática. Por último, trazemos um pouco da teoria da Análise Combinatória para embasar os capítulos que se sucedem. Para essa realização evocamos, principalmente, pesquisadores em Educação Matemática, Historiadores em Matemática e Matemáticos.

Nossa investigação buscou a integração de duas tendências que vêm recebendo, também entre outras, atenção em Educação Matemática (EM), ou seja, a História da Matemática e a Resolução de Problemas.

De acordo com Miguel e Miorim (2001, p. 17-19), em 1931, com a Reforma do Ensino Secundário (equivalente, hoje, aos 4 últimos anos do Ensino Fundamental e todo o Ensino Médio), conhecida como Reforma Francisco Campos (ou também Movimento da Escola Nova), apresentada pelo Primeiro Ministro da Educação e Saúde, Francisco Campos, expressava que no ensino escolar deveria conter ligeiros fatos da História da Matemática. Por isso alguns autores de livros didáticos seguiram essa orientação. Essa Reforma do ensino talvez tenha sido a primeira proposta oficial de inserção da História da Matemática na Educação. Ainda, conforme Miguel e Miorim (2011), podemos destacar a obra de Cecil Thiré e Melo e Souza, conhecida como Mathematica. Os textos históricos dessa obra trazem informações a respeito de "personagens, povos ou temas específicos da Matemática". Entre os temas, tem um que se refere "às mulheres na Matemática", que foi produzido pelos autores. Alguns outros textos de Cecil Thiré e Melo e Souza, na obra, tinham a preocupação em citar produções de matemáticos brasileiros, por exemplo, "A numeração entre os selvagens", texto escrito pelo prof. do Colégio Pedro II, Eugênnio de Barros Raja

Gabaglia, que buscou seus escritos em autores contemporâneos que estudavam as culturas primitivas.

De acordo com Silva (2001 apud MIGUEL e MIORIM 2011, p. 22), o primeiro livro sobre História da Matemática de autor brasileiro, intitulado de “O mais antigo documento matemático conhecido (papyro Rhind)”, em 1899, foi de Raja Gabaglia.

Com a criação dos Parâmetros Curriculares Nacionais[3], nos últimos anos da década de 1990, mais conhecidos como PCN, o governo federal teve como intenção subsidiar as discussões pedagógicas, por exemplo, na elaboração de projetos educativos, no planejamento das aulas, etc., em todo o país. Nos PCN, a História da Matemática foi também contemplada no ensino-aprendizagem da Matemática. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, referindo-se às contribuições ao processo de ensino-aprendizagem, recorrendo a História da Matemática, dentre outras funções, revela a Matemática como criação humana, aponta as preocupações de diferentes culturas, em épocas distintas da História, para a compreensão dos avanços e tomadas de decisões do presente, considerando o conhecimento herdado de gerações passadas. Nos traz a possibilidade de estabelecermos conceitos matemáticos relacionados a acontecimentos históricos, formando veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande formação, e ainda com as ideias matemáticas, construídas pelos alunos, podemos responder alguns “porquês”, visando um espírito mais crítico sobre os objetos do conhecimento. Entretanto, esse documento alerta que, além do uso da História da Matemática, devemos buscar outros recursos didáticos e metodológicos para a contribuição no processo ensino e aprendizagem em Matemática (BRASIL, 1997).

2.1. Abordagem histórica no ensino

Encontramos na literatura diversos autores que se colocam favoráveis às potencialidades pedagógicas da História da Matemática (FAUVEL e VAN MAANEN; 1991, MIGUEL e MIORIM; 2011, MIGUEL, 1997; MENDES, 2009; MENDES et al., 2006). Para uma melhor compreensão a respeito dessa abordagem, apresentamos argumentos teóricos vindos da literatura em Educação Matemática.

[3] Estaremos sempre nos referindo ao volume 3 destinado a esta área.

Mendes et al. (2006), buscaram Fauvel e Maanen, no livro “Using history in mathematics education” (1991), para o enriquecimento dos argumentos favoráveis à integração da História na Educação Matemática.

> 1) A História aumenta a motivação e a aprendizagem da Matemática;
> 2) Humaniza a Matemática;
> 3) Mostra o seu desenvolvimento histórico através da ordenação e apresentação de tópicos do currículo;
> 4) Os alunos compreendem como os conceitos se desenvolveram;
> 5) Contribui para as mudanças de percepções dos alunos com relação a Matemática;
> 6) A comparação entre o antigo e o moderno estabelece os valores das técnicas modernas a partir do conhecimento desenvolvido ao longo da História da sociedade;
> 7) Ajuda a desenvolver uma aproximação multicultural para a construção do conhecimento matemático;
> 8) Suscita oportunidades para a investigação Matemática;
> 9) Pode apontar possíveis aspectos conceituais históricos da Matemática que dificultam a aprendizagem dos estudantes;
> 10) Contribui para que os estudantes busquem no passado soluções matemáticas para o presente e projetem seus resultados no futuro;
> 11) Ajuda a explicar o papel da Matemática na sociedade;
> 12) Faz da Matemática um conhecimento menos assustador para os estudantes e para comunidade em geral;
> 13) Explora a História ajudando a sustentar o interesse e a satisfação dos estudantes;
> 14) Fornece oportunidades para a realização de atividades extracurriculares que evidenciem trabalhos de outros professores e/ou outros assuntos (caráter interdisciplinar da História da Matemática).
> (FAUVEL e MAANEN apud MENDES et al., 2006, p. 86)

Os argumentos favoráveis à integração da História da Matemática ao ensino são vários, além dos já citados. Vamos acrescentar mais dois argumentos, referidos por Miguel (1997), que julgamos compatíveis no contexto da nossa pesquisa.

> 1) A História pode servir de apoio para se atingir, com os alunos, objetivos pedagógicos que os levem a perceber, dentre outras coisas: a Matemática como uma criação humana; as razões pelas quais as pessoas fazem Matemática; as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento da Matemática;
> 2) A História é um instrumento que pode promover a aprendizagem significativa e compreensiva da Matemática.
> (MIGUEL, 1997 apud ROQUE E GOMES, 2012, p. 82)

Tzanakis, Arcavi et al. (2000 apud ROQUE E GOMES, 2012) afirmaram que a prática didática de professores e seu repertório pedagógico pode ser enriquecido e aperfeiçoado mediante a interação com a História da Matemática no processo educacional.

A História da Matemática pode ser incorporada ao processo de ensino-aprendizagem da Matemática que ocorre em sala de aula, de acordo com Ferreira e Rich (2001, apud D`AMBROS, 2006), de duas maneiras: implícita, ou seja, ocorre quando a História é utilizada como sinalizador do caminho a ser seguido, ou explicita quando a ênfase é colocada na própria História (ROQUE e GOMES, 2012).

Em nossa investigação em sala de aula, fizemos uso da História da Matemática de maneira implícita e explícita.

Iran Mendes (2009), autor de pesquisa que defende o uso da abordagem histórica e investigativa nas aulas de Matemática, afirma que quando as informações históricas são investigadas, interpretadas, experimentadas e analisadas "os estudantes iniciam um processo de elaboração mental e simbólica que favorece a abstração dos conceitos matemáticos investigados" (MENDES, 2009, p. VII).

O texto abaixo aponta o pensamento dos pesquisadores em Educação Matemática, acerca da importância da História da Matemática na educação:

> Existe um consenso quase unânime, entre os pesquisadores em Educação Matemática, acerca da importância da perspectiva histórica e da fundamentação epistemológica na formação científica. Nos últimos anos a História da Matemática vem se incorporando, sobretudo à teoria e à prática do ensino da Matemática. Assim estabeleceu uma aproximação entre essas duas áreas de conhecimento, que já foram consideradas tradicionalmente alheias entre si. (VALDÉS, 2006, p. 9)

Mesmo quase sendo um consenso unânime a utilização da História entre os pesquisadores em Educação Matemática, não somos ingênuos de acreditar que a História é a solução para todas as complexidades vividas em sala de aula de Matemática. Contudo, em nossa visão, pensamos que a História possa contribuir para modificar a atitude do aluno em relação à Matemática.

Para a realização do nosso trabalho, desenvolvido no Capítulo 3, ou seja, um pouco da História da Análise Combinatória, encontramos dificuldades na execução. Fizemos um estudo sobre a História da Análise Combinatória, baseados em Boyer(1974), Eves (2004), Ifrah (2005) e outros.

2.2. Resolução de Problemas

Os primeiros escritos, referentes à Matemática, que vieram até nós das antigas civilizações, são problemas, em sua maioria, práticos e utilitários, do dia a dia, geralmente ligados à agricultura, criação de animais e às construções.

A preocupação em resolver problemas é bem antiga. Vê-se que já existia em torno de 1650 a.C., que é a data aproximada do papiro Rhind (ou Ahmes), um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas. O papiro Rhind é uma fonte primária rica sobre a Matemática egípcia antiga; descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias[4], sua solução para o problema de determinar a área de um círculo e muitas aplicações da Matemática a problemas práticos (EVES, H. 2004).

No nosso entendimento, a Resolução de Problemas deve ser usada para aprender conceitos e solidificar o conhecimento matemático adquirido. Quando selecionamos problemas para o ensino-aprendizagem, queremos que os alunos tenham uma compreensão de uma Matemática ainda não estudada por eles.

Considere a visão de Van de Walle, a respeito da Resolução de Problemas para aprender Matemática:

> Os estudantes devem resolver problemas não para aplicar Matemática, mas para aprender nova Matemática. Quando os alunos se ocupam de tarefas bem escolhidas baseadas na Resolução de Problemas e se concentram nos métodos de resolução, o que resulta são novas compreensões da Matemática embutida na tarefa. (WALLE, 2009, p. 57).

Entre as definições de problema em Matemática, buscadas na literatura em Educação Matemática, vamos destacar a definição de Hiebert et al. (1997, apud WALLE, 2009, p. 57), por considerarmos relevante para este trabalho:

> Um problema é definido aqui como qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitadas ou memorizadas e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método “correto” específico de solução.

A seleção de propostas deve buscar especificamente problemas que agucem a curiosidade dos alunos e estejam relacionados a fatos reais, e a maneira como trabalhar em sala de aula através da Resolução de Problemas, de igual importância para o ensino e aprendizagem da Matemática. Por isso, descreveremos abaixo,

---

[4] Frações unitárias são aquelas com o numerador igual a 1.

recorrendo principalmente Walle (2009) e as ideias de D'Ambrosio (1993) alguns atributos que nos ajudaram em sala de aula para nossa investigação.

Na visão de Walle (2009, p. 59):

> Ao resolverem problemas, os alunos necessariamente estão refletindo sobre as ideias inerentes aos problemas. Essas ideias emergentes serão provavelmente mais integradas com as já existentes e, portanto haverá uma melhor compreensão. Ao contrário, não importa quão habilmente um professor forneça explicações, instruções (ou receitas), os alunos continuarão a dar atenção às instruções, mas raramente as ideias.

Nesta visão existe a preocupação de trabalhar com a Matemática em sala de aula dando valor às ideias extraídas dos problemas e à criatividade, desenvolvida pelos alunos, para um melhor entendimento.

De acordo com Walle (2009), ensinar por Resolução de Problemas é difícil, pois as tarefas devem ser planejadas a cada dia e a compreensão atual dos alunos, levando em conta as necessidades curriculares. Contudo há boas razões para prosseguir nesse esforço.

> - A Resolução de Problemas concentra a atenção dos alunos sobre as ideias e em dar sentido às mesmas;
> - A Resolução de Problemas desenvolve nos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer Matemática e de que a Matemática faz sentido;
> - A Resolução de Problemas fornece dados contínuos para a avaliação que podem ser usados para tomar decisões educacionais, ajudar os alunos a ter um bom desempenho e a manter os pais informados;
> - A Resolução de Problemas possibilita um ponto de partida para uma ampla gama de alunos. As boas tarefas, baseadas em Resolução de Problemas, possuem múltiplos caminhos para chegar a solução;
> - Uma abordagem de Resolução de Problemas envolve os estudantes de modo que ocorrem menos problemas de indisciplina;
> - A Resolução de Problemas desenvolve "o potencial matemático";
> - É muito divertido! Os professores que ensinam deste modo nunca retornam a um método de ensinar por exposição de regras (e receitas).
>
> (WALLE, 2009, p. 59)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, consideram a Resolução de Problemas como a chave mais importante do ensino da Matemática.

> O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a

> exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las (BRASIL, 1997, p. 43).

Podemos perceber a importância dada à Resolução de Problemas para o ensino e aprendizagem de Matemática.

A Resolução de Problemas como arte é descrita por Polya (2006) que apresenta o método de Resolução de Problemas em quatro fases básicas, isto é, compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospectiva (verificação); para aplicar métodos criativos de Resolução de Problemas e usar estratégias a serem desenvolvidas em sala de aula.

Ressaltamos que as quatro fases enfatizadas por Polya não correspondem a uma sequência rígida, pois caso haja necessidade, deve-se verificar o que foi feito antes.

Como resolver problemas a partir das ideias de Polya

Com base em Polya (2006), descrevemos algumas orientações e condutas para a Resolução de um Problema em Matemática, em aula.

O professor deve escolher bem o problema, de modo que não seja nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante. O auxílio dado ao estudante deve ser, nem demais e nem de menos, pois se demais nada sobra para o estudante fazer e também se for deixado sozinho é possível que não tenha qualquer progresso.

O professor deve colocar-se no lugar do aluno e fazer perguntas ou indicações que possam ocorrer ao estudante. A atuação do professor deve ser com discrição e naturalidade.

Na 1ª. fase é preciso compreender o problema, pois de acordo com Polya (2006, p. 5), "é uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida".

Tomando-se algumas indagações, relativas ao problema, de forma natural e simples:

- O que o problema quer saber (a incógnita)? Considere cada detalhe com o intuito de perceber alguma nova interpretação.
- Quais as informações (são os dados) que podemos extrair do problema?
- O problema tem alguma condição (condicionante)?

Em Polya (2006, p. 29), “a atenção concebida ao problema pode também estimular a memória e propiciar a recordação de pontos relevantes”.

Na 2ª. fase, quando resolver um problema, procure uma ligação entre dados e a incógnita. Veja se há algum problema antes resolvido, que possa ajudar a chegar a um plano para a resolução. O alcance do plano, pelo menos de modo geral, os conduz aos cálculos ou aos desenhos que precisamos para encontrar a incógnita. Em Polya (2006, p. 7), “o principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano”.

Na 3ª. fase, execução de um plano de resolução, geralmente, é muito mais fácil, basta verificar (ou revisar) cada passo, o que o levou à resolução, realizando todas as operações algébricas e geométricas que já verificou serem viáveis. Caso necessário, faça alguma correção. De modo que o estudante deve ficar convicto da correção de cada passo e nas demonstrações.

Finalmente, na 4ª. fase, examine a solução obtida, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que o fez chegar a este; os estudantes, de acordo com Polya (2006, p. 12), “poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas”. O estudante deve verificar também se consegue alcançar o resultado por outro caminho. O resultado (ou método) alcançado, talvez, seja possível aplicar em algum outro problema.

A Resolução de Problemas é fundamental para ensinar e aprender Matemática, especialmente em Análise Combinatória, que em sua essência trata de problema. Por isso, também, apoiado nas ideias de D’Ambrosio (1993), descritas abaixo, trabalhamos com a Resolução de Problemas em sala de aula:

> Assim como no processo de construção da Matemática como disciplina, a essência do processo é a pesquisa, na construção do conhecimento para cada aluno, a essência do processo tem que ser a pesquisa. Dificilmente o aluno de Matemática testemunha a ação do verdadeiro matemático no processo de identificação e solução de problemas. O professor faz questão de preparar todos os problemas a serem apresentados com antecedência; consequentemente, o legítimo ato de pensar matematicamente é escondido do aluno, e o único a conhecer a dinâmica desse processo continua sendo o professor. O professor, com isso, guarda para si a emoção da descoberta de uma solução fascinante, da descoberta de um caminho produtivo, das frustações inerentes ao problema considerado e de como um matemático toma decisões que facilitam a solução do problema proposto. O que o aluno testemunha é uma solução bonita, eficiente, sem obstáculos e sem dúvidas, dando-lhe a

> impressão de que ele também consegue resolver problemas matemáticos com tal elegância. (D'AMBROSIO, 1993, p. 36)

Nesta perspectiva, no nosso entender, a construção do conhecimento matemático é feita por quem aprende Matemática, os alunos, de onde vem as dúvidas, os erros e os questionamentos. De modo que os alunos são levados a um trabalho, em sala de aula, que considera as observações, as descobertas, frustações com os erros, os acertos e fundamentalmente ousadia para a tomada de decisões e para a resolução de um problema proposto. Essas ações são tomadas em compartilhamento: professor e alunos. Não desejamos que os alunos vejam uma Matemática "pronta e acabada", sem margem de dúvidas, mas sim como um processo, por meio de questionamento, em busca de respostas. Enfim, como uma ciência, de fato.

O nosso trabalho foi desenvolvido através dessa interação, isto é, dar ênfase ao ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória usando a História da Matemática como ferramenta didática, associada com a Resolução de Problemas e ações tomadas em compartilhamento professor e alunos para a construção de conhecimentos.

A própria História da Matemática indica que a Matemática foi construída em respostas a problemas de ordem prática.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) recorreram ao desenvolvimento da História da Matemática para justificar a inserção a Resolução de Problemas como ponto chave do ensino e aprendizagem da Matemática.

> A História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática. (BRASIL, 1997, p. 42)

Acreditamos que a prática didática de sala de aula, nas aulas de Análise Combinatória, pode ter a sua sequência pedagógica enriquecida e aprimorada mediante a interação da História da Matemática e a Resolução de Problemas, pois tanto a História da Matemática quanto a Resolução de Problemas são ricas em significados, podendo assim trazer para a aprendizagem da Matemática mais compreensão e significados.

Ressaltamos que não encontramos nenhuma pesquisa que trouxesse o binômio: História da Matemática e Resolução de Problemas para o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória. Embora, entre os pesquisadores em Educação Matemática, tanto a História da Matemática quanto a Resolução de Problemas venha recebendo atenção.

2.3. Discussões sobre o Ensino da Matemática

Quais os maiores desafios encontrados pelo professor no ensino de Matemática? Os problemas do ensino da Matemática estariam na utilização de métodos tradicionais? O que fazer para superar as dificuldades dos alunos? A participação do aluno é fundamental para o ensino? A aprendizagem significativa crítica pode facilitar o processo de ensino-aprendizagem?

Minha experiência como docente há mais de vinte e cinco anos me autoriza a dizer que o ensino, geralmente, que ocorre nas escolas é aquele em que o conceito de “verdade” é absoluto. Em particular nessa visão há uma polarização do tipo boa ou má, a existência sempre de uma e somente uma resposta “certa”; o conceito que a tecnologia é boa, é progresso, é qualidade de vida; o conceito de que o conhecimento é “transmitido” por uma autoridade superior (professor) tem que ser aceito sem questionamento (pelo aluno); o conceito de que a Matemática foi construída por seres especiais, “gênios”, que está pronta e acabada e não pode ser também questionada.

Essa perspectiva mecanicista é denominada por Freire (2003) como concepção bancária que se funda em conceitos mecânicos, estáticos e consideram os educandos como recipiente. A tarefa do professor é o de “encher” os educandos de conteúdos e de fazer depósitos de falsos saberes que eles consideram como verdadeiro e único.

Dessa concepção mecanicista resultam pessoas passivas, com dogmas conservadores. Entretanto, entendemos justamente o contrário, que os alunos se apropriem de um conteúdo matemático que pode ser questionado, como um processo.

Para o nosso feito, em sala de aula, encontramos, nas reflexões de Moreira (2011) elementos que valorizam o conhecimento prévio dos alunos. Este processo, que não é literal e nem arbitrário, o novo conhecimento adquire significados para o aluno e o conhecimento prévio fica mais riqueza, mais estabilidade e, de modo que, mesmo os alunos fazendo parte dessa cultura, não se deixam subjugarem por ela, por seus ritos, mitos e ideologias.

De acordo com Moreira (2011, p. 225) “a aprendizagem significativa caracteriza-se pela interação entre o novo conhecimento e o conhecimento prévio”. Logo, a aprendizagem se torna progressiva, ou seja, vai sendo captada e internalizada progressivamente através da linguagem e da interação social, principalmente.

> [...] Aprender um conteúdo de maneira significativa é aprender sua linguagem, não só palavras, (...). Aprendê-la de maneira crítica é perceber nessa nova linguagem como uma nova maneira de perceber o mundo. O ensino deve buscar a facilitação dessa aprendizagem e, ai, entra em cena o princípio da interação social e do questionamento; a aprendizagem da nova linguagem é mediada pelo intercâmbio de significados, pela clarificação de significados, enfim, pela negociação de significados que é feita por meio da linguagem humana. (MOREIRA, 2011, p.232)

O questionamento como sinalizado por Moreira (2011) pode ser interpretado como o início do diálogo de uma aprendizagem significativa em que o professor e aluno compartilham e problematizam conhecimentos. É a discussão polêmica que conduz a um pensar reflexivo e crítico e como consequência, certamente, a uma aprendizagem significativa critica. Moreira (2011, p.228) ainda afirma que “o fundamental é que o professor e alunos tenham uma postura dialógica, aberta, curiosa, indagadora e não apassivada, enquanto falam ou ouvem”.

> [...] um ensino centrado na interação entre professor e alunos enfatizando o intercâmbio de perguntas tende a ser crítico e suscitar a aprendizagem significativa crítica. (...) “Uma vez que se aprende a formular perguntas – relevantes, apropriadas e substantivas – aprende-se a aprender e ninguém mais pode impedir-nos de aprendermos o que quisermos.” (MOREIRA, 2011, p.228)

Dentro desse questionamento acontecem as negociações que se expressam num jogo de relevâncias e significados presentes no encontro entre professor e aluno. Não podemos desconsiderar que os significados sejam quais forem, são atribuídos às pessoas que na prática dialógica estão associados aos seus conhecimentos prévios. Conforme Moreira (2011) quando o aprendiz não consegue atribuir significados as suas palavras a aprendizagem é mecânica, não significativa.

Esclarecemos aqui que em Moreira (2011), na perspectiva da aprendizagem significativa crítica afirma que é permitido ao sujeito fazendo parte de sua cultura, ao mesmo tempo, estar fora dela, manejar a informação, criticamente, não se sentir paralisado diante dela; mudar sem ser dominado pela mudança; fazer uso de novas tecnologia sem idolatrá-la; rejeitar as verdades fixas, as certezas, as definições absolutas, as entidades isoladas.

Ainda de acordo com Moreira (2011), em relação à aprendizagem significativa crítica é preciso aprender que aprendemos a partir do que já sabemos. Desta forma, ele apresenta nove princípios fundamentais para que haja aprendizagem significativa crítica.

> Aprender/ensinar perguntas ao invés de respostas (Princípio da interação social e do questionamento); aprender a partir de distintos materiais educativos (Princípio da não centralidade do livro de texto); aprender que as pessoas são perceptoras e representadoras do mundo (Princípio do aprendiz como preceptor/representador); aprender que a linguagem está totalmente implicada em qualquer e todas as tentativas humanas de perceber a realidade (Princípio do conhecimento como linguagem); aprender que o significado está nas pessoas, não nas palavras (Princípio da consciência semântica); aprender que o homem aprende corrigindo seus erros (Princípio da aprendizagem pelo erro); aprender a desaprender, a não usar conceitos e estratégias irrelevantes para a sobrevivência (Princípio da desaprendizagem); aprender que as perguntas são instrumentos de percepção e que as definições e metáforas são instrumentos para pensar (Princípio da incerteza do conhecimento); aprender a partir de distintas estratégias de ensino (Princípio da não utilização do quadro de giz). (MOREIRA, 2011, p.240)

Esses princípios resumem a aprendizagem significativa crítica, de modo que, para que ela ocorra é necessário que o professor esteja atento a interação, respeitando a percepção prévia do aluno, suas experiências e sua predisposição, para relacionar de maneira não arbitrária o novo conhecimento com o conhecimento prévio.

> Mas se já se sabe o que é aprendizagem significativa, quais são as condições para que ocorra e como facilitá-la em sala de aula, o que falta para que se possa promovê-la como uma atividade critica?
> Na verdade, falta muito. A começar pela questão da predisposição para aprender. Como provoca-la? Muito mais do que motivação, o que está em jogo é a relevância do novo conhecimento para o aluno. Como leva-lo a perceber como relevante o conhecimento que queremos que construa? (MOREIRA, 2011, p.226)

No decorrer da História da humanidade percebemos algumas situações, como fatos ou feitos, que permite com a ajuda de algumas indagações, que o aluno construa conceitos de Análise Combinatória. Nesse sentido, pensamos que tanto professor como alunos, ao problematizar o mesmo tema, aprofundam conhecimentos e encontram significados e possivelmente se apropriam de novos conceitos.

2.4. Análise Combinatória

Aqui daremos uma definição de Análise Combinatória, adequada ao Ensino Médio, em seguida uma segunda definição de maneira mais geral; e, por último exporemos um pouco dessa teoria, para embasar os capítulos que se sucedem.

O que é Análise Combinatória?

Nesta pesquisa, utilizaremos a definição de Análise Combinatória, de acordo com Hazzan (2004, p. 1), que diz que:

> A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitem contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos, agrupamentos formados sob certas condições.

A definição acima está de acordo com a Combinatória estudada no Ensino Médio, onde desenvolvemos este trabalho. Porém, para uma definição de modo mais geral, “[$\cdots$] podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas”, Morgado et al. (2006, p. 1).

Dois tipos de problemas que ocorrem com frequência na Combinatória, ainda segundo Morgado et al. (2006, p. 2), são “contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas” ou os denominados problemas de existência que têm por objetivo “demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições”, como os Princípios de Dirichlet e de Inclusão e Exclusão.

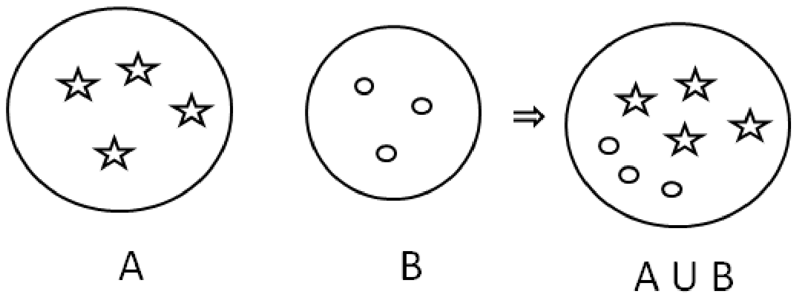
Para os autores referidos, “a procura por técnicas de contagem está diretamente vinculada à história da Matemática” (MORGADO et al, 2006, 17). Além disso, afirmam que a origem das operações aritméticas estão ligadas a problemas de contagem, o que vem ao encontro com nosso pensamento.

Princípio de Adição

O enunciado do Princípio de Adição de acordo com Morgado et al. (2006), nos diz:

"Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p+q$ elementos." (MORGADO et al., 2006, p. 18). A seguir, podemos encontrar a ilustração do Princípio da Adição na Figura 1.

Figura 1: Ilustração do Princípio de Adição



Fonte: Adaptado de Morgado et al. (2006, p. 18)

Princípio da Multiplicação

Considerando d_1, d_2, x e y números naturais, o Princípio da Multiplicação pode ser definido em Morgado et al. (2006), como:

> Se uma decisão d_1 pode se tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é xy. (MORGADO et al., 2006, p. 18)

O Princípio da Multiplicação ou Multiplicativo (PM) é também conhecido como Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e é válido para qualquer número de decisões.

Pretendemos dar importância à Resolução de Problemas combinatórios com base no "Princípio Multiplicativo" ou simplesmente PM. Pois, segundo Bachx et al. (1975, prefácio):

> A Análise Combinatória era um verdadeiro tabu para os estudantes. Era mesmo considerada um dos assuntos mais difíceis de

> compreensão em Matemática. Todavia, com a utilização sistemática do Princípio Multiplicativo, tudo se tornou mais simples.

Os autores Bachx e outros reconhecem a importância que deve ser dada ao "PM" para o ensino e aprendizagem em Análise Combinatória.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, no que se refere ao tratamento da informação, evidencia especialmente o PM:

> Relativamente à combinatória, o objeto é levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o Princípio Multiplicativo da Contagem. (BRASIL,1997, p. 57)

Para a Análise Combinatória estudada no ensino médio, ou seja, o estudo de problemas de contagem, o Princípio de Multiplicação junto com o Princípio de Adição formam o alicerce para esse estudo. Nossa preferência é usar esses princípios para a Resolução de Problemas do que solucioná-los usando as fórmulas tradicionais da Combinatória. Salientamos que alguns problemas discutidos, nos encontros em sala de aula, foram resolvidos sem o uso de fórmulas, isto é, somente com o Princípio Multiplicativo, e com o uso de fórmulas. Para que os alunos percebessem principalmente caminhos diferentes de resolução. Contudo deixamos a cargo do aluno a escolha.

A seguir destacamos alguns conceitos básicos utilizados na Análise Combinatória importantes para o desenvolvimento desse tema da Matemática:

Fatorial

Para simplificação de expressões que aparecem em Análise Combinatória, iremos definir fatorial baseados em Hazzan (2004), conforme descrição abaixo:

> Definição:
> Seja um número inteiro não negativo $(n \in N)$ definimos fatorial de n (e indicamos por $n!$) através da relação:
> $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ para $n \geq 2$. (HAZZAN, 2004, p. 19)

Com a propriedade $n! = n(n-1)!$, sendo $n \in N, n \geq 3$, podemos válida em situações particulares o conceito de fatorial, fazendo $n = 2$, acontece: $2! = 2(2-1)! \therefore 2! = 2 \cdot 1!$ $2 \cdot 1 = 2 \cdot 1! \therefore 1! = 1$. Por outro lado fazendo $n = 1$ na igualdade $n! = n(n-1)!$, acontece: $1! = 1(1-1)! \therefore 1! = 1 \cdot 0! \therefore 1! = 0! \therefore 0! = 1$.

Tipos de Agrupamentos

Um agrupamento de elementos é qualquer conjunto ordenado ou não desses elementos, que podem ser símbolos, pessoas, objetos ou acontecimentos. Basicamente temos dois tipos de agrupamentos: arranjos, onde a ordem dos elementos em cada agrupamento é importante e combinações, em que ordem dos elementos em cada agrupamento não é importante.

Arranjos Simples

Podemos definir arranjo simples como Santos et al. (2007):

> Arranjos simples de n elementos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$, são todos grupos de p elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos elementos que compõem cada grupo (SANTOS et al., 2007, p. 57).

Fórmula[5] para obtenção do número de arranjos simples de n elementos tomados p a p ($A_{n,p}$):

$A_{n,p}$ pode ser calculado pelo PM, assim, temos:

Para a 1ª decisão temos n possibilidades (ou maneiras)

Para a 2ª decisão temos $(n-1)$ possibilidades

Para a 3ª decisão temos $(n-2)$ possibilidades

e assim por diante até a pª decisão, isto é, $n(-(p-1))$ possibilidades

Pelo PM, vem:

$$A_{n,p} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots (n-(p-1))}_{p-fatores}$$

ou

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2).(n-3) \cdots (n-p+1)) \qquad (1)$$

Multiplicando e dividindo o 2º termo da igualdade por $\frac{(n-p)!}{(n-p!)}$, temos:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2).(n-3) \cdots (n-p+1)) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

---

[5] Todas as fórmulas serão justificadas na sequência didática dos encontros com os alunos em sala de aula.

$$A_{n,p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-3) \cdots (n-p)!}{(n-p)!}$$

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \qquad (2)$$

As fórmulas (1) e (2) são equivalentes, porém a segundo está mais simplificada com a notação de fatorial.

Permutações Simples

Para Santos et al. (2007, p. 44), "Uma permutação de n objetos distintos e qualquer agrupamento ordenado desses objetos $[\cdots]$."

Fórmula para a obtenção do número de permutações simples dos n objetos (P_n):

Perceba que o número de permutações simples de n elementos (objetos) é um caso particular do número de arranjos simples de n elementos tomados p a p, onde $p = n$, ou seja, o que queremos dizer é que $P_n = A_{n,n}$. Assim:

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

$$P_n = n!$$

De acordo com Morgado et al. (2006, p. 27) "já que $0! = 1$, define-se, $P_0 = 1$".

Combinações Simples

Segundo Santos et al. (2007, p. 62), "Combinações simples de n elementos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$, são todas as escolhas não ordenadas de p desses n elementos."

Fórmula para obtenção do número de combinações simples de n elementos tomados p a p ($C_{n,p}$): Cada combinação de n elementos tomados p a p, isto é, $C_{n,p}$ ($p \leq n$) corresponde $p!$ arranjos, que são obtidos pela permutação dos elementos da combinação.

Em símbolos, temos: $A_{n,p} = p! \cdot C_{n,p} \Rightarrow C_{n,p} = \dfrac{A_{n,p}}{p!} = \dfrac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!} \Rightarrow$

$$C_{n,\,p} = \frac{n\,!}{p\,!\,(n-p)\,!}$$

Em Análise Combinatória temos problemas que exigem alta dose de criatividade, além disso, usando somente o Princípio Fundamental da Contagem para resolvê-los pode ser bastante trabalhoso, por isso muitas vezes utilizamos uma ou mais dessas técnicas de contagem (PM, Arranjo, Permutações ou Combinações) para resolvê-los.

3. UM POUCO DE HISTÓRIA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

A História da Matemática em nossa pesquisa foi usada como um instrumento facilitador do ensino, para desenvolver conceitos e noções pertinente a Análise Combinatória. "A História é um instrumento que pode promover a aprendizagem significativa e compreensiva da Matemática (MIGUEL, 1997 apud ROQUE E GOMES, 2012, p. 82)".

Assim, a História da Matemática pode ser mais que uma motivação, potencializando a aprendizagem significativa e a predisposição a aprender.

A seguir, para complementar a pesquisa, descrevemos brevemente a História da contagem na História da humanidade a fim de destacar alguns fatos e feitos realizados, pincipalmente, pelas antigas civilizações, pelos matemáticos a partir do século XVII, e que hoje colocaríamos no campo da Análise Combinatória. Destacamos que os fatos históricos aqui descritos foram baseados principalmente em Boyer (1979), Eves (1995) e Ifrah (2005).

3.1. A contagem na História das civilizações

O homem primitivo (ou das cavernas) em algum momento não sabia contar, porque não tinha a necessidade de contar. Podemos considerar essa afirmação analisando seu modo de vida; por exemplo, ele era nômade, andava em pequenos grupos, abrigava-se em savanas ou cavernas, alimentava-se da caça e da coleta de alimentos, não comercializava, isto é, não comprava, não vendia, logo não precisava de dinheiro, não plantava, não criava animais e nem fazia sua casa.

Vendo o modo de vida dos homens dessa época, nada os obrigava ou os fazia sentir a necessidade de contar, portanto não contavam. Ifrah (2005) nos traz uma argumentação, como prova que o homem do passado não sabia contar, recorrendo a etnografia, um ramo especial da antropologia, para analisar algumas grupos humanos, que existem ainda hoje, e que vivem de forma análoga ao homem primitivo. Quando nos diz: "o fato é certo: houve um tempo em que o ser humano não sabia contar. A prova: atualmente existem ainda homens incapazes de conceber qualquer número abstrato e que não sabem nem que dois e dois são quatro!" (IFRAH, 2005, p. 15).

Os homens incapazes a que Ifrah (2005) se refere são os indígenas, tais como os zulus e pigmeus, da África, os aranda e os kamilarai, da Austrália, os aborígines das ilhas Murray e até mesmo os botocudos, do Brasil, ou outros indígenas de regiões dispersas.

De acordo com Malba Tahan (1965) alguns autores fazem a distinção de números concretos e abstratos, outros acham um absurdo essa distinção. Para eles só existem números abstratos e, por outro lado, existem pessoas que creem somente em números concretos. Malba ainda conta que o matemático Ari Quintela classifica como número concreto aquele que vem seguido de uma unidade. Por exemplo, oito livros, sete casas. Já o número abstrato é o número não seguido de unidades.

Embora o homem da idade das pedras (ou homem primitivo), em algum momento de sua história, não soubesse contar, ele tinha a capacidade de distinguir pequenas quantidades, porém essa não é uma característica somente do ser humano; até alguns animais apresentam essa percepção, que em Matemática é denominada de “sentido numérico” ou “sensação numérica”.

Surge naturalmente a pergunta: Como o homem aprendeu a contar?

De acordo com Ifrah (2005), baseando-se apenas na experiência, ou seja, sem um estudo formal, obtivemos a invenção dos números, que provavelmente correspondeu a preocupações práticas e utilitárias.

Os pequenos grupos de nômades pouco a pouco se tornavam cada vez maiores e acabaram formando as pequenas aldeias e, bem depois, ainda de maneira gradativa, surgiram as cidades e assim foi até a formação das grandes civilizações do passado.

O que fez o homem se tornar sedentário, com habitação fixa, foram, a agricultura e a criação de animais. Com a agricultura houve a necessidade de contar os dias para a colheita de alimentos. Por outro lado, o pastoreio surgiu com a retenção de animais selvagens para reserva de alimentos e por consequência muitos desses animais foram domesticados pelo homem.

Existia uma necessidade e preocupação de setores da sociedade de aprimoramento da contagem. Neste sentido Ifrah (2005) nos diz que:

> é a história das necessidades de grupos sociais ao buscar recensear seus membros, seus bens suas perdas seus prisioneiros, ao procurar datar a fundação de suas cidades e de suas vitórias utilizando os meios disponíveis. (IFRAH, 2005, p. 10)

O fio condutor da História da Contagem não foi a lógica

> Foram as preocupações de contadores, mas também de sacerdotes, de astrônomos-astrólogos e somente em último lugar de matemáticos, que presidiram à invenção e à evolução dos sistemas de numeração. (IFRAH, 2005, p.12)

Uma das primeiras formas de contagem, possivelmente ocorreu com algum pastor cuidando de um grupo de ovelhas, tal que todos os dias pela manhã ao levá-las para o pasto de modo que cada ovelha do rebanho estava associada a uma pedrinha (ou pauzinho, concha, etc.), correspondência um a um, ou também chamada de correspondência biunívoca ou modernamente uma bijeção. No final do dia quando voltava com o rebanho, novamente fazia a associação de cada pedrinha a uma ovelha. Isso era feito para ter certeza se algum animal ficou no pasto ou a criação aumentou com o nascimento de mais animais, ou ainda se outro animal juntou-se ao seu rebanho. A correspondência biunívoca (bijeção) foi de suma importância para juntar pedrinhas e saber a quantidade de ovelhas.

Se referindo à bijeção, Ifrah (2005, p. 29), declara: "foi sem dúvida graças a este princípio que, durante milênios, o homem pré-histórico pode praticar a aritmética antes mesmo de ter consciência e de saber o que é um número abstrato".

Modernamente, segundo Ifrah, o que denominamos de "contar" (objetos de uma coleção), nada mais é do que:

> "contar" os objetos de uma coleção é destinar a cada um deles um símbolo (uma palavra, um gesto ou um sinal gráfico, por exemplo) corresponde a um número tirado da "sequência natural de números inteiros", começando pela unidade e procedendo pela ordem até encerrar os elementos. Nesta coleção assim transformada em sequência, cada um dos símbolos será, consequentemente, o número de ordem do elemento ao qual foi atribuído. E "o número de integrantes deste conjunto" será o número de ordem do último de seus elementos. (IFRAH, 2005, p. 44)

Não só as pedrinhas eram usadas para contagem, mas também marcas em ossos, pedras, madeiras, nós em corda, parte do corpo humano, por exemplo, as falanges dos dedos, os dedos da mão, uma das mãos (referindo-se a 5), duas mãos (referindo-se a 10), etc.

> [...]na Europa, há poucos séculos, ainda se calculava não com algarismos, mas com os dedos da mão ou por meio de fichas sobre mesas, e que se fazia a contabilidade através de entalhes em madeira. (IFRAH, 2005, p. 10)

Podemos considerar, segundo Domingues (1991), que é vantajoso calcular assim (por meio de partes do corpo, por meio de fichas, etc.), por que:

> cada elemento do conjunto a ser quantificado associando-se uma marca ou algum elemento de outro conjunto (mais fácil de ter junto a si e de manipular), o qual passa então a servir de referência. (DOMINGUES,1991, p. 1)

Quando o homem tornou-se sedentário, trabalhando na agricultura, na criação de animais, construção de moradia, armazenamento de alimentos, com o comércio rústico, na base do troca-troca e com o sentimento de propriedade teve a necessidade maior da contagem.

Em relação a pergunta: quando o homem aprendeu a contar? Vamos buscar dois grandes historiadores Gundlach (1991) e Eves (2004), cujas respostas são:

> Não temos dados suficientes para fixar o período da história primitiva em que foram descobertos os números cardinais. Os mais antigos documentos escritos de que dispomos mostram a presença do conceito igualmente na China, Índia, Mesopotâmia e Egito. Todos esses documentos contém a questão “Quantos”? Esta questão pode ser respondida de forma mais adequada em termos de números cardinais. Portanto, quando esses primitivos documentos foram escritos, e provável muito antes dessa época, o conceito de números cardinal já se tinha formado.
> (GUNDLACH,1991, p. 1)
>
> O conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se tão antes dos primeiros registros históricos (há evidências arqueológicas de que o homem, já há 50000, era capaz de contar) que a maneira como ocorreu é largamente conjectural. (EVES, 2004, p. 25)

Ifrah (2005) afirma que contar, como entendemos hoje, é uma faculdade humana, somente o homem tem essa capacidade, e assim diz:

> [...] a contagem é com feito um atributo exclusivamente humano: diz respeito a um fenômeno mental muito complicado, intimamente ligado ao desenvolvimento da inteligência. (2005, p. 44)

Percebemos que com o passar do tempo a necessidade de contar objetos de um conjunto foi surgindo e provavelmente por razões práticas e utilitárias. A princípio, contar parece ser uma tarefa bem simples e de fato é, quando os elementos do conjunto considerado são poucos, porém quando estes elementos são muitos e é preciso contá-los sob certas condições, teremos que ter técnicas de contagem mais sofisticadas, ou seja, Análise Combinatória. Ressaltamos, ainda que, muitos problemas de Análise Combinatória requerem plena compreensão do enunciado e uma dose alta de criatividade para sua resolução.

Buscando Polya (2006), na fase de "Estabelecimento de um Plano" para resolução de um problema, vemos que ele vê essa fase como o principal feito, ou tomamos a liberdade de dizer a mais criativa:

> Realmente, o principal feito da resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano. Esta ideia pode surgir gradualmente ou, então, após tentativas infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo, como uma "ideia brilhante". (POLYA, 2006, p. 7)

Sabemos que a escrita veio depois da contagem, mas para a ocorrência da escrita, também houve a necessidade de se criar um conjunto de símbolos e regras, para o surgimento de palavras com sentido, esse fato criou a necessidade de combinações de símbolos com regras.

3.2. Contribuições das antigas civilizações para a Análise Combinatória

Através de estudos realizados descreveremos atividades, problemas ou acontecimentos ocorridos nas civilizações antigas, que contribuíram para a Análise Combinatória, não, contudo, numa ordem cronológica.

Os Egípcios

"O Egito é um presente do Nilo." (HERÓDOTO, século V a.C.). A civilização egípcia antiga era isolada naturalmente, não aberta a invasores, governada pelos faraós, ricos e poderosos, amigos dos sacerdotes. Por outro lado, havia uma outra classe, bem mais numerosa, que fazia o trabalho braçal, a classe dos escravos.

Devido ao clima seco, muitos documentos, os chamados papiros, foram conservados. Entre eles os principais e mais antigos que dizem a respeito de Matemática são os papiros de Rhind ou Ahmes (1650 a.C.), que se encontra no Museu Britânico, e, o papiro de Moscou ou Golems (1850 a.C.), encontra-se no Museu de Belas Arte de Moscou.

Os egípcios por razões culturais tinham cuidado com seus mortos, por isso construíram tumbas e templos. As famosas pirâmides do Egito foram construídas como túmulos reais, com suas paredes marcadas com informações importantes de Matemática. Por outro lado atingiram um alto grau de desenvolvimento, em relação as outras civilizações de sua época, tinham uma Matemática notável, aplicada às construções e à agrimensura, mas ao que tudo indica; segundo Eves (2004), a Matemática egípcia não atingiu o nível de desenvolvimento da Matemática da Babilônia (do sul do Iraque até o Golfo Pérsico).

Em que os egípcios contribuíram para a Análise Combinatória? Para termos uma noção em que os egípcios contribuíram, vamos discutir o problema 79 (ou dos Bens) do papiro de Rhind, que é um dos mais antigos documentos sobre Combinatória. Considere no documento referido os seguintes dados (EVES, 2004, p. 75):

Figura 2: Dados apresentados no Problema dos Bens

Bens	
Casas	7
Gatos	49
Ratos	343
Espigas de trigo	2401
Hecates de grãos	16 807
Total	19 607

Fonte: Adaptação de EVES (2004, p. 75)

Ou também podemos escrever os bens, conforme o entendimento magnífico do historiador Moritz Cantor (1907), assim:

> Uma relação de bens consistia em sete casas; cada casa tinha sete gatos; cada gato comeu sete ratos; cada rato comeu sete espigas de trigo; e cada espiga de trigo produzia sete hecates de grãos. Casas, gatos, ratos, espigas de trigo e hecates de grãos, quantos havia disso tudo? (EVES, 2004, p. 76)

A formulação do problema acima foi dada pelo o historiador Moritz Cantor em 1907. Quando percebeu que poderia interpretá-lo, de modo interessante, ao comparar os dados do problema com um problema da idade média, que aparece no *Líber Abaci* (1202) de Leonardo Fibonacci, (EVES, 2004, p. 76). Escrito a seguir:

> Há sete senhoras idosas na estrada de Roma. Cada senhora terá sete mulos; cada mulo transporta sete sacos; cada saco contém sete pães; com cada pão há sete facas; para cada faca há sete bainhas. Entre mulheres, mulos, sacos, pães, facas e bainhas, quantos estão na estrada de Roma? (EVES, 2004, p. 76)

Sobre a ótica do Raciocínio Combinatório o problema dos “Bens” sugere a aplicação do “Princípio Multiplicativo”. Por exemplo, o número de ratos foi obtido fazendo $7 \times 7 \times 7 = 343$. Percebemos também um outro princípio básico de contagem, chamado de “Princípio de Adição”, quando fazemos a união de dois conjuntos disjuntos, e, obtemos um terceiro conjunto cujo número de elementos é igual a soma dos elementos dos conjuntos anteriores. Por exemplo, o conjunto das casas com o conjunto dos gatos é $7 + 49 = 56$.

A nível de Ensino Médio, o Princípio Multiplicativo, de acordo com Morgado et al. (2006) ao lado do Princípio de Adição, “constitui a ferramenta básica para resolver os problemas de contagem.” (MORGADO et al. 2006, p.18)

Em Biggs (1979), podemos também encontrar o Princípio de Adição e o Princípio da Multiplicação sendo considerados como a pedra fundamental da Combinatória.

Os Gregos

Os grandes rios foram de fundamental importância para a maioria das grandes civilizações, pois eram fontes de água, de alimentos, enfim fonte de vida. O rio Nilo foi de suma importância para os egípcios, assim como os rios Tigre e Eufrates para os mesopotâmicos, o rio Indo para os hindus e de modo análogo assim aconteceu para outras civilizações. Porém os gregos não se estabeleceram às margens de nenhum grande rio e sim numa região montanhosa, com quase sempre planícies entre as montanhas e muitas pequenas ilhas, com uma costa considerada uma das maiores em extensão do planeta, em relação à superfície. A agricultura era de caráter familiar, em pequenas propriedades e os cultivos em destaque eram uvas e azeitonas. Mantinham um comércio desenvolvido e um sistema de transporte de navegação organizado. A cultura grega foi a que mais influenciou a nossa civilização ocidental.

Aqui o que mais nos interessa são os problemas ou atividades que podemos associar à Análise Combinatória.

Euclides de Alexandria

Quase nada se sabe, com precisão, sobre Euclides, mas é possível afirmamos que aproximadamente 300 a.C. ele foi morar em Alexandria, capital do

Egito, que estava sob o domínio grego. A História conta que em Alexandria ele liderou um grupo de pesquisa em Matemática e escreveu uma obra conhecida como “Elementos de Euclides” ou simplesmente “Elementos”, formada por treze livros, contendo geometria plana e espacial, teoria dos números e álgebra elementar (geométrica). A obra “Elementos” superou todos os trabalhos que tinham sidos publicados até então. Em respaldo à importância dessa obra, Eves (2004, p. 167) nos conta que: “Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico.” Não há dúvida que Euclides teve a influência de Tales de Mileto (640-548 a.C.) e de Pitágoras de Samos (582-497 a.C.), quando escreveu os “Elementos”.

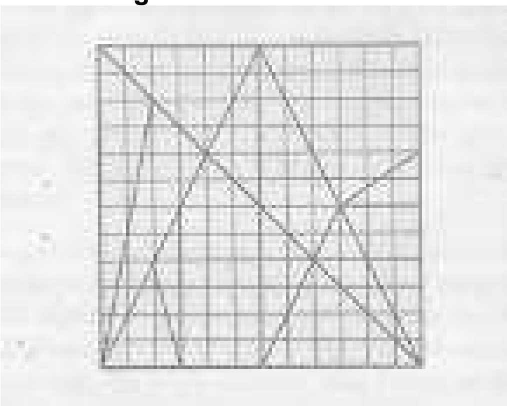
No livro II, de Euclides, de acordo com Eves (2004), encontramos quatorze proposições e a proposição II estabelece a identidade $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (2004, p. 170). O 2º lado da identidade, isto é, o desenvolvimento do binômio, os coeficientes têm significado para a Análise Combinatória. Esse fato relata a ocorrência de um dos primeiros problemas de Análise Combinatória.

Arquimedes de Siracusa

Arquimedes, o maior matemático da Antiguidade, está entre os três maiores matemáticos de todos os tempos, junto com Newton e Gauss. Nasceu na cidade grega de Siracusa (ilha da Sicília) em torno de 287 a.C. e morreu em 212 a.C. Suas contribuições não se restringem somente a Matemática, mas as ciências como um todo.

Em que Arquimedes contribuiu para a Análise Combinatória? Em documentos publicados, por Arquimedes, que chegaram até nós, encontramos o Stomachion (o significado da palavra em grego é o mesma para estômago), que a princípio parecia somente um jogo de quebra-cabeça, de catorze peças que formavam um quadrado, depois de encaixadas, semelhante a um tangram, conforme a Figura 3.

Figura 3: O Stomachion



Fonte: (TAVARES e BRITO, 2005, p. 34)

Na Figura 3, podemos observar as catorze figuras (peças) que constituem o Stomachion. Tavares e Brito (2005, p. 35), contam onde foi realizada essa pesquisa e quem foi o mentor:

> [...] em dezembro de 2003, o jornal americano The New York Times publicou um artigo intitulado In Archimedes Puzzle, a New Eureca Moment, sobre os resultados da pesquisa do historiador de Matemática Reviel Netz, da Universidade de Stanford, Califórnia, em que ele afirma que o Stomachion não era um mero passatempo, mas um objeto executado por Arquimedes para fins de Análise Combinatória. Mais especificamente, a conclusão de Netz é que Arquimedes desejava determinar de quantas formas distintas poderiam ser encaixadas as 14 peças para formar o quadrado.

A solução desse problema, de acordo com Tavares e Brito (2005), dá 17152 modos ou, não considerando as soluções obtidas por reflexões, rotações e simetria, 268, e só foi encontrada em 2003, com o uso da informática, de matemáticos e estatísticos, mas ninguém sabe se Arquimedes conseguiu esse resultado; o que nos parece é que ele tenha dedicado muito tempo analisando o Stomachion.

A importância do fato é que ele revela um dos documentos mais antigos a respeito do raciocínio combinatório.

Os Chineses

As civilizações da China são, provavelmente, mais antigas do que a civilização egípcia e a mesopotâmica. A China teve seu desenvolvimento as margens dos rios Yang-Tze e Howang Ho (ou Amarelo). A criação de animais não era tão desenvolvida quanto a sua agricultura; governada pelos imperadores fundadores de dinastias e a Matemática dessa época era bem desenvolvida, mas existe pouco material de natureza primária que veio até nós. Esse fato foi devido aos materiais[6] que usavam para escrever, como fibra de entrecasca de árvores e bambus, que são bastantes perecíveis e, além disso, em 213 a.C., o então imperador chinês, mandou queimar os livros. Mais tarde muitos livros foram reconstruídos de memória, pelos escribas reais, que tinham a função de registrar fatos e feitos.

Diferente dos chineses e hindus, os mesopotâmicos e os egípcios escreviam seus feitos em materiais não perecíveis. Os mesopotâmicos registravam em tábuas de argila cozida, já os egípcios escreveram seus documentos em pedras ou papiros (uma espécie de papel).

De acordo com Boyer (1974) existe uma tradição que coloca o início do império chinês em 2750 a.C., aproximadamente. Por outro lado, outros avaliadores colocam as civilizações primitivas da China por volta do ano 1000 a.C. Além disso, existe uma dificuldade de datar os documentos matemáticos da Antiguidade da China, devido ao fato de cada obra construída envolvia vários autores e em períodos distintos.

As obras mais antigas de Matemática na China nos trazem informações que podemos associar ao que chamamos hoje de Análise Combinatória. Recorrendo a Eves (2004), encontramos as seguintes informações sobre a China antiga:

- “sistema de numeração mais avançado do mundo de então...”
- “Os mais antigos exemplos de quadrados mágicos”
- “cálculos de raízes quadradas e cúbicas”
- “a mais antiga apresentação preservada do chamado triângulo aritmético de Pascal”
- “é possível então que o teorema do binômio já fosse conhecido na China de longa data”
  (EVES, 2004, p. 242- 246)

Sistema de numeração

Os chineses já apresentavam dois sistemas de numeração, desde os tempos primitivos. O científico ou também conhecido como sistema de numerais em barras, que é essencialmente posicional, de base 10 e teve um caráter importante para a Matemática chinesa antiga.

> Um sistema de numeração muito interessante é o chinês cientifico (ou em barras) que provavelmente remonta no tempo a mais de dois

[6] Os hindus também usavam esses materiais para suas escritas.

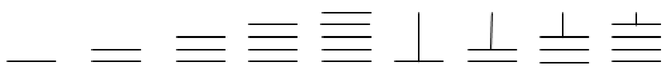
> milênios. O sistema é essencialmente posicional, de base 10. A Figura 2 mostra como se representavam os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 quando aparecem em posições ímpares (unidades, centenas etc.). Mas esses dígitos, quando aparecem em posições pares (dezenas, milhares etc.), são representados como mostra a Figura 3. Nesse sistema passou-se a usar um círculo, como zero, a partir da dinastia Sung (960-1126)."
> (EVES, 2004, p. 45)

As Figuras 2 e 3 relatada na citação acima refere-se as Figuras 4 e 5 apresentadas a seguir, respectivamente:

Figura 4: Algarismos em posições ímpares

Fonte: (EVES, 2004, p. 45)

Figura 5: Algarismos em posições pares



Fonte: (EVES, 2004, p. 46)

No outro sistema de numeração, poderíamos chamá-lo de sistema de agrupamento multiplicativo, predominava o Princípio Multiplicativo. De acordo com Boyer (1974), esse sistema é assim caracterizado:

> [...] havia símbolos diferentes para os dígitos de um a dez e símbolos adicionais para as potências de dez, e nas formas escritas os dígitos em posições ímpares (da esquerda para a direita ou de baixo para cima) eram multiplicados pelo sucessor. (BOYER, 1974, p. 145)

Veja o exemplo extraído de Ifrah, para representar o número 79 564 nesse sistema: "[...] escreve-se o símbolo de 10 000 precedido do algarismo para 7, depois o de 1 000 precedido do algarismo 9, o de 100 precedido do algarismo para 5, o de 10 precedido de 6 e enfim o algarismo para 4." (IFRAH, 2005, p. 232)

Destacamos que os múltiplos de 10, 100, 1 000 e 10 000 são figurados de acordo com o Princípio Multiplicativo. Assim, podemos dizer que o Princípio Multiplicativo era conhecido na China antiga; porém dizer qual é a data é conjectural, pois segundo Boyer (1974), se referindo à China antiga, nos diz:"[...] Datar os documentos matemáticos da China não é nada fácil" (1974, p. 143).

Eves (2006), nos acrescenta como os chineses faziam as operações aritméticas, em relação ao ábaco chinês:

> "[...] as operações aritméticas elementares eram efetuadas em tábuas de contar. O familiar ábaco chinês, o suan pan, que consistia em contas móveis ao longo de varas ou arames paralelos por sobre um tabuleiro, descende dessa forma primitiva de calcular." (EVES, 2006, p. 242)

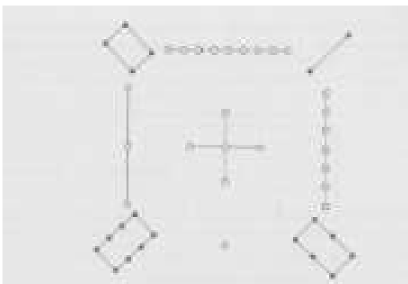
Quadrados mágicos

De acordo com Boyer (1974) e Eves (2004) os quadrados mágicos mais antigos surgiram na China. Ainda, segundo Eves (2004), "nenhuma abordagem Matemática chinesa antiga, por mais breve que seja, pode deixar de mencionar o quadrado mágico chamado de Lo Shu" Eves (2004, p. 268).

O *I-King* ou Livro das Permutações (1182-1135 a.C.) é um dos clássicos da Matemática chinesa, que de acordo com Eves (2004), nele aparece o exemplo mais antigo de quadrado mágico, Figura 6. Conta a lenda que o imperador Yu, por volta de 2200 a. C., foi quem o viu, desenhado por meio de nós em cordas, nós pretos para números pares e nós brancos para os ímpares, na carapaça de uma tartaruga divina, às margens do rio Amarelo.

Convém comentar que se a lenda a respeito do quadrado mágico, em relação a data que o imperador o viu, "valesse", teríamos aí, talvez, o primeiro problema escrito, relacionado à Combinatória. Logicamente ainda num estado bruto. Mas como já comentamos é muito difícil confiar em datas de acontecimentos da China antiga.

Figura 6: O Lo Shu



Fonte: (EVES, 2004, p. 269)

Outra representação simplificada para o quadrado mágico de ordem 3, está apresentada na Figura 7.

Figura 7: Quadrado mágico de ordem 3

4	9	2
3	5	7
8	1	6

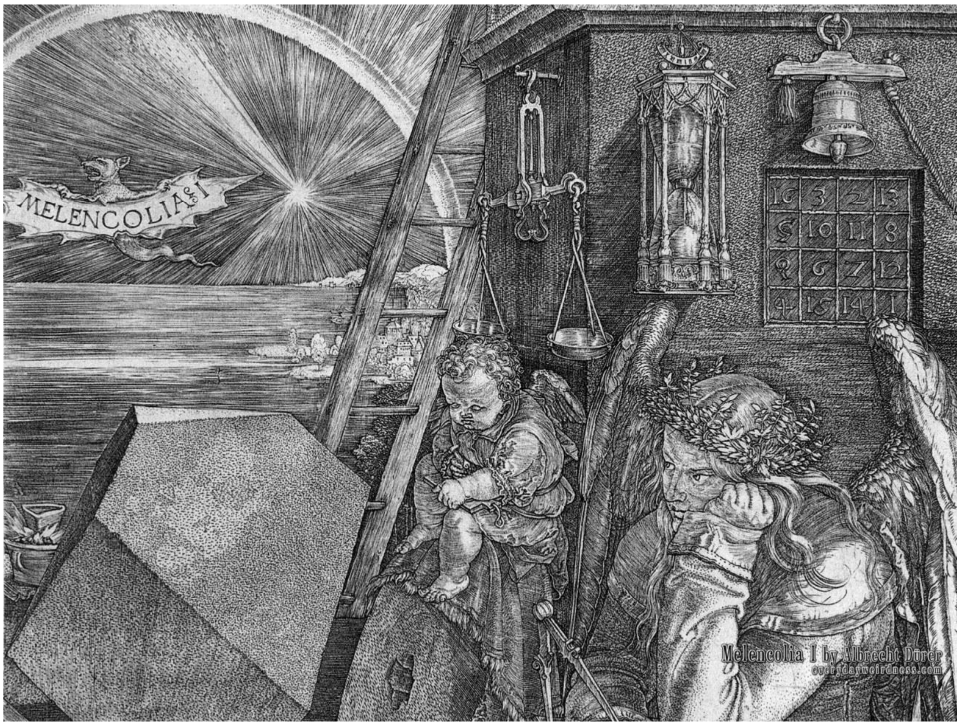
A Figura 7 é um arranjo quadrado de numerais, com 9 inteiros distintos, colocados de modo que os números de uma linha qualquer, de uma coluna qualquer ou de um das diagonais possuem o mesmo valor, ou seja, a mesma soma ou constante mágica do quadrado, no caso a constante mágica do quadrado é 15.

Quando fixamos condições para contagem dos arranjos, estamos considerando situações que estudamos em Análise Combinatória.

Os quadrados mágicos, segundo Gundlach (1992), não ficaram limitados à China. Chegaram ao Japão, Oriente Médio, no séc. IX na Arábia, Índia no séc. XI, para os hebreus séc. XII, na Europa séc. XV, em muitas situações ligados ao misticismo e em outras como passatempo. No séc. XIII já eram conhecidas regras para as construções de quadrados mágicos de ordem ímpar, embora em 1686 o estudo desses quadrados já se estendeu-se para três dimensões. A partir do séc. XIX surgem aplicações desses quadrados em probabilidades e análise e, recentemente, aplicações no planejamento de experimentos, com os quadrados grego-romanos.

Na Figura 8, aparece uma gravura de 1500, aproximadamente, e ao lado direito, na parte superior, um quadrado mágico.

Figura 8: A Melancolia de Albrecht Düer



Fonte: (EVES, 2004, p. 320)

Cálculos de Raízes Quadradas e Cúbicas

Em Boyer (1974), num comentário do primeiro século ao "*Chi-Chang Suan-Shu*" ou "Nove capítulos sobre a arte matemática" (livro de Matemática chinês, talvez o mais influente), podemos encontrar regras para obtenção de raízes quadradas e cúbicas.

Esclarecemos que a Matemática da época não tinha a riqueza do simbolismo que temos hoje. Os problemas de Matemática eram resolvidos por escrito e por meio de uso de regras, mas é lógico que os escritos matemáticos antigos, não diferem em sua essência ou conteúdo como nós abordamos hoje. O que muda é apenas a "roupagem moderna" de abordagem.

Convém comentar que a Matemática chinesa antiga, segundo Eves (1974), não tinha demonstrações como apresentadas pelos grego.

É interessante saber que a extração de raízes era feita usando a extensão do binômio $(a+b)^n$, onde n é inteiro positivo, o que pode ser feito de muitas maneiras. Já tínhamos comentado que o binômio foi um dos primeiros problemas ligados à Análise Combinatória. Todavia as aplicações do binômio não ficam restritas somente à Combinatória. Como, exemplo, a extração de raiz quadrada.

Vamos ver a extração da raiz quadrada de 38, por aproximação, fazendo uso da "roupagem moderna". Conhecida a identidade $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b(2a+b)$ e tomando-se $(a+b)^2 = 38$, temos que encontrar $a+b$. Daí:

$$38 = (a+b)^2 = a^2 + b(2a+b)$$

Para obtermos a, temos que encontrar o maior valor inteiro positivo de a, de forma que a^2 não supere 38. Logo, $a = 6.$ O próximo passo é achar b.

Fazendo uma sequência de aproximações, começando com $b_0 = 0$, iremos obter $b_1, b_2, b_3,$ e assim por diante até onde acharmos conveniente a aproximação.

Em $38 = a^2 + b_1(2a + b_0)$, fazendo $b_0 = 0,$ vamos obter b_1.

$$b_1 = \frac{38 - a^2}{2a + b_0} = \frac{38 - 6^2}{2 \cdot 6 + 0} = 0{,}166666 \text{ , } b_2 = \frac{38 - a^2}{2a + b_1} = \frac{38 - 36}{12 + 0{,}166666} = 0{,}164383 \text{ ,}$$

$$b_3 = \frac{2}{12 + 0{,}164383} = 0{,}164414 \text{ , } b_4 = \frac{2}{12 + 0{,}164414} = 0{,}164414 \text{ .}$$

Logo, a raiz quadrada de 38 até a quinta casa decimal é $6{,}16441$.

De modo semelhante podemos encontrar raízes cúbicas, quárticas, etc.

Triângulo Aritmético e Teorema do Binômio

O triângulo aritmético é uma tabela de números, vindos dos coeficientes do desenvolvimento dos binômios $(a+b)^0$, $(a+b)^1$, $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, $(a+b)^5$ e assim por diante, formando uma tabela numérica triangular, onde os coeficiente são dispostos, sucessivamente de cima para baixo, e ilimitado para baixo ou até a linha que desejarmos.

Figura 9: Triângulo aritmético

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1 E assim por diante

O triângulo aritmético recebe vários nomes de acordo com o lugar do mundo. Por exemplo os franceses ou ocidentais chamam de triângulo de Pascal, na Itália de triângulo de Tartaglia, na China de Yang Hui. Além desses nomes, outras denominações aparecem como triângulo de Tartaglia-Pascal, triângulo aritmético de Pascal ou triângulo combinatório.

Regras de construção

- Toda linha começa e termina por 1.
- A soma de dois elementos consecutivos de uma linha é igual ao elemento localizado na linha seguinte, embaixo do segundo número somado. (É uma identidade combinatória)

Os coeficientes (ou também conhecidos como coeficientes binomiais) das expressões binomiais têm um significado importante na Análise Combinatória. Além disso podemos extrair desse triângulo identidades de Combinatória com diversas aplicabilidades.

Um dos livros valiosos da China é datado entre 1261 e 1275, escrito por Yang Hui, e representa, segundo Eves (2004), uma espécie de extensão dos Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática. Encontramos nele a mais antiga preservação do chamado triângulo aritmético de Pascal.

Eves (2004), nos mostra outro clássico chinês com o triângulo aritmético posterior a este e aponta a possibilidade do teorema do binômio já ter sido conhecido pelos chineses a um certo tempo. Assim:

> $[\cdots]$ Há uma outra manifestação do triângulo num livro posterior escrito por Chu Shï-kié em 1303; é interessante que Chu fala do como algo já antigo em seu tempo. É possível então que o teorema do binômio já fosse conhecido na China de longa data. (EVES, 2004, p. 246)

Os Hindus

Com base em Boyer (1974) e Eves (2004) podemos considerar que os indianos dos primeiros tempos, entre 3000 e 1500 a.C., habitavam na região do rio Indo, às margens do deserto de Thar. A Índia antiga era formada de grande número de pequenos principados desunidos; pouco se sabe sobre a Matemática desses antigos habitantes, devido a falta de documentos da época. Mas através de escavações arqueológicas de algumas de suas cidades encontramos informações preciosas, principalmente nas cidades de Harapa e Mohenjo Daro. Com base nessas escavações temos provas de que foi uma civilização bem desenvolvida e isso aconteceu na época das construções das pirâmides egípcias. Em Mohenjo Daro foram encontradas redes de esgoto, piscinas públicas, entre outras construções; tinham um sistema de contagem, pesos e medidas, tudo isso revela a garantia de conhecimentos de Matemática. Sofreram diversas invasões e foram exterminados, provavelmente pelos Arianos (bandos de nômades) por volta de 1500 a.C.

A religião Védica (donde vem o Hinduísmo), entre 1500 a 600 a.C., apresentou uma Matemática geométrica, voltada para a construções de altares para seus deuses, porém foi através dessa religião que apareceram a Resolução de Problemas não triviais. Com o declínio da religião Védica surgiram duas outras protestantes dos sacrifícios cruentos dos rituais da primeira: o Budismo e Jainismo.

Os jainas

Os jainas, de acordo com Silveira (2001), passavam por longos treinamento e estudavam a *Ganitanuyoga***,** ou Matemática, que fazia parte da vida religiosa que levavam. A Vikalpa (ou Combinatória) foi um dos temas preferidos de estudo dos jainas. Devido ao fato deles terem uma concepção atomística do mundo físico, davam uma atenção especial à Combinatória. O átomo, ou parmanu, era considerado indivisível e atemporal. Possuía cor, cheiro, gosto e textura, de modo que somente essas qualidades podiam ser mudadas. Os seus átomos dispõem de 5 tipos de cor, 2 cheiros distintos, 5 gostos possíveis e 8 tipos de textura. Problema Combinatório: quantas são as combinações que podem ser feitas com 3 sabores (gostos) distintos? (Por exemplo: doce, salgado e azedo)

Já tínhamos falado acerca de materiais perecíveis usados nas escritas de algumas das antigas civilizações. No caso da Índia eles também escreviam em folhas de palmeiras, por isso muitas obras da Índia antiga não sobreviveram e das que sobreviveram, na maioria das vezes, não aparecem o nome do autor.

Na literatura jaina encontramos livros que têm Combinatória e triângulo aritmético. Os livros *Bhagabati Sutra* (300 a.C.) e Sthananga Sutra (200 a.C.), ambos sem o nome do autor, tratam de Combinatória (são regras para o cálculo de combinações e arranjos). Mas também encontramos livros do jainismo com autoria e assunto ligados à Análise Combinatória e o triângulo aritmético, como *Chanda Sutra* (200 d.C.) de autoria de Pingala, o *Ganita Sara Samgraha* (850 d.C.) de

Mahavira e o Mritasanjivani (950 d.C.) de Halayudha, sendo que nesse último encontramos assuntos que já tinham sidos tratados por Pingala, como o denominado triângulo aritmético (ou *meruprastara*, em homenagem ao Monte Meru) e a regra de Pingala – regra usada para a construção de um triângulo aritmético - 450 anos, depois de Pingala.

Regra de Pingala

A regra de Pingala para a construção o triângulo é assim descrita: Desenhe um quadradinho; abaixo dele desenhe dois outros, de modo que juntem-se no ponto médio da base dele; abaixo desses dois, desenhe outros três e assim por diante. A seguir, escreva 1 no primeiro quadradinho e nos da segunda linha. Na terceira linha escreva 1 nos quadradinhos dos extremos, e no meio escreva a soma dos números imediatamente acima dele.

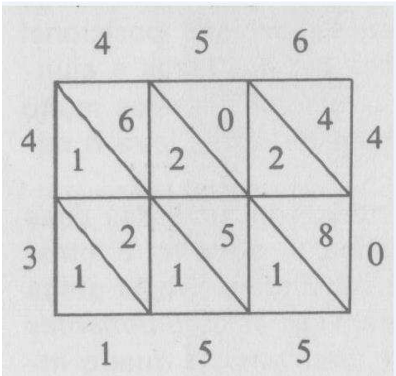
Sistema de numeração hindu

Com base em Boyer (1974), encontramos a primeira referência específica a respeito dos números hindus, datando de 662, escrito pelo bispo sírio Severus Sebokt, admirador das descobertas astronômicas, dos métodos de cálculo e da computação dos hindus. Sebokt se irritava com aqueles que só faziam fé na cultura grega e menosprezavam as não-gregas.

O sistema de numeração hindu estava associado a três princípios básicos, ou seja, base decimal, uma notação posicional e uma forma cifrada para cada um dos dez numerais. Esses princípios não são de origem hindu, porém a parte brilhante que cabe aos hindus foi a ideia de juntá-los pela primeira vez, para a formação de seu sistema de numeração e assim foi construído o moderno sistema de numeração.

A adição e a multiplicação dos hindus eram bem parecidas com as que a gente faz hoje. Para a multiplicação eles usavam um esquema denominado de multiplicação em reticulado (ou em células, ou em gelosia, entre outros nomes). Um exemplo, para termos uma noção do que vem atrás disso. Queremos o produto 456 por 34. Considere:

Figura 10: Multiplicação por reticulado



Fonte: Boyer (1994, p. 158)

- Acima do reticulado temos 456 que é o multiplicando
- A esquerda temos 34 o multiplicador
- Os produtos parciais ocupam as células quadradas, de modo que cada produto em uma célula está escrito abaixo (dezena) e acima (unidade) da diagonal da célula correspondente.
  Exemplo: na linha 1 e coluna 1, encontramos 16, que vem da multiplicação de 4 por 4.
- Os algarismos das diagonais são somados
- O produto final está abaixo e a direita do reticulado, ou seja, 15504

Podemos perceber o “nosso” Princípio da Multiplicação.

Bhaskara

Bhaskara Acharya, viveu entre 1114 a 1185, na Índia e foi considerado o maior matemático de sua época. Traz também contribuições para à Análise Combinatória, em sua obra mais conhecida, denominada *Lilavati* (significa Graciosa). Nela encontramos problemas combinatórios semelhantes aos que aparecem em livros didáticos de hoje.

3.3 Acontecimentos e matemáticos europeus a partir do século XVII

O século XVII para a Matemática foi especial. Várias contribuições para a Matemática surgiram, assim como a invenção da geometria analítica, do cálculo, da teoria das probabilidades, entre outras, e novos campos de pesquisa. Embora, ainda não existissem grupos de matemáticos organizados; Itália, França e Inglaterra já contavam com grupos profissionais de matemáticos que se intercomunicavam.

De acordo com Eves (2004, p. 340), ao relacionar os fatos sociais com o desenvolvimento da Matemática, nos informa: “O grande ímpeto dado à matemática no século XVII foi partilhado por todas as atividades intelectuais e se deveu, em grande parte, sem dúvida, aos avanços políticos, econômicos e sociais da época.”

Para a Análise Combinatória foi simplesmente fantástico o séc. XVII, e isso foi possível graças ao surgimento da teoria das probabilidades. Neste capítulo temos como intenção mostrar acontecimentos e matemáticos europeus, que a partir do séc. XVII, contribuíram para esses avanços.

Os jogos

As culturas primitivas, em sua maioria, praticavam atividades com algum tipo de dados. Em períodos bem remotos, encontra-se um jogo denominado astrágalo, que é o antecessor do atual dado. O astrágalo é um osso, ou melhor, um ossinho, encontrado na pata traseira de certos animais, como o carneiro e a cabra, possui quatro faces distinguíveis e quando lançado ao chão, repousa-se sobre uma das faces. Vários jogos eram realizados com astrágalos. Entre eles, um jogo bem comum era usar quatro peças e observar as faces que apareciam para cima, depois de jogarem as peças em uma superfície; com valores atribuídos às combinações e normalmente as mais valiosas eram as que apresentavam mais faces distintas. Entre os judeus o jogo era proibido e repreendido sob pena de morte. Por outro lado, em Roma e na Grécia o entusiasmo pelo jogo era tanto que houve necessidade de proibi-lo em certos períodos.

O jogo de cartas, atualmente os baralhos, pode ter surgido na China, Índia ou Egito. Mas nem todas as pessoas tinham acesso as cartas. O fato era devido a seu custo; somente com a invenção da imprensa no século XV passou a ser mais comum. A invenção da imprensa foi fundamental para a divulgação de novos conhecimentos.

De acordo com o texto de Domingues (citado em IEZZ et al., 1990), muito tempo se passou até haver uma associação dos jogos com a Matemática. Isso veio a ocorrer, de maneira mais formal (com um certo tratamento matemático), no séc. XVII, tempo do grande matemático Pascal e seus contemporâneos.

Probabilidades e Análise Combinatória

Um dos amigos de Pascal, Antoine Gombaud, o Chevalier de Méré (1607-1684), frequentador presente das mesas de jogo, enviou a ele alguns problemas sobre jogos, a fim de que fossem examinados por Pascal. Este teve muito interesse pelos problemas e resolveu também enviá-los ao amigo matemático Pierre de Fermat (1601-1665), para o estudo dos problemas. A partir daí começou a haver correspondência entre esses matemáticos. Devido a essas correspondências, diz-se que surgiu a teoria das probabilidades, o que hoje denominaríamos de probabilidades finitas.

Com a necessidade de determinar o número de possibilidades existentes nos jogos, ocorreu o desenvolvimento de novas técnicas de contagem, ou melhor, a Análise Combinatória, que começa a ter um tratamento científico (ou formalizado), o que até então não havia acontecido.

Na visão de Tavares e Brito (2005), “Um grande desenvolvimento da Análise Combinatória ocorreu devido aos problemas originados com os jogos de azar” (p. 35), entre esses referidos jogos, encontram-se os jogos de cartas, dados e moedas. A teoria das probabilidades, ainda de acordo com os referidos autores, foi um “terreno fértil para o desenvolvimento de novas técnicas da Análise Combinatória” (p. 36).

Os matemáticos desse tempo não estavam tão atraídos com estes novos assuntos, a teoria das probabilidades e a Análise Combinatória; porque a atenção da maioria deles estava voltada à criação do cálculo[7], assunto de grande aplicabilidade. Mas, de modo natural a teoria das probabilidades continuou seu desenvolvimento, devidos às várias aplicações que surgiam, como exemplo, estudar situações como taxas de mortalidade, prêmios de seguros e muito mais.

Girolamo (Jerônimo) Cardano (1501-1576), nasceu em Pávia, Itália. Era médico por profissão; dedicou-se à Matemática; deixou vários livros escritos; entre eles o *De Ludo Aleae* (Sobre os jogos de azar), publicado em 1663. O livro expõe conselhos sobre os jogos, ou um manual do jogador, e *De Ratiociniis in Ludo Aleae* as primeiras noções sobre probabilidades.

---

[7] Newton e Leibniz são considerados os pais do cálculo. (BOYER, 1974)

As informações a seguir sobre Pascal e contemporâneos foram realizadas com base em Boyer (1974) e Eves (2004).

Pascal e contemporâneos

Blaise Pascal (1623-1662), filho do matemático Ètienne Pascal (1588-1640), nasceu na província francesa de Auvergne e desde novo revelava-se habilidoso para a Matemática. Embora, por ordem de seu pai, a educação inicial estava limitada ao estudo de línguas, mas no intervalo do recreio e de modo oculto, por sua própria vontade, em poucas semanas, Pascal estudou geometria e descobriu diversas das propriedades das figuras geométricas. O pai de Pascal ficou tão feliz com a nova atividade do filho que lhe deu de presente um exemplar dos Elementos de Euclides. Aos quatorze anos Pascal já participava de reuniões informais da Academia de Mersenne em Paris.

Os resultados das correspondências entre Pascal e Fermat, causadas por De Méré, não foram publicadas por eles. Porém, em 1657, o matemático holandes Christian Huygens (1629-1695), com base nas correspondências entre os franceses, publicou um pequeno folheto, intitulado "*De Ratiociniis in Ludo Aleae*" (ou Sobre o Raciocínio em Jogos de dados). Enquanto isso acontecia, Pascal realizava uma ligação do estudo das probabilidades com o triângulo aritmético em 1653.

O *Traiaté du Triangle Arihmétique* de Pascal já existia antes de Pascal. Os hindus em 300 a.C. e os chineses em torno de 1250 e muitas outras pessoas de nacionalidades distintas o conheciam, antes de Pascal. Mas Pascal estudou as diversas relações que envolviam os números do triângulo e muitas destas relações foram desenvolvidas por ele.

A construção do triângulo aritmético no tempo de Pascal (veja Figura 11) é diferente da que usamos hoje.

Figura 11: *Traiaté du triangle arihmétique*

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \cdots \\
1 & 4 & 10 & 20 & 35 & \cdots \\
1 & 5 & 15 & 35 & 70 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots
\end{array}$$

Fonte: Adaptação de EVES (2004, p. 364)

Uma de suas propriedades é: a partir da segunda linha, qualquer elemento é dado pela soma dos elementos da linha anterior, situado acima dele ou à esquerda. Como exemplo, $6 = 3 + 2 + 1, 4 = 3 + 1$.

Pascal ficou conhecido no mundo ocidental por causa do desenvolvimento e aplicações que realizou com as propriedades do triângulo. Por isso o triângulo recebeu o nome no ocidente de triângulo de Pascal.

Uma das primeiras aparições do princípio de indução matemática é encontrado no tratado de Pascal sobre o triângulo.

Uma das aplicações realizada por Pascal foi a determinação dos coeficientes binomiais da expressão de $(x + y)^n$.

Pascal para resolver problemas de probabilidade, que eram necessários para obter o número de combinações de n elementos tomados p de cada vez (ou p a p), ele expressava verbalmente e, corretamente afirmava como obter. Fazendo uso do simbolismo moderno, Pascal afirmava que:

$$\frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Onde o símbolo $n!$ (leia: fatorial de n), introduzido pela primeira vez em 1808, pelo professor Chistian Kramp (1760-1820) de Estrasburgo, França, cuja intenção era simplificar a escrita.

O inglês Isaac Newton (1642-1727), nasceu no dia de Natal, no ano em que morreu Galileu. Em 1661, por influência de um tio, por parte materna, que estudara em Cambridge, veio a estudar no *Trinity College*.

Praticamente nos anos 1665 e 1666, devido à peste, o *Trinity College* ficou fechado. Então nesse período Newton foi para casa e realizou quatro de suas principais descobertas, ou seja, o teorema binomial, o cálculo, a lei da gravidade e a natureza das cores.

A maior contribuição de Newton para o desenvolvimento da Análise Combinatória foi a fórmula para a expansão do “binômio de Newton” (teorema binomial), como conhecemos hoje, desenvolvido em 1664, talvez em 1665. Os coeficientes binomiais para as potências inteiras já eram conhecidos por muitos matemáticos há pelo menos cinco séculos antes de Pascal, mas eles não usavam a notação exponencial de René Descartes (1596-1650). Esse fato impedia de realizar a transição de potências inteiras para fracionárias. A sugestão de potências fracionárias também foi dada por Michael Stifel (1486?-1567) e Girard Desargues (1591-1661), entretanto somente com Jhon Wallis (1616-1703) os expoentes fracionários começaram a ser usados.

O teorema binomial descrito, explicado e mostrado por Newton, foi enviado, em duas cartas a Henry Oldenbure (1615-1677), secretário da Royal Society, em 1676. Nessas cartas Newton anunciava pela primeira vez o teorema, para calcular diretamente $(1+x)^n$, sem ter que recorrer a $(x+1)^{n-1}$, ou em outras palavras, cada coeficiente pode ser obtido usando o anterior e além disso generaliza o resultado para $(x+y)^q$, onde q é um número racional. A partir daí a fórmula obtida para seu desenvolvimento passou a ser denominada de fórmula do binômio de Newton. O teorema binomial não foi publicado por Newton, mas por Wallis, em 1685, que atribuiu todo o mérito a Newton.

Se referindo a forma de expressão dada por Newton (e Wallis), Boyer (1974, p. 288) nos diz: “Que a descoberta não foi uma simples substituição de potência inteira por fracionária; foi resultado de muitas tentativas e erros da parte de Newton em relação a divisão e radicais envolvendo quantidades algébricas”.

Outros grandes matemáticos do tempo de Pascal e que vieram após ele se dedicaram também ao desenvolvimento da Análise Combinatória. Matemáticos como, Euler, Jacques Bernoulli, Laplace e outros

Leonhard Euler (1707-1783) nasceu na Basiléia, Suíça. Seu pai um pastor calvinista, com certa vocação para a Matemática, ensinou-lhe os fundamentos da Matemática e conseguiu que o filho viesse a estudar com Johann Bernoulli (irmão de Jacques Bernoulli). Euler estudou quase todos os ramos da Matemática pura e aplicada. Não é exagero dizer que, quase toda a linguagem e notação usados hoje na Matemática, principalmente a nível universitário, devemos a ele.

Em Combinatória, Euler contribuiu com a notação $\left[\frac{n}{p}\right]$, para representar a expressão $\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n+p-1)}{1\cdot 2\cdots n}$ equivalente a $\frac{n!}{p!\,(n-p)!}$, porém a notação $\left[\frac{p}{q}\right]$, modernamente é $\binom{n}{p}$ (leia: n sobre p).

Jaques Bernoulli (1654-1705) muito conhecido também por James (forma aglicizada) ou Jakob (em alemão), nasceu e morreu na Basiléia, Suíça. Pertenceu à família Bernoulli, que mais produziu matemáticos de renomes na História. Os matemáticos Bernoullis juntos com Leibniz, deixaram contribuições escritas, principalmente, em artigos e em revistas.

O mais antigo documento substancial sobre a teoria das probabilidades é o *Ars Conjectandi* (ou Arte de conjeturar), um clássico, escrito por Jaques Bernoulli e publicado em 1713. Essa obra está dividida em quatro partes, a primeira parte contém o trabalho de Huygens, ou seja, *De ludo Aleae*, com comentários de Bernoulli, na segundo parte encontramos uma teoria geral de permutações e combinações, com a utilização do teorema binomial e multinomial, além da primeira prova adequada do teorema binomial para potências inteiras positivas e essa prova foi dada por indução matemática. As outras duas últimas partes são dedicadas à Resolução de Problemas de probabilidades.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), nasceu em Leipzig, Alemanha. Estudou direito, teologia, filosofia e Matemática na universidade. Como já foi citado, é considerado um dos criadores do cálculo. Começou a desenvolver a *characterisca generalis*, ou seja, concepção de uma Matemática universal. A contribuição de Leibniz para a Análise Combinatória foi devido a generalização do teorema binomial para o teorema multinomial, que consiste em realizar a expansão de

$$(x + y + \cdots + z)^n$$

Pierre Simon de Laplace (1749-1827) de origem humilde, protestante, com trabalhos importantes realizados em astronomia e Matemática. Foi um dos principais matemáticos da Revolução Francesa. Desempenhou em papel modesto no Comitê de Pesos e Medidas. Dedicou-se a teoria das probabilidades mais que qualquer outro. Escreveu diversos artigos sobre probabilidades, de modo que esses resultados foram anexados no clássico *Théorie Analytique dês Probabilités* em 1812, que considerava todos os aspectos e todos os níveis da teoria. Em relação a teoria das probabilidades, certa vez Laplace se pronunciou: “É notável que uma ciência que começou com considerações sobre jogos de azar se tivesse elevado ao nível dos mais importantes assuntos do saber humano”, Domingues (citado em IEZZ et al., 1990, P. 155).

Abraham De Moivre (1667-1754), um francês Huguenote, que foi para a Inglaterra, depois da revogação do Édito de Nantes em 1685. Ganhava a vida na Inglaterra como professor particular de Matemática. Em sua época, ou melhor, no início do século XVIII muitos matemáticos tiveram interesse pela teoria das probabilidades é muitos progressos aconteceram nessa área. Um dos trabalhos importante dessa época foi o de De Moivre, que publicou a "*Doctrine of Chances*" (Doutrina do acaso), que continha questões sobre dados, o problema de pontos, retiradas de bolas de cores distintas de um saco, entre outros jogos. Desses problemas, alguns já tinham surgidos em *Ars conjectandi*, de Jacques Bernoulli.

De acordo com Boyer (1974, p. 313), em relação à publicação, de modo geral, "De Moivre derivava a teoria das permutações e combinações dos princípios de probabilidades, ao passo que agora costuma-se fazer o contrário". Em seguida, vem um exemplo.

> Achar o número de arranjos de duas letras escolhidas entre as letras a, b, c, d, e, f.
>
> Probabilidade de escolher uma letra particular é: $\frac{1}{6}$
>
> Probabilidade de escolher outra letra específica ser a segunda: $\frac{1}{5}$
>
> Daí, a probabilidade de aparecerem essas duas letras nessa ordem é: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$
>
> De onde se conclui que o número de arranjos possíveis, duas a duas, é 30.

Em 1730, De Moivre, publicou um outro volume intitulado *Micellanea Analytica*, com contribuições à probabilidades e também pela cooperação com o desenvolvimento do lado analítico da trigonometria. De Moivre só não superou Laplace em suas contribuições à teoria das probabilidades.

Percebemos que a Análise Combinatória não é uma Matemática pronta e acabada, muito pelo contrário, ela se renova, com ampla e diversificadas técnicas de contagem novas e métodos resolução de vários problemas, além de um número cada vez maior de aplicações. Devemos tudo isso à criação humana, pois muitos homens de ciências ou não, colaboraram para alcançar o patamar que temos hoje.

4. METODOLOGIA

Neste capítulo apresentamos a metodologia da pesquisa e descrevemos passo a passo os procedimentos metodológicos.

A proposta pedagógica aqui apresentada foi desenvolvida em dois passos: o primeiro trata da produção de três textos para os trabalhos, a elaboração de problemas e o produto educacional; o segundo é o resumo do desenvolvimento da pesquisa em etapas na sala de aula.

Este estudo está inserido no âmbito de pesquisa qualitativa em Educação Matemática, em concordância com Ludke, André (2001, p.12), por isso a ênfase é muito mais no processo do que com o produto ou resultado. Dentro do nosso problema estudado, para a coleta de dados empíricos, utilizamos observação participante que de acordo com Moreira (2002, p.52) o principal produto dessa observação participante resume em "relatos detalhados do que acontece no dia-a-dia das vidas dos sujeitos e é derivado das notas de campo tomadas pelo pesquisador". As observações foram anotadas no decorrer da aplicação da pesquisa, com detalhes, num caderno, que denominamos de diário de pesquisa (ou de campo). Além disso, para obtermos mais subsídio para a pesquisa aplicamos um questionário e avaliações de provas escritas (discursivas), com os alunos.

As avaliações foram as formas pelas quais verificaremos se o ensino e a aprendizagem foram integrados. Aplicamos duas avaliações uma intermediária e outra no final.

Alguns cuidados que tomamos com a preparação da proposta que poderiam influenciar na metodologia foram: adequar o material histórico ao nível de entendimento dos alunos, como por exemplo, usar uma linguagem clara e objetiva. O tempo disponível para aplicação da proposta em sala de aula deveria estar em harmonia com o planejamento do professor que aplicou e as atividades devidamente conectadas com o conteúdo curricular do 2º ano.

Com base na literatura que subsidiam a pesquisa, encontramos autores (MIGUEL, 1997; MIGUEL E MIORIM, 2004; MENDES, 2006, dentre outros) que defendem uma abordagem pedagógica que busque na História da Matemática a melhoria do ensino e a aprendizagem de Matemática. Por outro lado, com base também na literatura pertinente (WALLE, 2009; POLYA, 2006, dentre outros), a Resolução de Problemas é defendida para o ensino e aprendizagem da Matemática.

Procuramos responder à seguinte questão nesta pesquisa: que contribuições uma proposta de ensino que recorra às potencialidades pedagógicas da História da Matemática como ferramenta didática, associada à Resolução de Problemas, pode trazer para a aprendizagem de Análise Combinatória para uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública do Estado do Rio de Janeiro?

Para isso, traçamos alguns objetivos específicos: elaborar um produto educacional com base na História da Matemática e Resolução de Problemas e avaliar como foi o aprendizado da Análise Combinatória a partir do uso da História da Matemática e Resolução de Problemas. Identificar as potencialidades da História da Matemática que apareceram com mais evidências em sala de aula (encontros) e verificar a relevância (ou boas razões) da Resolução de Problemas em sala de aula; para a construção de conceitos e conteúdos pertinentes a Análise Combinatória, por alunos do Ensino Médio.

4.1. Produção de textos, elaboração de problemas e produto educacional

O primeiro passo da pesquisa foi a produção de três textos (Apêndice 1) e elaboração de problemas para a execução do produto educacional.

A elaboração dos problemas incialmente foi feita pelo professor-pesquisador, entretanto não podemos deixar de considerar que os problemas de Análise Combinatória permitem a elaboração de “novos” problemas e resoluções por caminhos distintos.

O produto educacional (livro)

Com o decorrer dessa pesquisa, e para suprir a necessidade de um recurso de material didático referente à História da Matemática, elaboramos o livro didático (que é o produto educacional), com o título: “A Análise Combinatória Desenvolvida com Aspectos Históricos”. Em poucas palavras, nosso trabalho de quase 90 páginas é essencialmente um livro de Análise Combinatória, onde desenvolvemos os conceitos combinatórios a partir de aspectos de sua História e através de Resolução de Problemas.

O produto apresenta as características que se seguem:

(1) Acontecimentos históricos que favorecem trabalhos interdisciplinares, permitindo a aproximação de outras disciplinas com as atividades matemáticas;
(2) Aspectos da História da Análise Combinatória em cada capítulo;
(3) Variados Problemas combinatórios resolvidos e a serem resolvidos.
(4) Problemas com a intenção de aguçar a curiosidade do estudante, uma vez que estas propostas, em boa parte, procuram ser contextualizadas e associadas ao cotidiano.

Ressaltamos que realizamos um trabalho da História da Análise Combinatória, baseados em Boyer (1974), Eves (2004), Ifrah (2005), e, ainda, textos de autores de procedência variada, publicados em revistas especializadas, como Zetetiké, Revista do Professor de Matemática, entre outras.

O livro está estruturado em quatro capítulos, assim divididos:

- Capítulo 1: A contagem na história das civilizações
  Abordamos o modo de vida do homem primitivo, suas necessidades, atividades e como se desenvolveu a contagem. Em seguida apresentamos uma visão geral do que é Combinatória e para completar daremos alguns exemplos de aplicações.
- Capítulo 2: Contribuições das antigas civilizações para a Análise Combinatória
  Escrevemos sobre fatos e feitos das antigas civilizações (egípcia, grega, chinesa, hindu) que estão relacionados à Análise Combinatória, e a partir daí, com exemplos extraídos dessas civilizações e também com exemplos do cotidiano apresentaremos o princípio de adição, o princípio de multiplicação; os dois tipos de agrupamentos fundamentais da Análise Combinatória, que são os arranjos e as combinações e, ainda, as definições de arranjos simples, permutações simples e combinações simples.
- Capitulo 3: Acontecimentos e matemáticos europeus a partir do século XVII
  Diversas contribuições para a Matemática surgiram no séc. XVII, entre elas o aparecimento da teoria das probabilidades, que foi de grande importância para o crescimento da Combinatória. Destacaremos os acontecimentos e os principais matemáticos que contribuíram, a partir desse século, para o desenvolvimento da Combinatória. Definiremos fatorial, e com a ajuda do princípio multiplicativo mostraremos o cálculo do número de arranjos simples, do número de

permutações simples e do número de combinações simples. Por último, o cálculo do número de permutações com elementos repetidos.

- Capítulo 4: Aspectos do nosso tempo e a moderna teoria dos grafos
  Exporemos uma noção, de cunho mais histórico, sobre algumas das novas técnicas de contagem, entre elas a das funções geradoras, a teoria das partições, o princípio de Dirichlet, o princípio da inclusão e exclusão. Por último falaremos do começo da relativamente moderna teoria dos grafos.

Observe que o produto educacional, ou seja, o livro, conforme descrito acima, foi desenvolvido no decorrer da pesquisa, então o que foi levado para sala de aula foram fragmentos, ou partes, e que somadas a outras adaptações e ampliações de atividades o formaram.

4.2. O desenvolvimento da pesquisa em etapas na sala de aula

Universo da pesquisa

Consideramos o universo atingido os alunos de uma escola pública Federal do Município de Nilópolis (Estado do Rio de Janeiro), do 4º período (equivalente ao 2º ano) do Ensino Médio técnico, onde normalmente se estuda Análise Combinatória. A pesquisa foi aplicada a uma turma com 31 alunos, com 18 do sexo feminino e 13 do sexo masculino, com uma faixa de 16 a 18 anos, tendo uma carga de 24 horas-aula (cada aula com 45 min), sendo o professor de Matemática da turma um dos pesquisadores. Salientamos que tivemos a participação de um professor estagiário, que colaborou no desenvolvimento da nossa proposta com a turma.

Descrição resumida das etapas da pesquisa

Com base em Boyer (1974), Eves (2004), Ifrah (2005), entre outros, criamos três textos (Anexo 1), contando alguns aspectos da História da Análise Combinatória e também criamos alguns problemas para que pudéssemos desenvolver os conceitos abordados em Combinatória.

Etapa 1

O que é Análise Combinatória?

Texto 1: A Contagem na História das Civilizações (Anexo 1)

Algumas questões que foram respondidas pelos alunos nesta fase:

a) Qual a importância de saber contar?

b) Vocês sabem contar?

c) Vocês podem resolvam os problemas abaixo?

Quadro 1: Questões da etapa 1

1) Em uma empresa cada funcionário tem uma senha para sua entrada, formada por uma letra do alfabeto (considere o alfabeto com 26 letras), seguida de três algarismos. Com esse sistema, quantos funcionários no máximo a empresa pode cadastrar?
2) A pastelaria do Onésimo vende pastéis com opções de recheio de carne, queijo, camarão ou banana, não sendo dada a opção de mistura de recheios. De quantas formas uma pessoa pode comprar 7 pastéis?
3) A Caixa Econômica Federal administra as Loterias Federais. Entre elas, a Mega-Sena, que distribui prêmios milionários. Um jogador para fazer uma aposta mínima, tem que escolher 6 números entre 60 (01 até 60), disponíveis no bilhete de aposta, não sendo permitido a repetição de números. De quantas maneiras distintas, fazendo uma aposta mínima, uma pessoa pode jogar na Mega-Sena?

d) Sempre foi importante saber contar?

e) O homem primitivo ou da idade das pedras, sabia contar?

f) O que as perguntas anteriores têm haver com aula de hoje (Análise Combinatória)?

Após essas indagações com a turma, o professor deu um texto (texto 1) contando a História da contagem nas civilizações para os alunos. Em seguida, a leitura foi feita individualmente pelos alunos, e assim as perguntas foram respondidas, exceto os problemas. Naquele momento, o aluno já teria uma noção do que seria Análise Combinatória.

A intenção nesta fase foi levar o aluno a refletir que nem sempre é fácil contar, portanto é necessário estudarmos técnicas de contagem e também percebermos a Matemática, de acordo com Miguel (1997), como criação humana, e buscar na História, em concordância, com Fauvel e Maanem (1991, apud MENDES et al., 2006) motivação da aprendizagem. Também tivemos como interesse apresentar uma visão geral do que é Análise Combinatória e apresentar algumas de suas aplicações.

Etapa 2

Texto 2: As contribuições das antigas civilizações para a Análise Combinatória (Anexo 1)

O texto 2 traz alguns acontecimentos, problemas ou atividades que as antigas civilizações, separadamente exerciam, que hoje em dia seriam colocadas no campo da Análise Combinatória. Em relação à leitura sobre História tivemos o cuidado de buscar nos alunos uma interação entre os textos que abordam a necessidade de contagem do passado e como tal realidade é vivida no nosso presente, pois como afirma Freire (2005) a leitura verdadeira que compromete de imediato o leitor é aquela em que este vai se tornando também sujeito.

Procuramos, antes da elaboração dessa etapa, conversar com professores da instituição de ensino, que trabalham com textos. Os mesmos alegaram que quando os textos são dados para os alunos lerem no lar, nem todos os alunos fazem a leitura pedida. Cientes desse fato, mesmo assim, decidimos que a leitura do texto fosse feita fora do horário de aula, porque eram muitas páginas. Para que pudéssemos desenvolver o trabalho, procuramos motivar (ou mais que isso, provocar a predisposição para a aprendizagem). Mas para que qualquer aluno viesse a ter entendimento do tema abordado em aula, com aspectos históricos, descreveremos e discutiremos os fatos históricos que deram sustentação para o desenrolar dos conteúdos combinatórios em sala de aula.

Em relação à civilização egípcia, destacamos do papiro de Rhind (o mais antigo documento de Matemática do Egito) o problema 79. Trouxemos, em seguida, a interpretação dada pelo historiador Cantor, após ter associado o problema a um outro da idade média, escrito no Líber Abaci, de Leonardo Fibonacci. A partir daí, apresentamos de forma intuitiva os Princípios de Adição e Multiplicação, para em seguida, exemplifica-los com situações do cotidiano que evidenciam os Princípios e, finalmente, formalizá-los. Os Princípios são bem claros e fundamentais para a Resolução de Problemas de contagem. As demais técnicas de contagem derivam desses Princípios. Ainda com base texto 2 chamamos a atenção da presença do Princípio Multiplicativo em situações de outras civilizações, como no sistema de numeração chinesa e na multiplicação por reticulado dos hindus.

Nessa etapa foram apresentados também os dois tipos fundamentais de agrupamentos, que são os arranjos e as combinações. Com exemplos extraídos do texto 2 e do cotidiano, procuramos esclarecer os tipos de agrupamentos. Ressaltamos que alguns dos exemplos vieram em forma de perguntas, como exemplo: 1) No quadrado mágico conhecido como Lo Shu, quando alteramos a ordem de seus elementos (números) obtemos um agrupamento do tipo arranjo ou combinação?

2) No Stomachion de Arquimede, quando encontramos uma forma diferente de encaixar as catorze peças para formar um quadrado estamos diante de um agrupamento do tipo arranjo ou combinação?

Nesta etapa foram entregues duas listas de atividades envolvendo o PM (Princípio Multiplicativo), uma foi abordada em sala de aula, onde incentivamos os alunos a interpretar, argumentar, exporem suas ideias de buscarem maneiras de resolver os problemas. Provemos uma interação professor e alunos e aluno-aluno. A segunda lista de atividades foi resolvida por eles no lar. Em horário extraclasse as dúvidas foram retiradas pelo professor. Os horários para as retiradas de dúvida são costumeiros na instituição de ensino.

Foi dada maior ênfase à Resolução de Problemas, sem utilização de fórmulas, o que permitiu que o PM fosse bem assimilado pelos alunos.

“A maioria, senão todos dos conceitos e procedimentos matemáticos podem ser ensinados melhor através de resolução de problemas (WALLE, 2009, p. 57).”

Nossa intenção é que através de problemas, os alunos possam compreender melhor e solidificar os conceitos de Combinatória e verificarmos as boas razões, de acordo com Walle (2009), para prosseguirmos com o estudo.

Ressaltamos que além do texto 2 e das listas de atividades, os alunos receberam uma apostila de Análise Combinatória e também foram orientados a pesquisarem em livros dispostos na biblioteca da escola, além dos links do Rived, onde aparecem maneiras interessantes de abordar a Combinatória, pois com base em Moreira (2011) podemos dizer que a diversidade de materiais representam muito melhor a produção do conhecimento humano e implica em questionamento. Os livros da biblioteca foram previamente selecionados pelos professores da casa. Essa também é uma praxe da instituição.

Etapa 3

Texto 3: Acontecimentos e matemáticos europeus a partir do séc. XVII (Anexo 1)

Nesta etapa não ficamos restritos aos matemáticos e acontecimentos do séc. XVII, porém o século foi simplesmente fantástico para a Matemática. Em relação ao nosso tema de estudo, a Análise Combinatória, houve um grande desenvolvimento, graças ao surgimento da teoria das probabilidades. A Análise Combinatória recebeu um tratamento matemático (formal) que até então não se tinha visto.

Apresentamos o símbolo $n!$, usado pela primeira vez na França, com o objetivo de simplificar certas multiplicações extensas. Definimos fatorial de n , para em seguida realizarmos atividades num compartilhamento entre professor e alunos. Uma segunda quantidade de atividades foi dada para que os alunos resolvessem em dupla (ou no máximo grupos de três), com a orientação do professor. Algumas das soluções dadas pelos alunos foram socializadas com a turma. Uma terceira lista de atividades foi dada para os alunos resolverem no lar e trazerem as dúvidas em horários disponíveis, fora do horário de sala de aula. Os horários para as retiradas de dúvida são costumeiros, na instituição de ensino, como já citamos.

Desenvolvemos, através de raciocínio matemático, as fórmulas para o cálculo do número de arranjos e combinações. Destacaremos que as fórmulas foram simplificadas com a ajuda de fatoriais.

Priorizamos o estudo dos arranjos, permutações (caso particular dos arranjos) e combinações, pois de acordo com Morgado et al. (2006, p.1), “eles são certamente os mais simples e de uso mais amplo”.

Destacamos fato e feitos históricos do texto 3, além de situações do cotidiano, para desenvolvermos conceitos de Combinatória.

Também nesta etapa deixamos uma lista de atividades para uso em sala de aula e outra lista para o lar; de modo análogo as atividades das listas iniciais, ou seja, com horário para retirada de dúvidas.

Ao completar esse momento o aluno já era capaz de escolher a melhor maneira de resolver um problema combinatório, isto é, por meio de fórmulas ou somente pelo Princípio Multiplicativo.

Durante as atividades que envolviam resoluções de problemas procuramos reforçar a capacidade crítica e a curiosidade dos alunos. O rigor metodológico que envolve essas atividades não pode ser confundida com a educação “bancária”, tão criticada por Freire (2003). Ao contrário, procuramos estimular a curiosidade e a crítica para que os alunos participassem ativamente do processo como reais sujeitos da construção e da reconstrução do saber ensinado.

Embora a nossa pesquisa esteja voltada para o Ensino Médio, traçamos uma breve exposição do crescimento da Análise Combinatória, com suas modernas e poderosas técnicas de contagem (Funções Geradoras, Teoria das Partições, Princípio de Dirichlet, Princípio da Inclusão e Exclusão) e por último apresentamos o começo da relativamente moderna Teoria dos Grafos. A ênfase dada foi mais histórica.

Com esses recursos e novidades, os alunos, mesmo em uma sala de aula clássica, podem se sentir predispostos e valorizados para a aprendizagem.

5. RESULTADOS, DISCUSSÕES E ANÁLISES

Apresentamos os resultados, discussões e análises dos encontros vividos em sala de aula. Organizamos a proposta desenvolvida em sala de aula em três etapas, tal que cada etapa contou um pouco de História da Análise Cominatória, de forma que as etapas geraram 12 encontros, um total de 24 tempos, cada tempo com 45 minutos de aula. Os registros dos acontecimentos em sala de aula foram feitos em um caderno que chamamos de diário de campo (ou de pesquisa), como já citamos.

5.1. Descrição da implementação da pesquisa (Os encontros)

Apresentamos aqui, uma descrição do processo vivido e a análise das informações coletadas. A identificação de qualquer sujeito, no registro foi a partir de uma letra maiúscula do nosso alfabeto.

1º encontro

Em sala de aula o 1º passo foi explicar como seria a implementação *da* proposta de pesquisa, com a intenção de transmitir uma maior credibilidade à mesma e, por consequência a colaboração dos alunos. Tivemos a participação do professor estagiário A, que nos ajudou com anotações dos acontecimentos no decorrer da aula. Estas anotações mais tarde foram unidas às considerações do professor pesquisador no diário de pesquisa (ou de campo).

Em seguida foram feitas algumas perguntas provocativas aos alunos a fim de problematizar o ensino da Análise Combinatória, tais como: “Qual a importância de saber contar?” “Vocês sabem contar?” “O contar tem a ver com Análise combinatória?” Entre outras. Estabelecemos um diálogo com os alunos e ao mesmo tempo observamos os conhecimentos prévios dos mesmos, pois o conhecimento prévio, a experiência, ou a percepção prévia é o fator isolado mais importante para a aprendizagem significativa, de acordo com Moreira (2011).

Observamos que as respostas, em relação a pergunta se sabiam contar, foram unanimes, já que todos responderam que sim, que supostamente eles sabem contar. Com esta afirmação que sabem contar, foram propostos alguns problemas de Combinatória, já apresentados no Quadro 1 no capítulo anterior, para identificar como eles compreendem o significado de “saber contar”. Estes problemas (Quadro 1) foram passados, pausadamente, de maneira verbal para os alunos, sem a necessidade de copiarem. Verificamos que os alunos perceberam que nem sempre é fácil contar (enumerar os elementos de um conjunto), portanto, salientamos que precisamos de técnicas de contagem.

A opção por cada problema apresentado de maneira verbal teve a intenção de concentrar em um único debate e destacar a “Análise Combinatória” apresentada nos problemas. Os alunos também notaram alguns campos de aplicação da Análise Combinatória.

O significado que eles tinham de “saber contar” foi ampliado, quando os alunos perceberam, através da apresentação de problemas com situações do cotidiano, que o fato de “saber contar” não é sempre tão simples como o contar numérico de “contar nos dedos” e que pode ser muito vezes bem mais complexo que eles imaginavam.

Prosseguindo os alunos realizaram a leitura, individualmente, do Texto 1 (Apêndice 1). Levaram em torno de 8 minutos de leitura. Tivemos como objetivo apresentar para os alunos um pouco do desenvolvimento da História da Análise Combinatória, como instrumento potencializador da aprendizagem significativa e da predisposição a aprender, favorecendo aprendizagem e humanizando o ensino de matemática através de situações reais e de transformação social no decorrer dos tempos, isto é, no sentido de que os alunos percebam que as pessoas que a desenvolveram são seres humanos comuns. Enfim, uma Matemática compreendida dentro do contexto da criação humana, pensamento este em concordância com Miguel (1997).

Após a leitura, surgiram perguntas sobre o texto 1, as perguntas como destaca Moreira (2011) são fundamentais no diálogo entre aluno e professor para se apropriarem de novos conhecimentos.

A seguir, apresentamos a descrição de algumas dessas perguntas, comentários e as respostas apresentadas pelo professor.

> O aluno B: -Professor, pode esclarecer melhor o que é um número concreto e abstrato?
> Professor: -Alguns autores classificam em números abstratos, simplesmente, como o número que não vem acompanhado de unidades, como dez, duzentos e três. Já o número concreto vem seguido de uma unidade, por exemplo, oito bananas, sete balas.
> A aluna C: -Em toda aula teremos História?

> Professor: -Por quê? Você não gosta de História?
> A aluna C: -Eu não gosto de História.
> Professor: -Embasados em referenciais teóricos, ou seja, em pesquisas em Educação Matemática, que envolvem História da Matemática, são destacados diversos benefícios. Porém não é nossa intenção dar um curso de História, mas sim um curso onde buscaremos alguns aspectos, no decorrer da História da humanidade, de modo que, nos permitam desenvolver (ou ajudar) a construirmos os conceitos de Análise Combinatória, além de problemas do dia-a-dia que buscaremos para este feito.
> O aluno D: -Na prova, também será cobrado a parte de História?
> Professor: -Não.

Nos questionamentos acima, podemos observar que o aluno, provavelmente, está acostumado com a educação mecanicista (bancária) Freire (2003), quando percebemos a preocupação com o conteúdo a ser “cobrado” na prova ou se a História estaria incluída como conteúdo de Matemática. É fato que dificilmente o professor de matemática, principalmente no ensino médio, utiliza em suas aulas textos de História.

Verificamos a opinião dos alunos em relação ao texto perguntando se gostaram do texto 1? Mais uma vez, por unanimidade eles afirmam que gostaram do primeiro texto (respondendo verbalmente ou sinalizando com as mãos); até mesmo a aluna C, que tinha relatou que não gosta de História.

As manifestações dos alunos nas falas, após a leitura do texto 1, nos levou a acreditar que a inserção da História potencializou, de alguma forma, o processo de aprendizagem.

Em relação ao Texto 1, opinião de aluno:

> Aluno V: Eu achei muito agradável a leitura do texto e foi interessante pra mim.

Neste encontro, também, demos uma visão geral do que é Análise Combinatória, falamos de alguns campos do saber humano, onde podemos aplicá-la.

É interessante salientar que até o professor estagiário A ficou entusiasmado já no primeiro encontro e considerou a História da Matemática como uma boa estratégia para o começo do ensino e aprendizagem da Análise Combinatória. Em seguida, trazemos a fala do professor estagiário a respeito do primeiro encontro.

> Professor estagiário A: Gostei, pois a gente não está acostumado a ver a História da Matemática nas aulas e também pude observar que

> os alunos gostaram bastante. Acho que valeu apena essa maneira de começar a aula de Análise Combinatória.

Com a fala do Professor estagiário A, concluímos que tanto ele como os alunos se mostraram predispostos a aprender Análise Combinatória já que ele diz "*Gostei, pois a gente não está acostumado a ver a História da Matemática nas aulas e também pude observar que os alunos gostaram bastante*".

2º encontro

O professor inicia a aula destacando a parte do Texto 2 (Contribuições das antigas civilizações para a Análise Combinatória), que se refere ao problema 79 do papiro de Rhind ou "problema dos bens", e apresenta a interpretação do problema conforme o entendimento do historiador Cantor, assim escrito:

> Uma relação de bens consistia em sete casas; cada casa tinha sete gatos; cada gato comeu sete ratos; cada rato comeu sete espigas de trigo; e cada espiga de trigo produzia sete hecates de grãos. Casas, gatos, ratos, espigas de trigo e hecates de grãos, quantos havia disso tudo? (EVES, 2004, p. 76)

As informações do problema visam conduzir o aluno à compreensão de dois princípios básicos da Combinatória, os Princípios da Adição e da Multiplicação.

> O aluno L, pergunta: -Professor esses princípios (Adição e Multiplicação) são bem simples, né?
>
> Professor: -É verdade, porém esses princípios formam a base para a construção da Análise Combinatória. De acordo o historiador Biggs, que faz parte de nossa referência bibliográfica, a pedra fundamental da Análise Combinatória está nos Princípios de Adição e Multiplicação.

A fala do aluno "*esses princípios são bem simples*" nos remete ao entendimento do aluno que certos conceitos não precisam ser tão discutidos, porém, em nosso entender, é necessário que um conceito, ou uma noção importante, como por exemplo esses princípios, haja uma maior reflexão, para um maior significado e compreensão do assunto abordado. Aprendizagem Significativa, conforme destaca Moreira (2011), permitirá detectar as falsas verdades e as causalidades ingênuas. Fica portanto evidenciado que a aprendizagem significativa crítica não decorre apenas da pergunta, isso é o que se critica, ou seja, a causalidade simples que nos leva facilmente ao que é identificável.

Em seguida, exploramos alguns problemas (Quadro 2) que envolveram os Princípios, e logo depois formalizamos. Eis os problemas:

Quadro 2: Problemas utilizadas no 2º encontro.

1) Num Colégio interno de meninos há duas modalidades de esporte: futebol e natação. Dentre eles 250 praticam futebol, 150 natação e 100 praticam futebol e natação e, não há quem não pratique pelo menos um desses esportes. Quantos alunos praticam um único esporte?
2) Uma pequena fábrica de pano de pratos, oferece a seus clientes cinco modelos de estampas, em seis cores diferentes. Um cliente que quiser adquirir um pano de prato tem quantas opções?
3) Em uma empresa cada funcionário tem uma senha para sua entrada. A senha é formada por uma letra do alfabeto (considere o alfabeto com 26 letras), seguida de três algarismos. Com esse sistema, quantos funcionários no máximo a empresa pode cadastrar?
4) Quantos números de prefixos de telefones especiais de três ou quatro algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?
5) “problema da Mega-Sena”

A série de atividades resolvidas com os alunos, num diálogo professor-aluno, visaram a construção e solidificação dos princípios, incluindo atitudes perante esta ciência. Através de perguntas, criamos uma dinâmica que previa observações, descobertas, acertos, erros e principalmente ousadia para a tomada de decisões. De acordo com Moreira (2011, p. 227) a interação social é indispensável para a concretização de um episódio de ensino.

Nosso principal objetivo nesse segundo encontro foi levar os alunos através de situações extraídas da História da Matemática e também com problemas do cotidiano a compreenderem o Princípio de Adição e o Princípio de Multiplicação (PM) e a importância deles (os Princípios) para a Resolução de Problemas de contagem e da construção da própria Análise Combinatória.

Os alunos sentiram dificuldades no problema da “Mega-Sena”. Nossa intenção foi mostrar que em alguns problemas a aplicação direta do PM, pode ser trabalhosa e que outros conceitos que seriam apresentados em outros encontros ajudariam a resolver de forma mais simples.

Destacamos que na Resolução dos Problemas utilizamos as fases de resolução de Polya (2006), enfatizando a primeira fase: para resolver um problema é preciso compreender o problema (“Qual a incógnita? Quais os dados? Qual é a condicionante?”).

3º encontro

Demos prosseguimento com atividades envolvendo o PM, para serem resolvidas individualmente pelos alunos. Algumas das resoluções encontradas por alunos, que seguiram em caminhos diferentes dos demais, foram socializadas. Procuramos perceber nos alunos alguns sinais não verbais, como: concentração e atenção para a Resolução dos Problemas, envolvimento deles nas atividades. Enfim procuramos verificar o valor da Resolução de Problemas, em concordância com o pensamento de Walle (2009, p. 59), ou seja, “uma abordagem de resolução de problemas envolve os estudantes”. Salientamos que quando alguém (aluno) erra um problema é necessário verificar onde ocorreu o erro, pois não há nada de errado em errar, é da natureza humana errar, o homem aprende corrigindo seus erros e o conhecimento individual é também construído superando erros, em concordância com Moreira (2011).

Além disso, no decorrer da aula, com base no Texto 2, chamamos a atenção para o Princípio da Multiplicação, em outras das grandes civilizações, como os chineses, encontramos o chamado “sistema de agrupamento multiplicativo” e com os hindus a “multiplicação em reticulado”.

Estabelecemos como objetivos que os alunos aprendessem a resolver problemas Combinatórios fazendo uso somente dos Princípios de Adição e Multiplicação e que conhecessem o “sistema de agrupamento multiplicativo” dos chineses e, com os hindus, a “multiplicação em reticulado”, pois ambos retratam o nosso Princípio Multiplicativo, de forma que os alunos também tivessem uma perspectiva cultural diferente da ocidental. Eis alguns problemas (Quadro 3) trabalhados nesse encontro:

Quadro 3: Problemas trabalhados no 3º encontro

1) No código Morse, uma letra é composta pela sucessão de traços e pontos, podendo haver repetições dos símbolos. Determine o número de letras que podem ser representadas com 4 símbolos.
2) Com a reforma do quarto da Aninha, a parede de frente para a porta ficará com cinco faixas, cada faixa será pintada com uma cor, não havendo duas faixas sucessivas de mesma cor. Dispõe-se de 4 cores para pintar a parede. De quantas formas isto pode ser feito?
3) Na estamparia do senhor Haroldo, chegou um pedido para numerar 1000 camisetas de 1 até 1000. Para isso é necessário comprar uma certa quantidade de figuras dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. As figuras dos algarismos comprados serão estampadas nas camisetas. Para que não haja sobra de material, determine quantas figuras do algarismo zero têm que ser compradas?

4º encontro

Neste encontro, voltamos ao Texto 2, e as informações históricas citadas aqui, são referentes a ele. Começamos a aula comentando sobre os dois tipos fundamentais de agrupamentos (arranjos e combinações). Ainda com base no Texto 2, extraímos exemplos que comprovam a existência desses agrupamentos.

Os exemplos vieram em forma de indagações, por exemplo:

1) No quadrado mágico conhecido como Lo Shu, quando alteramos a ordem de seus elementos (números) obtemos um agrupamento do tipo arranjo ou combinação?

2) No Stomachion de Arquimede, quando encontramos uma forma diferente de encaixar as catorze peças para formar um quadrado estamos diante de um agrupamento do tipo arranjo ou combinação?

3) No livro “Lilavati”, de Bhaskara, apareciam problemas de Análise Combinatória parecidos com problemas de livros didáticos de hoje; porém com quantidades pequenas de elementos.

Exemplo:

Quantos são os tipos de sabores (gostos) que podem ser feitos, usando dois tipos distintos, escolhidos entre 3 sabores distintos?

Cada agrupamento que podemos formar, nas condições dadas, representa um arranjo ou uma combinação?

Com exemplos do cotidiano, esclarecemos o que é um arranjo simples, uma permutação simples e uma combinação simples.

Eis alguns exemplos:

Quadro 4: Exemplos utilizados no 4° encontro

1) Em um campeonato de futebol participaram apenas quatro times: Flamengo, Botafogo, Fluminense e Vasco. Serão premiados apenas os dois primeiros colocados, considerando que não há empate. Determine o número de possibilidades da premiação.
2) Arnaldo, Vinícios e Solange são três amigos e gostariam de tirar uma fotografia deles juntos, lado a lado. De quantas maneiras isso pode ser feito?
3) Dos quatro melhores alunos da turma A, dois serão selecionados, por sorteio, para visitarem o IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) do Rio de Janeiro. De quantos modos podem ser escolhidos dois alunos, entre os quatro?

Esclarecemos que os exemplos dados foram bem simples, porém quando o número de elementos é grande e ainda obedecendo a certas condições, podemos ter problemas que exigirão alta dose de criatividade, além de utilizarmos uma ou mais técnicas de contagem, para resolvê-los.

Contamos um pouco da História do símbolo $n!$, onde e para que surgiu, e definimos fatorial. Em seguida demos uma lista de atividades envolvendo fatorial para ser resolvida, individualmente, em sala de aula. A turma teve um bom resultado e algumas poucas dúvidas individuais foram sanadas. Destacamos algumas atividades envolvendo fatorial (Quadro 5):

Quadro 5: Atividades com fatoriais no 4º encontro

1) Simplifique e calcule: a) $\frac{9!}{8!}$ b) $\frac{10!}{4!6!}$ c) $\frac{5!+4!}{4!}$	
2) Simplifique: a) $\frac{(n+1)!}{n!}$ b) $\frac{(n+1)!-n!}{n!}$	
3) Resolva a equação $(n-3)!=24$.	

Comentamos que as fórmulas que veríamos mais tarde para o cálculo do número de arranjos simples e outras, ficariam mais simplificadas com o uso desse símbolo. Ainda discutimos como obter $n!$, fazendo uso de uma calculadora científica, embora algumas calculadoras já tragam $n!$ para o cálculo direto.

Os objetivos principais desse quarto encontro foram levar os alunos a esclarecerem a diferença entre os dois tipos de agrupamentos: arranjos e combinações, através de exemplos extraídos da História e também do cotidiano; levar os alunos também com exemplos do cotidiano a perceberem o que são arranjos simples, o que são permutações simples e o que são combinações simples; esclarecer a importância da criação de fatorial para a simplificação de expressões que apresentam produtos de números naturais consecutivos.

5º encontro

Como o período letivo foi atípico, tivemos duas semanas consecutivas sem haver aula (recesso escolar). Finalmente, retornando os encontros, começamos com o Texto 3 (Acontecimentos e matemáticos europeus a partir do século XVII), comentando a respeito da súbita manifestação da Matemática e as diversas contribuições que surgiram para esta área, que em grande parte, sem margem de dúvidas, foi devido aos avanços sociais, políticos e econômicos em que vivia a sociedade da época. Em relação ao nosso tema de estudo, a Análise Combinatória, houve um grande desenvolvimento e isso foi possível, graças ao surgimento da teoria das probabilidades. Entre alguns dos matemáticos europeus que citamos, destacamos Blaise Pascal.

Em seguida, deduzimos uma fórmula, utilizando o PM para calcular o número de arranjos simples. Resolvemos alguns problemas com os alunos, de modo que estes sempre foram trabalhados com as informações extraídas dos enunciados e conforme as interpretações dadas por eles. Nestes momentos, o professor atuou como um orientador, incentivador e facilitador da aprendizagem. Na próxima etapa, propomos algumas atividades com problemas combinatórios para serem revolvidos em dupla. Os alunos formaram as duplas de acordo com a vontade deles, porém alunos que ficaram isolados, foram acrescentados a um desses grupos formados. Portanto, houve grupos com dois ou no máximo com três alunos. Quando os grupos terminaram o trabalho, discutimos e socializamos algumas das soluções encontradas por eles. Segue alguns problemas resolvidos com os alunos (Quadro 6):

Quadro 6: Problemas resolvidos no 5º encontro

1) A senha de acesso ao meu computador é formada por duas vogais distintas, seguidas de três algarismos pares distintos, Quantas são as possíveis senhas de acesso?
2) Um carro possui cinco lugares. Cinco pessoas entram neste veículo mas, destas apenas uma sabe dirigir. De quantas maneiras diferentes essas pessoas podem se assentarem?

Durante esse momento alguns alunos perceberam que poderiam resolver os problemas usando o PM, sem a necessidade de usarem a fórmula para o cálculo do número de arranjos simples. Eles simplesmente resolveram e perguntaram se podiam continuar fazendo assim. Confirmamos positivamente e aproveitamos para avisar que qualquer problema que envolve arranjos, pode-se usar somente o PM.

Walle (2009, p. 59) nos diz que “A resolução de problemas possibilita um ponto de partida para uma ampla gama de alunos. As boas tarefas baseadas em resolução de problemas possuem múltiplos caminhos para chegar a solução.”
Podemos observar que, de fato, a Resolução de Problemas possibilita esse ponto de partida, pois identificamos caminhos distintos para a solução de um mesmo problema nos grupos de alunos participantes da pesquisa. Segue a atividade que foi resolvida por um dos grupos e socializada com a turma (Quadro 7) e em sequência a resolução dessa atividade na Figura 12.

Quadro 7: Problema resolvido pelos grupos no 5º encontro

Mateus, Rafael, Olga, Kelly e Viviane formam uma fila. De quantos modos a fila pode ser formada, de modo que a Kelly seja a primeira da fila?

Figura 12: Resolução do grupo formado pelos alunos H, J e K

FILA

	kELLY	*SEGUNDO*	*TERCEIRO*	*QUARTO*	*QUINTO*
	↓	↓	↓	↓	↓
Possibilidades:	1	4	3	2	1

Pelo PM, vem: $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
Logo, a fila pode ser formada de 24 modos.

Fonte: dados da pesquisa

Uma outra resolução, do grupo formado por Z e X, desta mesma ativiade é apresentada na Figura 13.

Figura 13: Resolução do grupo formado pelos alunos Z e X

Como o lugar da Kelly é o primeiro da fila, então já está garantido, vamos escolher o lugar das de outras pessoas.
A ordem dos elementos é importante, trata-se de um arranjo. Assim:
$A_{4,4} = 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ modos.

Fonte: dados da pesquisa

Observe os modos distintos de resolução, ambos corretos. Porém, a primeira recorre ao PM, enquanto a outra prefere resolver utilizando a fórmula de arranjo simples, sem a notação de fatorial. Comentamos com os alunos que a aplicação do PM em vez da fórmula, seria melhor. Mas, a escolha fica a critério de cada um.

Nosso principal objetivo foi desenvolver o cálculo do $A_{n,p}$ através do Princípio Multiplicativo.

6º encontro

Inicialmente, houve um tempo para o esclarecimento de dúvidas das aulas anteriores, embora a turma tenha horário extraclasse para tirar dúvidas. Mas para nós foi uma maneira de começarmos a aula e dizer a respeito de um caso particular dos arranjos, que são as permutações, e como calcular o número de permutações simples através da fórmula para o cálculo do número de arranjos simples.

Resolvemos, seguindo a mesma dinâmica de resolver problemas, com as fases de resolução do Polya (2006) e como as anteriores, fazendo o aluno vivenciar o processo de construção do conhecimento. Segue o problema:

Quadro 8: Problema resolvido no 6º encontro

Fabrício, Rodrigo, Antonio e Cristina são amigos e juntos abriram uma empresa. O nome da empresa tem as letras iniciais do nome de cada um deles. Determine o número de nomes possíveis dessa empresa.

A seguir, apresentamos aos alunos atividades que foram dadas para serem resolvidas em dupla. Nossa preferência por dupla foi para estimular o diálogo (troca de experiência e conhecimento) entre eles; "não permitimos dúvida individual", ou seja, as dúvidas individuais antes eram discutidas na dupla, para que, ou fossem sanadas entre eles ou se tornariam dúvidas da dupla, "forçando" o diálogo e a análise das soluções. Eis alguns problemas (Quadro 9):

Quadro 9: Problemas resolvidos pelos grupos no 6º encontro

1) Determine o número de maneiras que podemos dispor em fila indiana 4 mulheres e 4 homens, de modo que as mulheres fiquem sempre juntas.
2) Formados e colocados em ordem crescente todos os números de 5 algarismos distintos, obtidos com 1, 3, 5, 6 e 7, que posição ocupa o número 61375?

Alguns desses problemas revolvidos pelas duplas foram socializados com os demais grupos da turma, com o intuito de compreender que um mesmo problema pode ser resolvido por caminhos diferentes. Destacamos que a maioria dos grupos resolveram os problemas sem o uso de fórmulas, ou seja, fizeram uso somente do Princípio Multiplicativo.

Comentamos que o matemático inglês Rorert Recorde em 1557, usou pela primeira vez o sinal de igual, porém as linhas paralelas eram mais compridas do que hoje. Mencionamos também outras curiosidades matemáticas a respeitos dos símbolos que usamos hoje. Em Moreira (2011), "conhecimento" ou "conteúdo" é linguagem, não só palavras (mas principalmente), outros signos, instrumentos e procedimentos. Ensinar Matemática ou outra "matéria" é ensinar linguagem e aprendê-la de maneira crítica é percebê-la de forma substantiva e não literal.

Neste encontro trabalhamos também como calcular o número de combinações simples. Resolvemos novamente o problema da "Mega-Sena" (a primeira vez foi somente com o uso do PM), mostrando que $A_{60,6} = 6!C_{60,6}$, daí: $C_{60,6} = \frac{A_{60,6}}{6!}$ e em seguida generalizamos esse resultado, isto é, obtivemos a fórmula para o cálculo do número de combinações. Eis alguns dos problemas que resolvemos com os alunos (Quadro 10):

Quadro 10: Problemas resolvidos com os alunos no 6º encontro

1) O Hortifruti Bem-Viver resolveu inovar, vendendo salada de frutas a seus clientes. O “Bem-Viver” dispõe sempre de 10 opções de frutas para a salada. De quantas maneiras diferentes um cliente pode fazer seu pedido, escolhendo seis opções de frutas?
2) Numa lagoa existem cinco espécies de peixes: tilápia, lambari, acará, pacu e apapá. Determine: a) de quantos modos distintos uma pessoa pode fazer uma peixada com três dessas espécies? b) de quantos modos distintos uma pessoa pode fazer uma peixada com três dessas espécies, incluindo sempre o acará?

Nossos objetivos foram obter o cálculo de P_n através do entendimento do cálculo de $A_{n,p}$ e resolver novamente o problema da Mega-Sena, mostrando que $A_{60,6} = P_6!C_{60,6}$ e em seguida generalizando para o cálculo de $C_{n,p}$.

7º encontro

Ainda com base no Texto 3, comentamos que muitos matemáticos que vieram depois de Pascal dedicaram-se à Combinatória, e que hoje em dia as fórmulas que usamos são devido ao simbolismo que começou a surgir no século XVI e de maneira mais intensa no século XVII.

Depois de um pouco de História em sala de aula, voltamos ao ponto de onde paramos no encontro anterior para resolvermos atividades de combinações em dupla. Eis alguns dos problemas (Quadro 11):

Quadro 11: Problemas resolvidos em dupla pelos alunos no 7º encontro

1) Não sabemos de onde vem os jogos de carta, mas provavelmente, vieram de uma das antigas civilizações: China, Egito ou Índia. Modernamente o jogo de cartas é conhecido como baralho. Esse jogo contém 52 cartas, que são distribuídas em 4 naipes (ouros, copas, espadas e paus), sendo que cada naipe tem 13 cartas (1 ás, 3 figuras (dama, valete e rei) e 9 cartas numeradas de 2 a 10). Considerando todas as 52 cartas, responda: a) Quantos agrupamentos podemos formar com 2 figuras? b) Quantos agrupamentos de 5 cartas, em que aparece exatamente 1 figura, podemos formar? c) Quantos agrupamentos de 5 cartas, não contendo nenhum rei, podemos formar? d) Quantos agrupamentos de 5 cartas podemos formar, de modo que cada agrupamento contenha pelo menos uma figura?
2) Tenho 5 irmãos e quero convidar, pelo menos um irmão, para jantar comigo. De quantas maneiras distintas posso fazer isso?

Nosso objetivo principal nesse encontro foi centralizar nos trabalhos em dupla com os alunos, as atividades envolvendo combinações.

8º encontro

Nesse encontro fizemos uma avaliação intermediária (apêndice 2). Para cada aluno que entregava o teste, após a sua realização, perguntamos: qual o grau de dificuldade que você teve para fazer este teste? (Fácil, Razoável ou Difícil).

A maioria dos alunos avaliou o teste como razoável (87%); uma outra parcela considerou fácil (9,7%) e somente uma pessoa afirmou que foi difícil (3%). Todavia boa parte dos resultados das avaliações não foram bons; poucas exceções alcançaram resultados razoáveis ou bons (desejáveis) (42%).

Como o período foi atípico e provocou espaço de tempo grande entre as aulas, isso pode ter cooperado com o resultado do teste. Por outro lado, algumas das resoluções contidas na avaliação dadas pelos alunos podiam receber uma pontuação maior da nossa parte. Nossa atitude mais rigorosa na correção, foi pelo fato dos alunos estarem confiantes nas suas potencialidades em relação a Matemática e também da nossa parte estávamos confiantes no trabalho de pesquisa que estávamos desenvolvendo com eles (alunos). No nosso entender, os alunos perceberam que tinham condições de obterem um grau melhor na avaliação. Todavia, como nossa pesquisa é qualitativa, não fizemos uma análise mais apurada dos resultados numéricos. Isso se deve porque a nossa preocupação maior era com o processo de construção da aprendizagem.

9º encontro

Inicialmente falamos mais um pouco a respeito da álgebra simbólica do tempo de Pascal que teve um certo desenvolvimento, porém Pascal nesse quesito estava atrasado no seu tempo. Sem o simbolismo da Matemática não teríamos as fórmulas matemáticas estudadas em Análise Combinatória. Em seguida perguntamos à turma com quantos anagramas poderíamos formar com a palavra OVO?

Descrevemos cada um deles (OVO, OOV e VOO). Chamamos a atenção ao fato de até então só termos calculado o número de anagramas de palavras com letras distintas. Fizemos a suposição dessas letras serem distintas, por exemplo, O_1VO_2, de modo que os alunos percebessem que cada anagrama formado, gera $2!$ permutações. Indicamos por $P_3^2 = \frac{3!}{2!}$. Generalizamos o resultado para n elementos, dos quais α são iguais, isto é, $P_n^{\alpha} = \dfrac{n!}{\alpha!}$. Por outro lado para n elementos, onde α são iguais e β são iguais de outro tipo, temos $P_n^{\alpha,\beta} = \dfrac{n!}{\alpha!\,\beta!}$.

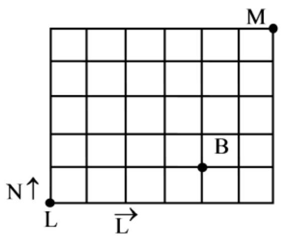
E assim por diante.

Em seguida compartilhamos a resolução dos seguintes problemas (Quadro 12):

Quadro 12: Problemas resolvidos com os alunos no 9º encontro

1) Considere a palavra ARARUAMA, responda:
a) Quantos anagramas podemos formar?
b) Quantos anagramas começam com a letra A?

2) A figura abaixo representa um condomínio, onde L, B e M indicam as casas de Luíza (L), Beatriz (B) e Mateus (M). Luíza vai à casa de Mateus estudar matemática, mas antes vai passar na casa de Beatriz. Determine o número de caminhos diferentes que Luíza pode fazer, caminhando uma unidade de cada vez para o norte ou para leste.



3) Na pastelaria do Onésimo vende pastéis com opções de recheio de carne, queijo, camarão ou banana, não sendo dada a opção de mistura de recheios. De quantas formas uma pessoa pode comprar 7 pastéis?

Nosso principal objetivo foi resolver atividades de permutações com elementos repetidos e investigarmos, na visão de Van de Walle (2009), as razões para prosseguir nesse trabalho.

Os alunos ficaram envolvidos com os problemas e por consequência mais “concentrados” nas atividades. A ideia de permutação com repetição faz “sentido” quando vista com problemas, especificamente com problemas do cotidiano. De acordo com Walle (2009, p. 59), “a Resolução de Problemas concentra a atenção dos alunos sobre as ideias e em dar sentido às mesmas”.

No final da aula, deixamos atividades envolvendo permutações com elementos repetidos para serem resolvidas fora de sala de aula, individualmente, usando os conceitos discutidos e trabalhados no encontro e que foram entregues em encontros posteriores. Eis algumas das atividades com permutações com elementos repetidos (Quadro 13):

Quadro 13: Atividades para o lar (9º encontro).

1) Um vendedor ambulante vende panos de pratos do mesmo modelo, porém com 5 opções de cores: branca, amarela, verde, lilás ou rosa. De quantas maneiras possíveis um

cliente pode comprar 3 panos de prato?
2) Uma confeitaria vende três tipos especiais de doces. De quantas formas uma pessoa pode comprar 4 doces especiais?

10º encontro

Fizemos a entrega da avaliação intermediária, comentamos os resultados, resolvemos e analisamos alguns problemas, especialmente nos que houve maior número de erros. Porém, como o resultado foi abaixo do desejado, disponibilizamos os gabaritos e, outras dúvidas que não foram contempladas, foram retiradas no horário extraclasse.

Infelizmente, não conseguimos prosseguir o encontro conforme planejado. Tínhamos a intenção de aplicar atividades em grupos com problemas envolvendo permutações com repetições de elementos, mas a aula foi interrompida e os alunos dispensados, por ordem da direção[8] escolar. Desta forma, essas atividades foram feitas no horário extraclasse com o professor estagiário e com o professor pesquisador, porém não foram registadas. Eis algumas das atividades com permutações com repetições (Quadro 14):

Quadro 14: Atividades extraclasse (10º encontro)

1) Uma palavra é formada por uma letra B, 2 letras N e n letras A. Permutando as letras dessa palavra obtemos 60 anagramas. Qual o valor de n?
2) De quantas formas diferente podemos dividir 9 bombons entre 3 pessoas, sendo que qualquer uma delas pode não receber bombons ou receber todos os bombons? (Os bombons dados devem ser inteiros)

11º encontro

Nesse encontro foi realizada a nossa avaliação final. Antes de iniciar a avaliação, o professor fez as seguintes recomendações:

- Leia com atenção cada questão.
- Só depois de ter entendido a questão, pode fazer sua representação matemática.
- O resultado está de acordo com o problema?

Para cada aluno, ao terminar a avaliação, perguntávamos: qual o grau de dificuldade que você teve para fazer o teste? (Fácil, Razoável ou Difícil). A maioria

---

[8] Motivo: suspeita de um grande temporal.

dos alunos considerou a prova razoável (74%), outros não quiseram opinar (16%) e um terceiro grupo avaliou como fácil (9,7%).

Alguns alunos consideraram a avaliação mais fácil que a primeira, porém o professor questionou se o conhecimento e entendimento que eles possuíam para fazer a avaliação, era melhor do que eles tinham quando vieram fazer a primeira avaliação. Confirmaram que houve melhoria neste sentido.

Quando as avaliações foram corrigidas, verificamos que houve uma melhora significativa no desempenho dos alunos. Atribuímos o bom resultado alcançado ao trabalho que realizamos desde seu início, pois valorizamos a interação professor-aluno e aluno-aluno. Essa interação foi fundamental para a concretização de um episódio de ensino, pois compartilhar significados dos envolvidos no processo de ensino aprendizagem resulta numa troca permanente de questionamentos de ambos os lados, ao invés, de simplesmente a busca por respostas prontas e acabadas.

12º encontro

Embora nossa preocupação estivesse voltada à Análise Combinatória do Ensino Médio, neste último encontro nos preocupamos em expor uma noção, com ênfase em uma visão histórica, de algumas das poderosas novas técnicas de contagem e o começo da teoria dos grafos que surgiram e normalmente são estudadas a nível de graduação. Entre essas novas e importantes técnicas que comentamos, encontram-se a das Funções Geradoras, que teve origem nos trabalhos de Abraham De Moivre; a Teoria das Partições, fundada por Leonhard Euler; o Princípio de Dirichlet, formulado por Peter Gustav Dirichlet. Por último, abordamos o começo da moderna Teoria dos Grafos, bem recente na História da Matemática e utilizada para a resolução de diversos problemas que podem ser modelados matematicamente, cujos primeiros que estudaram o assunto, depois de Euler ter dado o ponta pé inicial, foram G. Kirchhoff e A. Cayley.

Ressaltamos que devemos tudo isso ao que hoje chamamos de Análise Combinatória, à criação humana, pois muitos homens de ciências ou não, colaboraram para alcançar o patamar que temos hoje.

Em seguida, entregamos um questionário semiaberto (apêndice 2) a todos os alunos, de modo que não fossem identificados, cujo objetivo era verificar como avaliaram a proposta, sua aprendizagem, participação e interesse pelo trabalho realizado. Nossa intenção foi conseguir mais subsídios, para finalmente realizarmos a análise dos dados e as conclusões.

5.2. Análises dos dados

Reunimos e organizamos as informações coletadas e construídas ao longo do processo de identificação das potencialidades pedagógicas da História da Matemática e das boas razões para o ensino com Resolução de Problemas que apareceram com mais evidência na investigação em sala de aula. Destacamos esses resultados em nove grupos divididos em duas seções: 1ª) Identificação das potencialidades pedagógicas da História da Matemática que se fizeram presentes: a) A História como fonte de motivação; b) A História ajuda a explicar o papel da Matemática na sociedade; c) A História como um instrumento que pode promover a aprendizagem significativa e compreensiva da Matemática; d) A História faz da Matemática um conhecimento menos assustador para os estudantes e para a comunidade em geral e 2º) Identificação das boas razões para o ensino com Resolução de Problemas percebidas com maior evidencia na investigação: a) A Resolução de Problemas concentra a atenção dos alunos sobre as ideias e em dar sentido às mesmas; b) A Resolução de Problemas possibilita um ponto de partida para uma ampla gama de alunos; c) A Resolução de Problemas desenvolve nos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer Matemática; d) A Resolução de Problemas fornece dados contínuos para a avaliação e que podem ser usados para tomar decisões educacionais; e) Uma abordagem de Resolução de Problemas envolve os estudantes. Ressaltamos que o processo de resultados em nove grupos tem por base os conhecimentos pertinentes a literatura em Educação Matemática e em conformidade com os objetivos da pesquisa.

Identificação das potencialidades pedagógicas da História da Matemática que se fizeram presentes

a) A História como fonte de motivação:

Já no 1º encontro, quando os alunos leram o Texto 1, houve várias perguntas a respeito do mesmo. Professor e alunos compartilharam significados textuais de forma interativa. O modo como ocorreu nos levou a acreditar que a História “trouxe mais do que motivação”, a começar pela predisposição para aprender provocada no aluno, propiciou a interação entre o novo conhecimento e o conhecimento prévio, evidenciou a relevância do novo conhecimento construído, enfim contribuiu para uma aprendizagem significativa crítica (MOREIRA, 2011). Também, com base nos outros encontros e no questionário, não temos dúvidas de que os estudantes perceberam a História como uma ferramenta importante para o ensino e aprendizagem da Análise Combinatória. Algumas das opiniões dos alunos:

> Aluno B: Torna a matéria interessante, além de aprender um pouco mais sobre a evolução da Matemática ao longo dos anos.
>
> Aluno E: Pois não foi apenas aplicação de fórmulas e sim houve um entendimento mais completo [...].
>
> Aluno F: Porque é uma introdução interessante, que envolve e oferece informações extras.
>
> Aluno G: Porque traz mais inspiração.

Miguel e Miorim (2011) e Mendes et al. (2006) e outros acreditam que a História traga motivação para a aprendizagem, porém para nós trouxe mais que motivação.

Um outro grupo dos alunos não concorda com todos benefícios da História da Matemática para a aprendizagem. Portanto, demonstram um pensamento crítico. Algumas das opiniões contrárias dos alunos:

> Aluno H: Embora a utilização da História no ensino da Matemática traga conhecimento interessante, não foi crucial, nem motivador para a aprendizagem.
>
> Aluno I: No curso de Matemática é bem raro alguém se interessar pela História, ainda mais em um período corrido.

Segundo[9] Miguel e Miorim (2011, p. 62), em relação à História na Educação Matemática: “possibilita o desenvolvimento de um pensamento crítico, de uma qualificação como cidadão e de uma tomada de consciência e de avaliação de diferentes usos sociais da Matemática”.

Os alunos compreendem como os conceitos se desenvolvem, em concordância com Mendes et al. (2006). Desde a leitura do Texto 1 (1ª encontro) até o 12º encontro, os alunos conseguiram verificar o desenvolvimento da

[9] Salientamos no cap. 2 que são várias as potencialidades pedagógicas da História da Matemática na Educação Matemática, porém a “potencialidade” em Miguel e Miorim (2011), citada acima, não se encontra no nosso cap. 2, mas apareceu em nossa investigação.

“Combinatória” devido as necessidades e preocupações de diferentes culturas, em tempos diferentes, em responder a problemas de ordem prática ou problemas ligados a outras ciências, ou ainda vinculados à Matemática pura. Algumas das opiniões dos alunos:

> Aluno L: É interessante conhecer os grandes matemáticos, e como chegaram as conclusões que hoje nos auxiliam.
>
> Aluno D: Pois é mais um conhecimento, interessante saber como e porque iniciou o estudo.

Concordando com Miguel (1997, apud ROQUE e GOMES, 2012), a História pode servir de apoio para se atingir, com os alunos, objetivos pedagógicos que os levem a perceber, dentre outras coisas: a Matemática como criação humana; as razões pelas quais as pessoas fazem Matemática, as necessidades práticas, sociais econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento da Matemática.

b) A História ajuda a explicar o papel da Matemática na sociedade:

De forma mais evidente no 1º, 5º, 11º e 12º encontros e com base no questionário, os alunos perceberam a História da Matemática como criação humana, as razões pelas quais as pessoas fazem Matemática; as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas, enfim, o papel da Matemática na sociedade. Em concordância com Fauvel e Maanen (1991, apud MENDES et al., 2006).

No Texto 1, no 1º encontro, observou-se que a Análise Combinatória surgiu das antigas civilizações para responder à pergunta comum “quantos?” antes mesmo de qualquer registro histórico. Pois, de acordo com Biggs (1979), como já nos referimos, a pedra fundamental da Combinatória está no Princípio de Adição e no Princípio de Multiplicação. Com base ainda no mesmo texto vimos que o pastoreio surgiu com a retenção de animais selvagens para reserva de alimentos e por isso muitos desses animais foram domesticados. Isso provavelmente acarretou uma das primeiras formas de contagem. Também com a agricultura houve a necessidade de contar os dias para a colheita de alimentos. Os grupos sociais assim surgidos, por razões práticas e utilitárias, provavelmente sentiram a necessidade da contagem.

No Texto 3 (5º encontro), percebe-se a “explosão” do desenvolvimento da Análise Combinatória, devido aos avanços sociais, políticos e econômicos que vivia a sociedade da época e, também, principalmente a criação da teoria da probabilidade, com suas várias aplicações.

Com base ainda no Texto 3 (12º encontro) salientamos que nas últimas décadas a Análise Combinatória vem tendo um crescimento muito grande, com aplicações vinculadas ao cotidiano, a fenômenos naturais, em questões do mundo real e cada vez mais complexas. Tudo isso acarretou o surgimento de novas técnicas de contagem, como a das Funções Geradoras, Teoria das Partições, o Princípio de a Dirichlet e o Princípio da Inclusão e Exclusão. Por último falamos do começo da Teoria dos Grafos, relativamente recente na História da Matemática, mas de grande aplicabilidade, por exemplo, engenharia elétrica, pesquisa operacional.

Algumas das opiniões dos alunos:

> Aluno X: É perceptível relações com o cotidiano.
>
> Aluno K: A aplicação da matéria no cotidiano é bastante ampla.
>
> Aluno H: Extremamente útil para desenvolvimento do raciocínio lógico e de entendimento de muitos eventos cotidianos.

De forma clara nas falas dos alunos percebemos que eles reconhecem que o conhecimento matemático gerado em sala de aula tem várias aplicações em situações do cotidiano.

c) A História é um instrumento que pode promover a aprendizagem significativa e compreensiva da Matemática

Procuramos ajudar o aluno a construir os conceitos ou noções matemáticas, através de situações que pudessem dar significado ao conteúdo estudado, de forma sempre compreensiva à situação realizada.

Percebemos que a História propiciou uma abordagem rica em significados. Daí, a História pode ser uma fonte de compreensão e significados para o ensino e aprendizagem da Matemática em sala de aula, em concordância com Miguel (1997, apud ROQUE e GOMES, 2012). Um dos exemplos foi na “construção” do “Princípio Multiplicativo” (2º encontro), em que utilizamos o problema 79 do papiro de Rhind, o sistema de agrupamento multiplicativo dos chineses, a multiplicação em reticulado dos hindus (sem falar nos problemas do cotidiano), de forma que o aluno conseguiu compreender e atribuir significado a cada situação realizada.

d) A História faz da Matemática um conhecimento menos assustador para os estudantes e para a comunidade em geral

Em todos os encontros sempre percebemos que os alunos estavam empenhados nas atividades de sala de aula, e as atividades extraclasse foram entregues. Durante as aulas, os alunos participavam com perguntas, sugestões e resoluções dadas por caminhos alternativos e criativos. Considerando ainda que na primeira avaliação não houve um rendimento satisfatório, não tivemos caso de alunos "assustados" com a proposta envolvendo História e Resolução de Problemas. Por outro lado, exatamente 2 alunos tiveram uma preocupação um pouco maior, mas consideramos o fato natural. Conversamos com eles, orientamos e os incentivamos para as próximas etapas do curso. Não tivemos casos de pais assustados, querendo conversar com o professor para saber a respeito do filho ou qualquer reclamação ou dúvida externa. Verificamos que a História propiciou tornar a Matemática um conhecimento menos assustador, em concordância com Fauvel e Maanen (1991, apud MENDES et al., 2006).

Listamos abaixo algumas outras opiniões dadas pelos alunos, em relação as contribuições da História para as aulas de Análise Combinatória:

> Aluno U: Porque auxilia ao entendimento da Combinatória.
>
> Aluno C: Mostrou a evolução da matéria ao longo dos anos, acho isso interessante.
>
> Aluno M: Pois abordou uma nova visão, do ponto de vista da matéria exata.
>
> Aluno V: Porque aborda os acontecimentos passados e atuais nos problemas que envolvem a Análise Combinatória.

Na opinião do Aluno U percebemos que a História contribuiu para a compreensão de conceito de Combinatória, em concordância com Miguel (1997 apud ROQUE e GOMES, 2012).

O aluno M percebeu novidade no curso de matemática. Para nós novidade traz curiosidade e curiosidade traz diálogo, isto é, interação entre pessoas; que em concordância com Moreira (2011) e Freire (2003) é indispensável para concretização de um episódio de ensino.

Já o alunos C e V ao compararem conhecimento antigo com o moderno ao longo da História da sociedade, em concordância com Fauvel e Maanen (1991 apud MENDES et al., 2006), estabelecem-se os valores das técnicas modernas.

Identificação das boas razões para o ensino com Resolução de Problemas percebidas com maior evidencia na investigação

a) A Resolução de Problemas concentra a atenção dos alunos sobre as ideias e em dar sentido às mesmas.

Percebemos nos encontros, os alunos concentrados e estimulados em resolver os problemas (individualmente ou em grupos), e, conforme resolviam, refletiam sobre as ideias contidas neles. Desse modo iam unindo essas ideias novas com as então existentes (conhecimento prévio), por exemplo, ideias vindas de um outro problema já antes resolvido. Acontecia, assim, uma melhor compreensão, conforme apresenta Walle (2006).

Percebemos que Resolução de Problemas pode favorecer a aprendizagem significativa crítica também, uma vez que você pode buscar conhecimento anteriores para compreender novos. Através do compartilhamento de conhecimento entre professor e alunos e dos trabalhos em grupos, amplia-se a interação social de acordo com Moreira (2011).

b) A Resolução de Problemas possibilita um ponto de partida para uma ampla gama de alunos:

Com a dinâmica aplicada em sala de aula, baseada na Resolução de Problemas, pudemos verificar que os alunos (em grupo ou individualmente) chegaram à solução por caminhos diferentes e alguns dos caminhos encontrados foram socializados, para uma melhor reflexão da compreensão das resoluções dos outros. A dinâmica de Resolução de Problemas não ficou restrita à sala de aula, pois as atividades com problemas combinatórios foram dadas para os alunos resolverem no lar e entregues ao professor. Depois de analisarmos o material entregue, constatamos também a diversidade de caminhos para chegar à solução de um mesmo problema. Em concordância com Walle (2006), as boas tarefas, envolvendo problemas, trazem múltiplos caminhos para chegar à solução.

c) A Resolução de Problemas desenvolve nos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer Matemática:

Nossas atividades nos encontros foram baseadas na Resolução de Problemas, que exigiam uma alta dose de ideias criativas por parte de muitos deles. Percebemos que os alunos desenvolveram e compreenderam os problemas. Por conta disto, observamos a ampliação da autoconfiança e a autoestima dos alunos. Mesmo a primeira avalição não tendo um resultado desejável, percebemos nos alunos confiança neles mesmos e no trabalho que estava sendo realizado pelo professor, em conformidade com Walle (2006) a autoconfiança e a autoestima são ampliadas e fortalecidas quando ao alunos resolvem um problema e desenvolvem sua compreensão.

d) A Resolução de Problemas fornece dados contínuos para a avaliação e que podem ser usados para tomar decisões educacionais:

Nas discussões de Resolução de Problemas, os alunos apresentavam e defendiam suas ideias, consideravam as soluções dos outros, questionavam, faziam representação de soluções. Enfim, forneceram, de modo natural, informações valiosas para que nós pudéssemos planejar outras atividades e dar uma assistência individual, quando houve necessidade, em acordo com Walle (2006).

e) Uma abordagem de Resolução de Problemas envolve os estudantes:

Usualmente, ocorre uma abordagem centrada no professor, ou seja, o professor dá as instruções (ou receitas), os alunos não participam do processo de fazer Matemática e em concordância com D'Ambrosio (1993): "o legítimo ato de pensar matematicamente é escondido do aluno". Porém com a nossa proposta, os alunos são envolvidos, deixam de ser expectadores e passam a ser construtores do conhecimento. Não percebemos problemas de indisciplina e verificamos um empenho prazeroso em resolverem problemas. De acordo com Walle (2006), quando os alunos resolvem problemas de modo que lhes façam sentido é gratificante e a tarefa da aprendizagem é mais envolvente.

Listamos algumas das opiniões dos alunos, em relação às contribuições dos problemas para o ensino e aprendizagem da Análise Combinatória inseridos na proposta.

> Aluno F: A Resolução de Problemas ajudou a entender diferentes formas de pensamento na Resolução de Problemas.

> Aluno C: Pois com eles aprendemos a lidar com variações para que possamos resolver outros.
>
> Aluno S: A quantidade de exercícios foi muito boa e de qualidade suficiente para ajudar a compreender melhor a Combinatória.
>
> Aluno D: Porque usa situações do cotidiano, relacionando a matéria com nossa experiência.
>
> Aluno Z: A prática de exercícios auxilia na fixação do assunto.
>
> Aluno H: Desenvolve um raciocínio intuitivo em cada pessoa.
>
> Aluno I: Porque praticando, consegui com o tempo desenvolver métodos para resolver problemas de uma melhor forma.

Nas falas dos alunos F, C, S, Z, H e I entendemos que os mesmos dizem que tiveram a habilidade de resolver problemas melhorada, quando viram caminhos distintos de resolução de um mesmo problema. O aluno D destaca as situações do cotidiano vinculadas aos problemas, além da valorização da experiência da aluno (ou conhecimento prévio).

Os resultados apontam para uma contribuição significativa do processo de uma abordagem envolvendo História da Matemática e Resolução de Problemas para o ensino e aprendizagem da Combinatória, destinada aos alunos do 2º ano do Ensino Médio. Tanto a História, quanto a Resolução de Problemas da forma como trabalhada favoreceram a aprendizagem significativa crítica.

Opiniões dos alunos em relação às contribuições da proposta de integração História da Matemática e Resolução de Problemas para o ensino e aprendizagem da Análise Combinatória.

> Aluno W: Pois é uma forma de associar teoria e prática.
>
> Aluno E: Pois esclareceu algumas dúvidas que as fórmulas matemáticas não explicam.
>
> Aluno Q: Para entendermos sobre a matéria e seu surgimento e utilidade.
>
> Aluno M: Porque aprende-se as áreas usadas e que podem ser aplicadas em situações futuras.
>
> Aluno L: Podemos ver como os antigos resolviam os problemas.
>
> Aluno J: Porque facilita a visualização da resolução prática dos problemas.

No nosso entender, as falas dos alunos indicam que a integração da História da Matemática com a Resolução de Problemas traz uma melhor facilidade de compreensão do estudo da Análise Combinatória, em sala de aula.

Assim, ao apresentarmos situações dentro da História e com problemas do cotidiano, colaboramos para uma aprendizagem significativa critica, Moreira (2011). Porque o que colocamos em jogo durante toda a dinâmica dos encontros foi a relevância desse olhar para a Matemática como um produto cultural, criada a princípio, por necessidades práticas da humanidade e que está permanentemente num processo de construção e reconstrução como ciência de fato.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa pesquisa teve como objetivo investigar as potencialidades pedagógicas da História da Matemática como ferramenta didática, associada à Resolução de Problemas em uma proposta de ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, para alunos do 2º ano do Ensino Médio e verificar o grau de validação da proposta. Sabemos que o tema Análise Combinatória, aqui tratado, causa desconforto tanto a alunos quanto a professores. Para nos ajudar nesse feito buscamos: identificar se os alunos perceberam, pelo menos, alguns benefícios da História da Matemática confirmados na literatura; identificar se os alunos conseguiram estabelecer relações entre o conhecimento da Análise Combinatória com outros campos do conhecimento; avaliar o envolvimento dos alunos no decorrer da proposta; compreender, analisar e discutir os modos diferentes de como os alunos resolveram os problemas; identificar se os alunos tiveram uma facilidade maior ou não na compreensão dos conceitos combinatórios abordados na proposta; analisar a capacidade dos alunos para a Resolução de Problemas, como também seu espírito crítico e sua criatividade, e avaliar o aprendizado do conhecimento da Análise Combinatória.

Ao analisar o material produzido na vivência escolar, obtivemos subsídios que evidenciam que a proposta contribuiu, de modo substancial, para a construção do conhecimento de Análise Combinatória, em sala de aula, para a maioria dos participantes da pesquisa.

Os resultados mostram que é possível acreditar que a valorização da História para o ensino da Matemática não é uma moda transitória no discurso educacional, mas deve ser adotada como prática permanente, principalmente integrada à Resolução de Problemas (contextualizados, interdisciplinares ou até mesmo da Matemática pura) que possam contribuir para o ensino e a aprendizagem do Raciocínio Combinatório. Com estes recursos, mesmo os alunos de uma escola tradicional, sentem-se predispostos e valorizados para a aprendizagem, fazendo com que a sala de aula seja um lugar agradável.

Várias das potencialidades pedagógicas da História da Matemática encontradas na literatura, com Miguel (1997), Miguel e Miorim (2011), Fauvel e Maanen (1991 apud MENDES, 2006), dentre outros, puderam ser percebidas nos encontros. Mas destas, chamamos a atenção, por exemplo, a História foi “mais que” fonte de motivação; a História pode servir de apoio para se atingir, com os alunos, objetivos pedagógicos que os levem a perceber, dentre outras coisas: a Matemática como cultura, fruto da criação humana; as razões pelas quais as pessoas fazem Matemática, as necessidades práticas, sociais econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento da Matemática; e a História é um instrumento que pode promover a aprendizagem significativa e compreensiva da Matemática, pois a humaniza.

Em relação ao ensino e aprendizagem através da Resolução de Problemas, de modo evidente, encontraram-se as confirmações das boas razões, de acordo com Walle (2009), para prosseguir com a proposta. O que nos parece é que os alunos gostaram da forma como planejamos ou selecionamos (ou criamos) a cada encontro os problemas e também a forma que trabalhamos na sala de aula.

Salientamos também que tanto a História quanto a Resolução de Problemas propiciaram a provocação da predisposição para aprender, permitiram averiguar o conhecimento prévio e ensinar de acordo, favoreceram uma postura dialógica, um postura epistemologicamente curiosa e assim realizamos uma aprendizagem significativa crítica com base em Moreira (2011).

Enfim, ressaltamos que a nossa hipótese inicial foi confirmada, ou seja, que é possível ensinar e aprender Análise Combinatória de modo mais interessante e significativo para os alunos quando se desenvolve uma proposta baseada na História da Matemática, integrada com a Resolução de Problemas.

Uma dificuldade encontrada foi, devido ao calendário atípico que enfrentamos nos encontros (ou na vivência da proposta), não nos possibilitou aplicar uma sequência didática sem interrupções. Houve caso de diferença de duas semanas de um encontro para o outro.

Outra dificuldade que tivemos, confirmada na literatura, por Tzanakis; Arcavi et al. (2000 apud ROQUE e GOMES, 2012), dentre outros, foi a falta de recursos materiais apropriados para ajudar aqueles professores que desejam integrar ao planejamento informações históricas ao ensino da Matemática. No Brasil existe pouca publicação de material nesse campo de conhecimento. Por isso a ideia de elaborar um livro como produto educacional, fruto do trabalho realizado nessa pesquisa, uma obra dedicada a alunos do Ensino Médio.

O nosso desejo principal é contribuir para aprimorar o ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória, de forma prazerosa, mas ensinando a Matemática com o rigor necessário, e que desenvolva no educando um espírito reflexivo, criativo, participativo, responsável e também contribua para que o professor, ou futuro professor venha a ter um novo olhar sobre o ensino-aprendizagem do raciocínio combinatório.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, A. L. **Ensino e Aprendizagem de Análise Combinatória com Ênfase na Comunicação Matemática: um estudo com o 2º ano do Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) -Universidade Federal de Ouro Preto, MG,2010.

ARAMAN, E.M.O.; BATISTA, I.L. Contribuições da História da Matemática para a Construção dos Saberes do Professor de Matemática. **BOLEMA**, Rio Claro (SP), v.27, n. 45. p. 1-30, Abr. 2013.

BACHX, A.C., POPPE, L.M.B., TAVARES. R.N.O. **Prelúdio à Analise Combinatória**. Companhia Editora Nacional, 1975. 234p.

BIGGS, N. L. The roots of combinatorics. **Revista História Mathemática**. Vol. 6.1979, p. 109-136.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blüche/Edusp, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC / SEF, 1997. 142p.

D'AMBROSIO, B. S. **Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio. Proposições**, v. 4, no. 1, p. 35-41, mar. 1993.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de aritmética**. São Paulo, Atual, 1991.

DOMINGUES, H. H., **A gênese da teoria das probabilidades**. In Iezz et al. Matemática: 2°. Série, 2º. grau, 8 ed. rev. São Paulo, atual, 1990, p.155).

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Higino H. Domingues. Campinas. Unicamp, 1995.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**, 27.ed.São Paulo: Paz e Terra, 2003.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar. V. 5: Combinatória, Probabilidade**. São Paulo. Atual, editora, 2004.

IFRAH, G. **Os números:** história de uma grande invenção. tradução de Stella Maria de Freitas Senra: revisão técnica Antonio José Lopes, Jorge José de Oliveira. – 11 ed. – São Paulo: Globo, 2005.

LAMONATO, M., PASSOS, C. L. B. Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino de matemática. **Zetetiké** – FE/Unicamp – v. 19, no 36 – jul/dez 2011.

LOPES, J. M.; REZENDE, J. T. C. Uma Proposta para o Estudo de Probabilidade no Ensino Médio. **Zetetiké** – FE/Unicamp – v. 19, n. 36 – jul/dez 2011.

LUDKE, M. E ANDRÉ, M. **Abordagens Qualitativas de Pesquisa: A Pesquisa Etnográfica e o Estudo de Caso**.IN: Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas. São Paulo: EPU, 2001.

GUNDLACH, B.H. **História dos números e numerais** / Bernard H. Gundlach; trad. Hygino H. Domingues. – São Paulo: Atual, 1992. – (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula; v. 1)

MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; E VALDÉS, J. N. **A História como um agente de Cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Sulina, 2006. 182p.

MENDES, I.A. **Investigação histórica no ensino da Matemática**. Rio de janeiro: Ciência Moderna, 2009.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática:** propostas e desafios. – 2º ed. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011 – 208 p. (Tendências em Educação Matemática).

MOREIRA, D. A. **O método fenomenológico na pesquisa**. São Paulo: Pioneira Thomson, 2002.

MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem**, 2. ed. ampl. - São Paulo: EPU, 2011.

MORGADO, A. C., JOÃO, B. P. Carvalho, Paulo C. P. Carvalho, Pedro Fernandez. **Análise Combinatória e Probabilidade**, 9 ed. Rio de Janeiro – SBM, 2006.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problema**. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro. Interciência, 2006.

ROQUE, A. C. C.; GOMES, M. L. M. História da Matemática e suas potencialidades pedagógicas em salas de aula do Ensino Fundamental. **Boletim Gepem** / no 61 – jul./dez. 2012 / 79 – 94

SANTOS, J. P. O., MELLO, M. P. e MURARI, I. T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. Rio de Janeiro. Editora Ciência Moderna Ltda, 2007.

SANTOS, P. F. **Uma Abordagem da Análise Combinatória sem o uso Abusivo de fórmulas** (Mestrado Profissional em Matemática Rede Nacional). Universidade Federal de Viçosa, MG, 2013.

SILVA, C. P. **A matemática no Brasil: história de seu desenvolvimento**.3º ed. ver. – São Paulo, Blucher, 2003.

SILVEIRA, J.F.P. **O triângulo de Pascal é de Pascal?**, 2001. Disponível em: <http//www.mat.ufrgs.br/potosil/histo2b.html>. Acesso em: 11/12/2013.

TAHAN, M. **Antologia da Matemática, 2º. Volume**, 2º. Edição. - São Paulo, edição Saraiva, 1965.

TAVARES, C.S.; BRITO, F.R.M. Contando a História da Contagem. **Revista do professor de Matemática** SBM V-57, junho,2005.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental, formação de professores e aplicação em sala de aula**, 6ª ed. Porto Alegre: artmed, 2009.

VIANNA, C.R. **Matemática e História: algumas relações e implicações pedagógicas**. 1995. 228f Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.

APÊNDICE 1: Texto 1, Texto2 e Texto 3

Texto 1: A contagem na história das civilizações

Neste texto abordamos o modo de vida do homem primitivo, suas necessidades, atividades e como se desenvolveu a contagem. Fizemos uma associação da contagem com a Análise Combinatória, apresentamos uma visão geral da Análise Combinatória e para completar demos alguns exemplos do seu campo de aplicações.

O homem da idade das pedras ou primitivo

O homem da idade das pedras (ou primitivo, ou ainda das cavernas) em algum momento de sua história não sabia contar porque não tinha esta necessidade. Podemos considerar essa afirmação analisando o modo de vida do homem primitivo. Ele era nômade, por exemplo. Andava em pequenos grupos, abrigava-se em savanas ou cavernas, alimentava-se da caça e da coleta de alimentos, não comerciava, isto é, não comprava, não vendia, logo não precisava de dinheiro, não plantava, não criava animais e nem fazia sua casa. Pelo modo de vida do homem dessa época, verifica-se que nada o obrigava ou fazia com que sentisse a necessidade de contar, portanto esta prática não fazia parte do seu cotidiano. A etnografia, um ramo especial da antropologia, analisa alguns grupos humanos que existem ainda hoje, e que vivem de forma análoga ao homem primitivo. Esses grupos humanos referidos são os indígenas, encontrados no Brasil, na África, na Austrália ou em outras regiões dispersas do planeta. Já foi verificado que existem indígenas que não sabem que dois e dois são quatro. Embora o homem da idade das pedras, em algum momento de sua história, não soubesse contar, ele tinha a capacidade de distinguir pequenas quantidades, porém essa não é uma característica somente do ser humano. Alguns animais, como, o corvo, o cachorro, a tartaruga, entre muitos outros apresentam essa percepção que em matemática é denominada de "sentido numérico" ou "sensação numérica".

Como o homem aprendeu a contar?

Os pequenos grupos de nômades pouco a pouco se tornavam cada vez maiores e acabaram formando as pequenas aldeias e, bem depois, ainda de maneira gradativa, surgiram as cidades e assim foi até a formação das grandes civilizações do passado.

O que fez o homem se tornar sedentário, com habitação fixa, foram a agricultura e a criação de animais. Com a agricultura houve a necessidade de contar os dias para a colheita de alimentos. Por outro lado, o pastoreio surgiu com a retenção de animais selvagens para reserva de alimentos, e por consequência muitos desses animais foram domesticados pelo homem. Os grupos sociais assim surgidos por razões práticas e utilitárias, provavelmente sentiam a necessidade da contagem.

Uma das primeiras formas de contagem possível ocorreu com um pastor cuidando de um grupo de ovelhas. Todos os dias pela manhã, ele as levava para o pasto de modo que cada ovelha do rebanho estava associada a uma pedrinha (ou pauzinho, concha, etc.), correspondência um a um, ou também chamada de correspondência biunívoca ou modernamente uma bijeção. No final do dia, quando voltava com o rebanho, novamente fazia a associação de cada pedrinha a uma ovelha. Isso era feito para ter certeza se algum animal ficara no pasto ou se a criação aumentara com o nascimento de mais animais, ou ainda se outro animal juntara-se ao seu rebanho. A correspondência biunívoca (bijeção) foi de suma importância para juntar pedrinhas e saber a quantidade de ovelhas. Desde milênios, a espécie humana utiliza-se da bijeção para a contagem, antes mesmo de ter a noção de número abstrato.

Números concretos e abstratos

Alguns autores fazem a distinção de números concretos e abstratos. Outros pensam ser um absurdo essa distinção. Para eles, só existem números abstratos e, por outro lado, existem pessoas que creem somente em números concretos. A classificação como número concreto é atribuída àquele número que vem seguido de uma unidade. Por exemplo, oito laranjas, sete mulheres. Já o número abstrato é o número não seguido de unidades, como dez, duzentos e três, dois milhões.

Voltemos, portanto, a nossa contagem por meio de pedrinhas. Para sermos mais coerentes com a história, não só as pedrinhas eram usadas, mas também marcas em ossos, pedras, madeiras, nós em corda, por meio de fichas, parte do corpo humano, por exemplo, as falanges dos dedos, os dedos da mão e dos pés, uma das mãos (referindo-se a 5), duas mãos (referindo-se a 10), etc.

Qual era a vantagem de calcular por meio de pedrinhas?

Quando você associa pedrinhas (ou marca em ossos, parte do corpo, etc.), a um conjunto de animais, fica muito mais fácil juntar as pedrinhas perto de você e também de manuseá-las, de modo que esse conjunto serve de referência.

Quando o homem tornou-se sedentário, trabalhando na agricultura, na criação de animais, construção de moradia, armazenamento de alimentos, com o comércio rústico, na base do troca-troca e com o sentimento de propriedade, a necessidade da contagem foi, aos poucos, materializando-se como uma nova realidade.

Quando o homem aprendeu a contar?

Existem evidências arqueológicas de que o homem sabe contar há, pelo menos, 50 000 anos. Todavia, não há a possibilidade de fixar um período da história primitiva em que foram criados os números cardinais. Documentos antigo provam a presença do conceito sendo comum nas antigas civilizações, tais como: China, Mesopotâmia, Índia e Egito. O fato é que todas essas civilizações desejavam responder à pergunta “quantos?”. Antes de qualquer registro histórico na forma escrita, o conceito de número já existia, porém a maneira como ocorreu é amplamente conjectural.

Nos dias de hoje, contar é entendido como uma faculdade humana. Somente o homem possui essa capacidade e é considerado um fenômeno complexo, ligado ao desenvolvimento da inteligência.

Percebemos que, com o passar do tempo, a necessidade de contar objetos de um conjunto foi surgindo, provavelmente por razões práticas e utilitárias. A princípio, contar parece ser uma tarefa bem simples e de fato é, quando os elementos do conjunto considerado são poucos. Porém, quando estes elementos são muitos e é preciso contá-los sob certas condições, teremos que ter técnicas de contagem mais sofisticadas, ou seja, análise combinatória. Ressaltamos ainda que, muitos problemas de análise combinatória requerem plena compreensão do enunciado e uma dose alta de criatividade para sua resolução.

A primeira técnica matemática aprendida é “contar” (enumerar os elementos de um conjunto e obter o número de seus elementos). Além disso, podemos dizer que a origem das operações aritméticas está ligada a problemas de contagem.

Sabemos que a escrita veio depois da contagem, mas para a ocorrência da escrita, também houve a necessidade de criar um conjunto de símbolos e regras, para o surgimento de palavras com sentido. Esse fato, combinações de símbolos com regras, exigiu uma boa dose de análise combinatória.

O que é análise combinatória?

A análise combinatória, ou simplesmente combinatória, tem como objetivo principal estabelecer métodos de contagem, ou mais especificamente, a análise combinatória tem como função desenvolver métodos que possibilitam contar os elementos de um conjunto finito, de modo que esses elementos são agrupamentos formados que satisfazem certas condições.

Tudo o que foi exposto no parágrafo acima está de acordo com a combinatória estudada no ensino médio, onde nós desenvolvemos este trabalho. Essas considerações se referem a problemas de contagem, que ocorrem com muita frequência na combinatória. Todavia, numa visão mais detalhada de análise combinatória, podemos dizer que além dos problemas de contagem, temos os problemas de existência, que ocorrem também largamente, que visam provar a existência de agrupamentos de elementos de um conjunto finito, sob certas condições, como os princípios de Dirichlet e de inclusão e exclusão. Os agrupamentos referidos podem ser formados por objetos, símbolos, acontecimentos ou pessoas.

Os métodos da combinatória são atualmente aplicados a diversos campos do saber humano: no cálculo de probabilidades, em estatística, em problemas de transportes, de confecções de planos de produção, da teoria da informação e muitos outros campos. Em matemática pura, esses métodos também são utilizados no estudo dos fundamentos da geometria, nas álgebras não associativas e em vários outros assuntos.

Texto 2: Contribuições das antigas civilizações para a análise combinatória

Apresentamos aqui diversos fatos e feitos das antigas civilizações que estão relacionados ao que hoje chamamos de análise combinatória.

.

Os egípcios

A civilização egípcia antiga era centrada no rio Nilo e, portanto apresentava um isolamento natural, ou seja, não estava aberta a invasores. Outra característica relevante é que era governada pelos Faraós, homens ricos e poderosos, amigos dos sacerdotes. Por outro lado, existia uma outra classe bem mais numerosa, que fazia o trabalho braçal, a classe dos escravos.

Devido ao clima seco, muitos documentos (os chamados papiros) foram conservados. Entre eles encontram-se os principais e mais antigos que dizem respeito à matemática. São os seguintes: o papiro de Rhind ou Ahmes (1650 a.C.), que se encontra no Museu Britânico, e o papiro de Moscou ou Golems (1850 a.C.), que está no Museu de Belas Arte de Moscou.

O fato de os egípcios dedicarem certos cuidados aos mortos, o que os levou a construção de tumbas e templos. Diversas e importantes informações de matemática marcadas foram encontradas nas paredes dessas construções. As famosas pirâmides do Egito foram construídas como túmulos reais. Não há dúvidas de que os egípcios atingiram um alto grau de desenvolvimento, em relação às outras civilizações de sua época. Dominavam uma matemática notável, aplicada às construções e à agrimensura. Mas, contrariando o senso comum, a matemática egípcia não atingiu o nível da matemática da Babilônia.

O problema 79 do papiro de Rhind

No problema 79 do papiro de Rhind, encontramos um dos mais antigos documento sobre análise combinatória.

Para termos uma noção de como os egípcios contribuíram para a combinatória, vamos resolver o problema 79 do papiro.

Considere no documento referido os seguintes dados:

Bens	
Casas	7
Gatos	49
Ratos	343
Espigas de trigo	2401
Hecates de grãos	16 807
Total	19 607

Ou também podemos escrever os bens, conforme o entendimento magnífico do historiador Moritz Cantor (1907). Assim: Uma relação de bens consistia em sete casas; cada casa tinha sete gatos; cada gato comeu sete ratos; cada rato comeu sete espigas de trigo; e cada espiga de trigo produzia sete hecates de grãos. Casas, gatos, ratos, espigas de trigo e hecates de grãos, quantos havia disso tudo?

A formulação do problema acima foi uma interpretação do historiador Cantor com um problema da idade média que aparece no Líber Abaci (1202) de Leonardo Fibonacci, escrito a seguir:

Há sete senhoras idosas na estrada de Roma. Cada senhora terá sete mulos; cada mulo transporta sete sacos; cada saco contém sete pães; com cada pão há sete facas; para cada faca há sete bainhas. Entre mulheres, mulos, sacos, pães, facas e bainhas, quantos estão na estrada de Roma?

Sobre a ótica do raciocínio combinatório o problema dos "Bens" sugere a aplicação de dois princípios de grande importância para a resolução de problemas em análise combinatória: o "princípio de adição" e o "princípio multiplicativo".

Percebemos o princípio básico de contagem, chamado de "princípio de adição", quando fazemos a união de dois conjuntos disjuntos, e, obtemos um terceiro conjunto cujo número de elementos é igual à soma dos elementos dos conjuntos anteriores. Por exemplo, o conjunto das casas com o conjunto dos gatos é $7+49 = =56$. Por outro lado, por exemplo, o número de ratos é $7\cdot 7\cdot 7=343$, o que retrata o "princípio multiplicativo".

Um pouco mais sobre o papiro de Rhind

O papiro de Rhind (ou Ahmes) data de 1 650 a.C., aproximadamente. É uma fonte primária e rica do Egito antigo que contém informações de matemática, ou melhor, são 85 problemas, muitos dos quais são aplicações da matemática a problemas práticos. Esse papiro foi copiado em escrita hierática pelo Ahmes de um documento mais antigo. O egiptólogo escocês A. Henry Rhind encontrou este papiro no Egito. Tempos depois, o Museu Britânico comprou o documento, porém faltava-lhe uma parte. Em torno de quatro anos, o egiptólogo americano Edwin Smith adquiriu (também no Egito) um papiro com a parte que faltava do papiro Rhind, mas pensou que se tratava de um papiro médico e fez a doação do papiro para a Sociedade Histórica de Nova York. A Sociedade quando percebeu que não se tratava de um documento médico e continha parte do papiro de Rhind, doou a porção de papiro ao Museu Britânico na Inglaterra, completando dessa forma o papiro de Rhind.

Os gregos

Os grandes rios foram de fundamental importância para a maioria das grandes civilizações do passado, pois eram fontes de água, de alimentos, transporte, enfim, fonte de vida. O rio Nilo foi de suma importância para os egípcios, assim como os rios Tigre e Eufrates para os mesopotâmicos, o rio Indo para os hindus e de modo análogo assim aconteceu para outras civilizações. Porém, os gregos não se estabeleceram às margens de nenhum grande rio e sim numa região montanhosa e com muitas pequenas ilhas, com uma costa considerada uma das maiores em extensão do planeta em relação à superfície. A agricultura era de caráter familiar, em pequenas propriedades e os cultivos que se destacavam eram uvas e azeitonas. Mantinham um comércio desenvolvido e um sistema de transporte de navegação avançado. A Grécia foi a cultura que mais influenciou a nossa civilização ocidental

Aqui o que mais nos interessa são os problemas ou atividades que podemos associar à análise combinatória.

Euclides de Alexandria

Quase nada se sabe sobre a vida de Euclides, mas costuma-se dizer que foi morar em Alexandria, capital do Egito, quando o Egito estava sob o domínio grego, há aproximadamente 300 a.C. A história conta que em Alexandria ele liderou um grupo de pesquisa em Matemática e escreveu uma obra conhecida como "Elementos de Euclides" ou simplesmente "Elementos", formada por treze livros, contendo geometria plana e espacial, teoria dos números e Álgebra elementar. A obra "Elementos" superou todos os trabalhos que tinham sido publicados até então.
Para se ter uma ideia da importância dessa obra, nenhuma outra, foi tão estudada e editada, a exceção só é feita no caso da bíblia. Qualquer estudante do segundo seguimento do ensino fundamental já estudou, pelo menos, uma parte desse trabalho, por exemplo, quando deve contato com a geometria no plano. Não há dúvida que Euclides teve a influência de Tales de Mileto (640-548 a.C.) e de Pitágoras de Samos (582-497 a.C.), quando escreveu os "Elementos".

A proposição II do livro II de Euclides

No livro II, de Euclides, encontramos quatorze proposições e a proposição II estabelece a identidade $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. O 2º lado da identidade, isto é, o desenvolvimento do binômio, os coeficientes têm significado para a análise combinatória. Esse fato retrata a ocorrência de um dos primeiros problemas associado à análise combinatória. A obra de Euclides foi a que mais influenciou no pensamento científico.

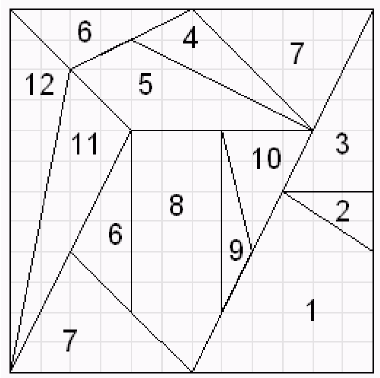
Arquimedes de Siracusa

Arquimedes, o maior matemático da antiguidade, está entre os três maiores matemáticos de todos os tempos, junto com Newton e Gauss. Nasceu na cidade grega de Siracusa (ilha da Sicília) em torno de 287 a.C. e morreu em 212 a.C. Suas contribuições não se restringe somente à matemática, mas contribuiu para as ciências como um todo.

O Stomachion

Em documentos publicados por Arquimedes, que chegaram até nós, encontramos o Stomachion (o significado da palavra em grego é o mesma para estômago), que a princípio parecia somente um jogo de quebra-cabeça, de catorze peças planas (originalmente em marfim) que formavam um quadrado, depois de encaixadas, semelhante a um tangram. Essas quatorze partes da Figura 1 constituem o Stomachion.

Figura 1: O Stomachion



Fonte: <htt://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/probegio/gamemath/Stomachion Stomachion.htm>. Acesso 17/11/2014.

O historiador de matemática, Reviel Netz, vinculado à Universidade de Stanford, Califórnia, interpretou o Stomachion como um objeto elaborado por Arquimedes com fins combinatórios. De acordo com Netz, a intenção de Arquimedes era saber de quantas formas diferentes poderiam ser encaixadas as catorze peças para a formação de um quadrado. A solução desse problema dá 17152 modos ou, não. Considerando as soluções obtidas por reflexões, rotações e simetria, 268. Este número só foi encontrado em 2003, com o uso da informática, por matemáticos e estatísticos, mas ninguém sabe se Arquimedes conseguiu esse resultado. O que nos parece é que ele se dedicou por muito tempo na análise do Stomachion. A importância do fato é que ele revela um dos documentos mais antigos a respeito do raciocínio combinatório.

Os chineses

As civilizações da China são, provavelmente, mais antigas do que as do Egito e Mesopotâmia. Seu desenvolvimento se deu às margens dos rios Yang-Tze e Howang Ho (ou Amarelo). A criação de animais não se desenvolveu tanto quanto a sua agricultura e era governada pelos imperadores fundadores de dinastias.

A matemática dessa época era bem desenvolvida, mas existe pouco material de natureza primária que veio até nós. Esse fato foi devido a qualidade dos matérias que usavam para escrever, como fibra de entre casca de árvores e bambus.

Os hindus também usavam esses materiais para suas escritas, que são bastante perecíveis e, além disso, em 213 a.C., o então imperador chinês, mandou queimar todos os livros. Mais tarde muitos livros foram reconstruídos de memória, pelos escribas reais, que tinham a função de registrarem fatos e feitos.

Diferente dos chineses e hindus, os mesopotâmicos e os egípcios escreviam seus feitos em materiais não perecíveis. Os mesopotâmicos registravam seus feitos em tábuas de argila cozida. Já os egípcios escreveram seus documentos em pedras ou papiros (uma espécie de papel).

Existe uma tradição que considera o início do império chinês em 2750 a.C., aproximadamente; por outro lado, outros avaliadores afirmam que as civilizações primitivas da China surgiram por volta do ano 1000 a.C. Além disso, existe uma dificuldade de datar os documentos matemáticos da antiguidade da China, devido ao fato de que cada obra construída envolver vários autores e em períodos distintos. As obras mais antigas de matemática na China nos trazem informações que podemos associar ao que chamamos hoje de análise combinatória.

Encontramos as seguintes informações sobre a China antiga:

- A criação de dois sistemas de numeração.
- Os mais antigos exemplo de quadrados mágicos.
- Cálculos de raízes quadradas e cúbicas.
- A mais antiga apresentação preservada do chamado triângulo aritmético de Pascal e a possibilidade do teorema do binômio já ser conhecido pelos chineses a bastante tempo.

Sistemas de numeração

Os chineses já apresentavam dois sistema de numeração, desde os tempos primitivos. O científico, também conhecido como sistema de numerais em barras que é essencialmente posicional e de base 10, que teve um caráter importante para a matemática chinesa antiga. Foi o sistema de numeração mais avançado do mundo do passado. Esse sistema é fundamentalmente posicional e de base dez, como mostra a Figura 2. No sistema de numerais em barras, aparecem as representações dos algarismos de 1 a 9. Respectivamente, quando figuram em posições ímpares, isto é, unidades simples, centenas, dezenas de milhar e assim por diante. Por outro lado, na Figura 3, aparecem as representações dos nove primeiros algarismos de 1 a 9, respectivamente, quando os algarismos aparecem em posições pares, isto é, dezenas, milhares, centenas de milhar e assim por diante. No lugar de zero era um espaço vazio, porém a partir da dinastia de Sung (960 – 1126), um círculo começou a ser usado como zero.

Figura 2: Dígitos de 1 a 9 quando aparecem em posições ímpares

Figura 3: Dígitos de 1 a 9 quando aparecem em posições pares

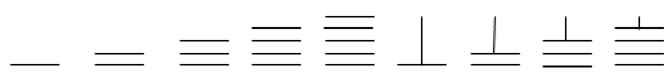
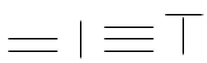


Figura 4: Representação do número 2136 em numeais em barras



No outro sistema de numeração, que poderíamos chamá-lo de sistema de agrupamentos multiplicativo, predominava o princípio multiplicativo. Esse sistema é caracterizado com símbolos distintos para os algarismos de um a nove e símbolos aditivos para as potências de dez. De forma que nas escritas os algarismos em posições ímpares, considerando-os da esquerda para à direita ou de baixo para cima, são multiplicados pelo sucessor.

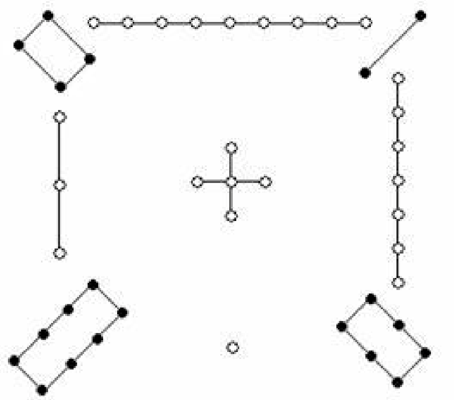
Para representar o número 87 532, nesse sistema escreve-se o símbolo de 10 000 antecedendo o algarismo para 8, em seguida o de 1 000 antecedendo o algarismo 7, o de 100 antecedendo o algarismo para 5, o de 10 antecedendo de 3 e, finalmente, o algarismo para 2. Destacamos que os múltiplos de 10, 100, 1 000 e 10 000 são figurados de acordo com o princípio multiplicativo. Assim, podemos dizer que o princípio multiplicativo era conhecido na China antiga; há quase 3 mil anos. Afirmar a data precisa não possível, ou seja, é conjectural, pois como já foi citado, datar os documentos da China desse tempo é complicado.

Os Chineses realizavam as operações aritméticas básica em tábuas de contar, ou melhor, os chamados suan pan, que nós conhecemos popularmente como ábaco chinês. O ábaco chinês era formado por contas móveis ao logo de varas ou arames paralelos e estabelecidos em tabuleiro.

Quadrados mágicos

Os quadrados mágicos mais antigos surgiram, provavelmente, na China. Qualquer abordagem matemática chinesa antiga não deixa de mencionar o quadrado mágico, chamado de Lo Shu. O I-King ou Livro das Permutações (1182-1135 a.C.) é um dos clássicos da matemática chinesa, nele aparece o exemplo mais antigo de quadrado mágico, como mostra a Figura 5. Conta a lenda que o imperador Yu, por volta de 2200 a. C., foi quem o viu, desenhado por meio de nós em cordas, nós pretos para números pares e nós brancos para os ímpares, na carapaça de uma tartaruga divina, às margens do rio Amarelo.

Figura 5: Quadrado mágico denominado de Lo Shu



Fonte: <mat.ufg.br.>mini>miriam.rosa.pdf>. Acesso 04/09/2015.

A representação do Lo Shu (quadrado mágico), a princípio, estava associada às nove salas do palácio Mítico de Ming Thang.

Veja outra representação simplificada para o quadrado mágico, na Figura 6, de ordem 3, numa notação numeral moderna.

Figura 6: Quadrado mágico 3×3

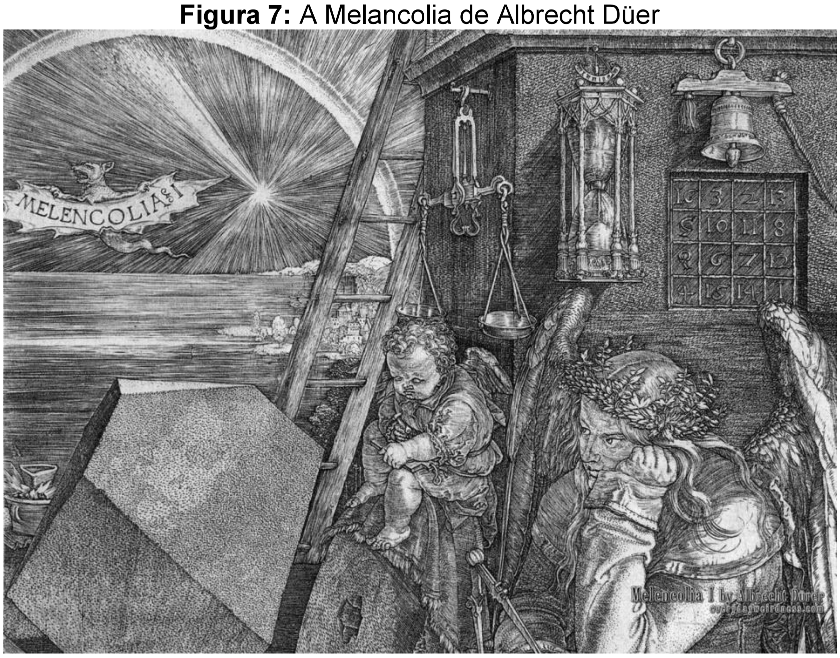
4	9	2
3	5	7
8	1	6

A Figura 6 é um arranjo quadrado de numerais, com 9 inteiros distintos, colocados de modo que os números de uma linha qualquer, de uma coluna qualquer ou de uma das diagonais possuem o mesmo valor, ou seja, a mesma soma ou constante mágica do quadrado, no caso a constante mágica do quadrado é 15. Quando fixamos condições para contagem dos arranjos, estamos considerando situações que estudamos em análise combinatória.

Os quadrados mágicos não ficaram limitados à China. Chegaram ao Japão, Oriente Médio, Índia. No séc. IX apareceu na Arábia, Índia séc. XI, ou antes, para os hebreus séc. XII, na Europa séc. XV, graças ao escritor bizantino Manuel Moschopoulos. Em muitas situações, os quadrados mágicos, ou arranjos quadrados de numerais, estavam associadas ao misticismo e em outras como passatempo. No séc. XIII, já eram conhecidas regras para as construções de quadrados mágicos de ordem ímpar. Em 1686, o estudo desses quadrados se estendeu para três dimensões. A partir do séc. XIX, surgiram aplicações desses quadrados em probabilidades e análise e, recentemente, aplicações no planejamento de experimento, com os quadrados greco-romanos.

Na Figura 7, aparece uma gravura de 1500, aproximadamente, e ao lado direito, na parte superior, um quadrado mágico.

Figura 7: A Melancolia de Albrecht Düer



Fonte: <htt://zelmar.blogspot.com.br/2011/08/e-uma-tristeza.html>. Acesso 17/11/2014

Cálculos de raízes quadradas e cúbicas

Num comentário do primeiro século ao “Chi-Chang Suan-Shu” ou “Nove capítulos sobre a arte matemática” (livro de matemática chinês, talvez o mais influente), podemos encontrar regras para obtenção de raízes quadradas e cúbicas.

Esclarecemos que a matemática da época não tinha a riqueza do simbolismo que temos hoje. Os problemas de matemática eram resolvidos por escritos e por meio de uso de regras, mas é lógico que os escritos matemáticos antigos, não diferem em sua essência ou conteúdo quando nós os abordamos hoje. O que muda é apenas a “roupagem moderna” de abordagem. Convém comentar que a matemática chinesa antiga, não tinha demonstrações no sentido grego.

É interessante saber que a extração de raízes era feita usando a extensão do binômio $(a+b)^n$, onde n é inteiro positivo, o que pode ser feito de muitas maneiras. Já tínhamos comentado que o binômio foi um dos primeiros problemas ligado à análise combinatória, porém suas aplicações não se restringem somente à combinatória.

Vamos ver, como exemplo, a extração da raiz quadrada de 38, por aproximação, fazendo uso da “roupagem moderna”.

Conhecida a identidade $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b(2a+b)$ e tomando-se $(a+b)^2 = 38$, temos que encontrar $a+b$. Daí: $38 = (a+b)^2 = a^2 + b(2a+b)$.

Para obtermos a, temos que encontrar o maior valor inteiro positivo de a, de forma que a^2 não supere 38. Logo, encontramos $a = 6$.

O próximo passo é achar b. Fazendo uma sequência de aproximação, começando com $b_0 = 0$, iremos obter, b_1, b_2, b_3, e assim por diante, até onde acharmos conveniente a aproximação.

Em $38 = a^2 + b_1(2a + b_0)$, fazendo $b_0 = 0$, vamos obter b_1.

$$b_1 = \frac{38-a^2}{2a+b_0} = \frac{38-6^2}{2\cdot 6+0} = 0{,}166666\ ,\ b_2 = \frac{38-a^2}{2a+b_1} = \frac{38-36}{12+0{,}166666} = 0{,}164383\ ,$$

$$b_3 = \frac{2}{12+0{,}164383} = 0{,}164414\ ,\ b_4 = \frac{2}{12+0{,}164414} = 0{,}164414\ .$$

Logo, a raiz quadrada de 38 é aproximadamente $6{,}164414$.

De modo semelhante podemos encontrar raízes cúbicas, quárticas, etc.

A extração de raízes, fazendo uso do binômio $(a+b)^n$ é uma das muitas aplicações dos binômios. Porém, as aplicações do binômio que tenham um significado combinatória que é o nosso maior interesse.

Triângulo aritmético e Teorema do binômio

O triângulo aritmético é uma tabela de números, vindos dos coeficientes do desenvolvimento dos binômios $(a+b)^0$, $(a+b)^1$, $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, $(a+b)^5$ e assim por diante, formando uma tabela numérica triangular, onde os coeficientes são dispostos, sucessivamente de cima para baixo, e ilimitado para baixo ou até a linha que desejarmos. A seguir temos a Figura 8 que representa o Triângulo aritmético.

Figura 8: Triângulo aritmético

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	e assim por diante

O triângulo aritmético recebe vários nomes de acordo com o lugar do mundo. Por exemplo, os franceses ou ocidentais chamam de triângulo de Pascal, na Itália de triângulo de Tartaglia, na China de Yang Hui e, ainda, além desses nomes, outras denominações aparecem como triângulo de Tartaglia-Pascal, triângulo aritmético de Pascal ou triângulo combinatório.

Regras de construção

- Toda linha começa e termina por 1.
- A soma de dois elementos consecutivos de uma linha é igual ao elemento localizado na linha seguinte, embaixo do segundo número somado (identidade combinatória).

Os coeficientes (ou também conhecidos como coeficientes binomiais) das expressões binomiais formam as linhas do triângulo de Pascal. Além disso, podemos extrair desse triângulo várias identidades, com diversas aplicações, entre elas muitas em matemática.

Um dos livros valioso da China datado entre 1261 e 1275, foi escrito por Yang Hui, que representa uma espécie de extensão dos Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática. Encontramos nele a mais antiga apresentação preservada do chamado triângulo aritmético de Pascal. Outro clássico chinês, escrito por Chu Shi-kié, em torno de 1303, contém uma aparição do triangulo aritmético, posterior a este e aponta a possibilidade do teorema do binômio já ter sido conhecido pelos chineses a um certo tempo. Pois Chu fala, no seu livro, como se o triângulo fosse conhecido bem antes do seu tempo.

Os hindus

Os indianos dos primeiros tempos, entre 3000 e 1500 a.C., habitavam na região do rio Indo, perto das margens do deserto de Thar. A Índia antiga era formada de grande número de pequenos principados desunidos. Pouco se sabe sobre a matemática desses antigos habitantes, devido à falta de documentos da época. Mas através de escavações arqueológicas de algumas de suas cidades, encontramos informações preciosas, principalmente nas cidades de Harapa e Mohenjo Daro. Com base nessas escavações temos provas de que foi uma civilização bem desenvolvida e isso aconteceu na época das construções das pirâmides egípcias. Em Mohenjo Daro foi encontrada redes de esgoto, piscinas públicas, entre outras construções. Já existia por lá, um sistema de contagem, pesos e medidas. Tudo isso revela a garantia de conhecimentos de matemática. Sofreram diversas invasões e foram exterminados, provavelmente pelos Arianos (bandos de nômades) por volta de 1500 a.C. Embora a matemática indiana tenha começado em torno de 3000 a.C., foi somente através da religião védica (donde vem o hinduísmo), entre 1500 a 600 a.C., que apareceu uma matemática geométrica, voltada para a construções de altares para seus deuses. Foi dessa religião que apareceram a resolução de problemas não triviais. Com o declínio da religião védica, surgiram duas outras protestantes dos sacrifícios cruentos dos rituais da primeira, o budismo e Jainísmo.

Os jainas

Os jainas passavam por longos treinamento e estudavam a **ganitanuyoga,** ou matemática, que fazia parte da vida religiosa que levavam.

A **vikalpa** (ou combinatória) foi um dos temas preferidos de estudo dos jainas. Devido ao fato deles terem uma concepção atomística do mundo físico, davam uma atenção especial à combinatória. O átomo, ou parmanu, era considerado indivisível e atemporal. Possuía cor, cheiro, gosto e textura, de modo que somente essas qualidades podiam ser mudadas. Os seus átomos dispõem de 5 tipos de cor, 2 cheiros distintos, 5 gostos possíveis e 8 tipos de textura.

Problema Combinatório

Quantas são as combinações de 2 que podem ser feitas com 3 sabores (gostos) distintos, doce, salgado e azedo?

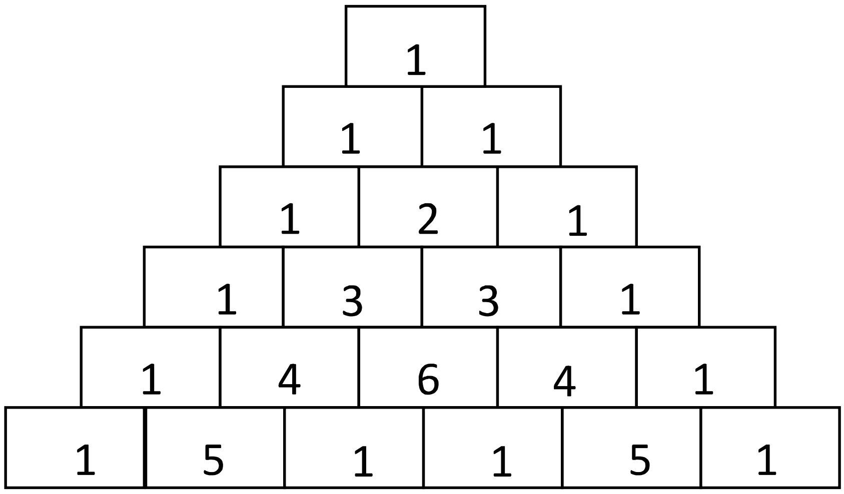
Já tínhamos falado acerca de materiais perecíveis usados nas escritas de algumas das antigas civilizações. No caso da Índia, eles escreviam além dos já citados, em folhas de palmeiras, por isso muitas obras da índia antiga não sobreviveu e das que sobreviveram, na maioria das vezes, não aparecem o nome do autor.

Na literatura jaina encontramos livros que têm combinatória e triângulo aritmético. Os livros Bhagabati Sutra (300 a.C.) e Sthananga Sutra (200 a.C.), ambos sem o nome do autor e tratam de combinatória, através de regras para o cálculo de combinações e arranjos. Mas também encontramos livros do janaísmo com nome do autor e assunto ligados à análise combinatória e o triângulo aritmético, como Chanda Sutra (200 d.C.) de autoria de Pingala, o Ganita Sara Samgraha (850 d.C.) de Mahavira e o Mritasanjivani (950 d.C.) de Halayudha. Nesse último, encontramos assuntos que já tinham sidos tratados por Pingala, como o denominado triângulo aritmético (ou meruprastara, em homenagem ao Monte Meru) e a regra de Pingala – regra usada para a construção de um triângulo aritmético - a 450 anos, depois de Pingala.

Regra de Pingala

A regra de Pingala para a construção o triângulo é assim descrita: Desenhe um quadradinho; abaixo dele desenhe dois outros, de maneira que se unam no ponto médio da base dele; abaixo desses dois, desenhe outros três e assim sucessivamente. A seguir, escreva 1 no primeiro quadradinho e nos da segunda linha. Na terceira linha escreva 1 nos quadradinhos dos extremos, e no meio escreva a soma dois dos números imediatamente acima deles (por exemplo, na quinta linha, temos: $4 = 1 + 3, 6 = 3 + 3, 4 = 3 + 1$), Figura 9. Prossiga fazendo o mesmo nas demais linhas até onde quiser.

Figura 9: Triângulo construído com a Regra de Pingala



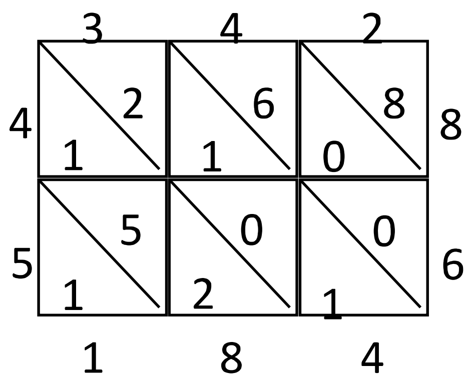
Sistema de numeração hindu

Encontramos a primeira referência específica a respeito dos números hindus, datando de 662, escrito pelo bispo sírio Severus Sebokt, admirador das descobertas astronômicas, dos métodos de cálculo e da computação dos hindus. Sebokt se irritava com aqueles que só faziam fé na cultura grega e menosprezavam as de outros povos.

O sistema de numeração hindu estava associado a três princípios básicos, ou seja, base decimal, uma notação posicional (ou relativa) e uma forma cifrada para cada um dos dez numerais. Esses princípios não são de origem hindu, porém a parte brilhante que cabe aos hindus foi a ideia de juntá-los pela primeira vez, para a formação de seu sistema de numeração e assim foi construído o moderno sistema de numeração.

A adição e a multiplicação dos hindus eram bem parecidas com as fazemos hoje. Para a multiplicação, eles usavam um esquema denominado de multiplicação em reticulado (ou em células, ou em gelosia, entre outros nomes). Um exemplo, para termos uma noção do que vem atrás disso. Queremos o produto 342 por 54. Considere a Figura 10:

Figura 10: Multiplicação em reticulado



- Acima do reticulado temos 342 que é o multiplicando
- A esquerda temos 54 o multiplicador
- Os produtos parciais ocupam as células quadradas

Exemplo: na linha 1 e coluna 1, encontramos 12, que vem da multiplicação de 4 por 3

- Os algarismos das diagonais são somados
- O produto final está abaixo e a direita do reticulado, ou seja, 18468

Aqui também podemos perceber o “nosso” princípio da multiplicação.

Bhaskara

Bhaskara Acharya viveu entre 1114 a 1185, na Índia, foi considerado o maior matemático de sua época. Trouxe também contribuições para a análise combinatória, em sua obra mais conhecida, denominada Lilavati (significa Graciosa). Nessa obra apareciam problemas semelhantes aos que aparecem em livros didáticos de hoje, sendo que esses problema eram criados com uma quantidade pequena de objetos (elementos). No trabalho de Bhascara, é relevante ressaltarmos que aparecia claramente a preocupação em diferenciar os agrupamentos em que a ordem dos elementos é importante (os arranjos) e agrupamentos em a ordem dos elementos não tem importância (as combinações). Pois os dias de hoje a análise combinatória considera a existência desses dois tipos de agrupamentos como fundamentais.

Texto 3: Acontecimentos e matemáticos europeus a partir do século XVII

O século XVII para a matemática é especial, mais conhecido como século do gênio. Várias contribuições para a matemática surgiram, assim como a invenção da geometria analítica, do cálculo, da teoria das probabilidades, e muitos novos campos de pesquisa em matemática apareceram. Embora ainda não existissem grupos de matemáticos organizados; a Itália, França e Inglaterra já contavam com grupos profissionais de matemáticos que se intercomunicavam. A manifestação súbita da matemática do século XVII foi devida, em grande parte, sem margem de dúvida, aos avanços sociais, políticos e econômicos vivenciados pela sociedade da época. Destacaremos neste texto os principais acontecimentos e matemáticos europeus que contribuíram, a partir desse século, para o desenvolvimento da análise combinatória, que aliás foi um século de grande desenvolvimento do nosso tema de estudo, devido seu entrosamento com a teoria das probabilidades.

Os jogos

As culturas primitivas, em sua maioria, praticavam atividades com algum tipo de dados. Em períodos bem remotos, encontra-se um jogo denominado astrágalo, que é o antecessor do atual dado (hexaedro regular). O astrágalo é um osso, ou melhor, um ossinho encontrado na pata traseira de certos animais, como o carneiro e a cabra. Possui quatro faces distinguíveis e quando lançado ao chão, repousa-se sobre uma das faces. Vários jogos eram realizados com astrágalos. Entre eles encontra-se um jogo bem comum que basta usar quatro peças e observar as faces que aparecem para cima. Depois de jogarem as peças em uma superfície plana; com valores atribuídos às combinações, normalmente as mais valiosas eram as que apresentavam mais faces distintas.

Entre os judeus o jogo era proibido e repreendido sob pena de morte. Por outro lado, em Roma e na Grécia o entusiasmo pelo jogo era tanto que houve necessidade de proibi-lo em certos períodos.

O jogo de cartas, denominado atualmente como baralho, pode ter surgido na China, Índia ou Egito. Mas nem todas as pessoas tinham acesso às cartas, devido a seu custo. Foi somente no século XV, a partir da invenção da imprensa, que este jogo passou a ser mais popular. Devemos salientar também que com a imprensa houve uma aceleração na divulgação dos novos conhecimentos.

Muito tempo se passou até haver uma associação dos jogos com a matemática. Tais práticas só passaram a ocorrer, de maneira mais formal (com um certo tratamento matemático) no séc. XVII, com o grande matemático Pascal e seus contemporâneos. Não se pode afirmar que antes do século XVII não houvesse algumas provas, mas a partir desse século tais práticas (ou tratamento matemático dado ao jogo) começaram a se intensificar entre matemáticos consagrados.

Figura 11: Blaise Pascal

Fonte: <https://bgstrialofgod.wordpress.com/blaise-pascal/ >. Acesso 17/11/2014

Probabilidades e Análise Combinatória

Um dos amigos de Pascal, Antoine Gombaud, o Chevalier de Méré (1607-1684), frequentador presente das mesas de jogo; enviou a ele alguns problemas sobre jogos, a fim de que fossem examinados por Pascal. Este teve muito interesse pelos problemas e resolveu também enviá-los ao amigo matemático Pierre de Fermat (1601-1665), para o estudo dos problemas. A partir daí, começou a se estabelecer trocas de correspondência entre esses matemáticos, e acredita-se que essas trocas contribuíram para a elaboração da teoria da probabilidade, o que hoje denominamos de probabilidades finitas.

Com a necessidade de determinar o número de possibilidades existentes nos jogos, surge o desenvolvimento de novas técnicas de contagem, ou melhor, a análise combinatória. Esta começa a ter um tratamento matemático (ou formalizado), que até então não havia acontecido.

Este grande desenvolvimento da análise combinatória ocorreu devido aos problemas surgidos com os jogos de azar. Entre esses referidos jogos, encontram-se os jogos de cartas, dados e moedas. A teoria das probabilidades foi um ponto fundamental para o aparecimento de novas técnicas de contagem em análise combinatória.

Embora, a princípio, os matemáticos desse tempo não estivessem atraídos por estes novos assuntos (a teoria das probabilidades e a análise combinatória), porque a atenção da maioria deles estava voltada à criação do cálculo, assunto de grande aplicabilidade, em que Newton e Leibnitz são considerados os pais. Por outro lado e de modo natural, a teoria das probabilidades continuou seu desenvolvimento devido às várias aplicações que surgiam, como por exemplo, estudar situações como taxas de mortalidade, prêmios de seguros e muito mais.

A palavra "azar"

Dentro do nosso contexto a palavra "azar" não tem o significado comum dado de "má sorte" e sim como sinônimo de "acaso". Que por sua vez fica entendido como conjunto de forças, não determinadas ou controladas, normalmente, que influenciam no resultado de um experimento ou fenômeno. Como, por exemplo, o lançamento de uma moeda, pode ocorrer cara ou coroa, de modo que se tentarmos repetir o experimento, em condições análogas à primeira, o resultado pode ser diferente. Em outras palavras, somente depois de sua realização podemos saber o resultado fiel do experimento. A ideia de acaso para os povos antigos, estava ligada às intervenções divinas ou sobrenaturais. Se um dado lançado caiu desse modo, assim foi a vontade de Deus ou dos deuses.

Girolamo Cardano

Girolamo (Jerônimo) Cardano (1501-1576) nasceu em Pávia, Itália. Era médico por profissão, dedicou-se à matemática, deixou vários livros escritos; entre eles o De Ludo Aleae (Sobre os jogos de azar), publicado em1663. O livro expõe conselhos sobre os jogos, ou um manual do jogador, e as primeiras noções sobre probabilidades.

Pascal e contemporâneos

Blaise Pascal (1623-1662), filho do matemático Ètienne Pascal (1588-1640), nasceu na província francesa de Auvergne e desde novo revelava-se habilidoso para a matemática. Embora, por ordem de seu pai, a educação inicial estava limitada ao estudo de línguas, no intervalo do recreio e de modo oculto, por sua própria vontade, em poucas semanas, Pascal estudou geometria e descobriu diversas das propriedades das figuras geométricas. O pai de Pascal ficou tão feliz com a nova atividade do filho que lhe deu de presente um exemplar dos Elementos de Euclides. Aos quatorze anos, Pascal já participava de reuniões informais da Academia de Mersenne em Paris.

Os resultados das correspondências entre Pascal e Fermat, causadas por De Méré, não foram publicadas por eles. Porém, em 1657, o matemático holandes Chistiaan Huygens (1629-1695), com base nas correspondências entre os franceses, publicou um pequeno folheto, intitulado "De Ratiociniis in Ludo Aleae" (ou Sobre o Raciocínio em Jogos de dados). Enquanto isso acontecia, Pascal realizava uma ligação do estudo das probabilidades com o triângulo aritmético em 1653.

O traiaté du triangle arihmétique de Pascal já existia antes de Pascal. Os hindus em 200 a.C., os chineses em torno de 1250 e muitas outras pessoas de nacionalidades distintas o conheciam antes de Pascal. Mas foi Pascal que estudou as diversas relações que envolviam os números do triângulo e muitas destas relações foram desenvolvidas por ele.

A construção do triângulo aritmético no tempo de Pascal (veja Figura 14) é diferente da que usamos hoje.

Figura 12: Traiaté du triangle arihmétique de Pascal

$$\begin{array}{llllll} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & \\ 1 & 3 & 6 & \cdots & & \\ 1 & 4 & \cdots & & & \\ 1 & \cdots & & & & \\ \cdots & & & & & \end{array}$$

Uma de suas propriedades é: que a partir da segunda linha, qualquer elemento é dado pela soma dos elementos da linha anterior, situado acima dele ou à esquerda. Como exemplo, $6 = 3 + 2 + 1, 4 = 3 + 1$.

Pascal ficou conhecido no mundo ocidental por causa do desenvolvimento e aplicações que realizou com as propriedades do triângulo. Por isso o triângulo recebeu o nome no ocidente de triângulo de Pascal. Uma das primeiras aparições do princípio de indução matemática é encontrado no tratado de Pascal sobre o triângulo.

Uma das aplicações realizada por Pascal foi a determinação dos coeficientes binomiais da expressão de $(x + y)^n$.

Pascal para resolver problemas de probabilidade, que eram necessários para obter o número de combinações de n elementos tomados p de cada vez (ou p a p), ele expressava verbalmente e, corretamente afirmava como obter. Fazendo uso do simbolismo moderno. Pascal afirmava que:

$$\frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Salientamos que o simbolismo algébrico teve avanços no século XVII, porém neste quesito Pascal estava atrasado no seu tempo.

O símbolo $n!$

O símbolo $n!$ (leia: fatorial de n), foi introduzido pela primeira vez em 1808, pelo professor Chistian Kramp (1760-1820) de Estrasburgo, França, cuja intenção era simplificar a escrita.

Jaques Bernoulli

Jaques Bernoulli (1654-1705) conhecido também por James (forma aglicizada) ou Jakob (em alemão) nasceu e morreu na Basiléia, Suíça. Pertenceu a família Bernoulli que mais produziu matemáticos de renomes na história. Os matemáticos Bernoullis juntos com Leibniz, deixaram contribuições escritas, principalmente, em artigos e em revistas.

O mais antigo documento substancial sobre a teoria das probabilidades é o Ars Conjectadi (ou Arte de conjecturar), um clássico, escrito por Jaques Bernoulli e publicado em 1713. Essa obra está dividida em quatro partes, a primeira parte contém o trabalho de Huygens, ou seja, De ludo aleae, com comentários de Bernoulli, na segundo parte encontramos uma teoria geral de permutações e combinações, com a utilização do teorema binomial e multinomial, além da primeira prova adequada do teorema binomial para potências inteiras positivas e essa prova foi dada por indução matemática. As outras duas últimas partes, são dedicadas a resolução de problemas de probabilidades.

Gottfried Wilhelm Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nasceu em Leipzig, Alemanha. Estudou direito, teologia, filosofia e matemática na universidade. Como já foi citado, um dos criadores do cálculo. Começou a desenvolver a *characterisca generalis*, ou seja, concepção de uma matemática universal.

A contribuição de Leibniz para a Análise Combinatória foi devido a generalização do teorema binomial para o teorema multinomial, que consiste em realizar a expansão de

$$(x + y + \cdots + z)^n$$

Pierre Simon de Laplace

Pierre Simon de Laplace (1749-1827), de origem humilde, protestante, com trabalhos importantes realizado em astronomia e matemática. Foi um dos principais matemáticos da Revolução Francesa. Desempenhou em papel modesto no Comitê de Pesos e Medidas. Laplace se dedicou a teoria das probabilidades mais que qualquer outro. Escreveu diversos artigos sobre probabilidades, de modo que esses resultados foram anexados no clássico Théorie Analytique dês Probabilités em 1812. O clássico considera todos os aspectos e todos os níveis da teoria.

Em relação a teoria das probabilidades, certa vez Laplace se pronunciou:

"É notável que uma ciência que começou com considerações sobre jogos de azar se tivesse elevado ao nível dos mais importantes assunto do saber humano".

Abraham De Moivre

Abraham De Moivre (1667-1754), um francês Huguenote, que foi para a Inglaterra, depois da revogação do Édito de Nantes em 1685. Ganhava a vida na Inglaterra como professor particular de matemática.

Muitos matemáticos tiveram interesse pela teoria das probabilidades no início do século dezoito; entre eles De Moivre, que publicou a "*Doctrine of Chances*" (Doutrina do acaso), que continha questões sobre dados, o problema de pontos, retiradas de bolas de cores distintas de um saco, entre outros jogos. Desses problemas, alguns já tinham surgidos em *Ars conjectandi*, de Jacques Bernoulli; a obra continham também muita coisa sobre a teoria das probabilidades. É interessante dizer que à publicação de De Moivre, de modo geral, obtinha resultados da teoria das permutações e combinações usando os princípios de probabilidades. Porém hoje fazemos o contrário.

Em seguida, descrevemos um exemplo como isso acontecia.

Achar o número de arranjos de duas letras escolhidas entre as letras u, v, x, z, w.

Probabilidade de escolher uma letra particular é: $\frac{1}{5}$

Probabilidade de escolher outra letra específica ser a segunda: $\frac{1}{4}$

Daí, a probabilidade de aparecerem essas duas letras nessa ordem é: $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

De onde se conclui que o número de arranjos possíveis, duas a duas, é 20.

Em 1730, De Moivre publicou um outro volume intitulado *Micellanea Analytica*, com contribuições à probabilidades e também pela cooperação com o desenvolvimento do lado analítico da trigonometria. De Moivre só não superou Laplace em suas contribuições à teoria das probabilidades.

Diante do exposto, afirmamos que a análise combinatória não é uma matemática pronta e acabada, muito pelo contrário. Renova-se com amplas e diversificadas técnicas de contagem, além de um número cada vez maior de aplicações, algumas apresentadas neste trabalho. Podemos considerar aplicações na formação de senhas, em química, física, biologia, economia, ciências sociais, na confecção de um retrato falado, nas loterias federais e muitas outras. Devemos tudo isso à criação humana, pois ao longo da História, muitos homens das Ciências ou não, colaboraram para alcançar o patamar de desenvolvimento que temos hoje.

APÊNDICE 2: QUESTÕES DA 1ª AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA

1) Resolva a equação $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 20.$

2) Quantos números de telefones de seis algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 2. 3, 4, 5, 6 e 7, de modo que os três primeiros algarismos sejam distintos?

3) Uma prova é construída por dez testes do tipo “verdadeiro ou falso”. De quantas maneiras diferentes um candidato poderá responder aos dez testes, não deixando nenhuma sem respostas e assinalando apenas uma alternativa em cada um?

4) Quantos números naturais maiores do que 400 e de três algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 4, 5 e 6?

5) Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números naturais de quatro algarismos distintos podem ser formados de modo que o algarismo das unidades seja par ou o algarismo dos milhares seja ímpar?

6) Quantos divisores naturais possui o número 216?

7) “Uma função $f : A \to B$ é injetora se, e somente se, elementos distintos de A tiverem imagens distintas em B, através de f.” Determine o número de funções injetora com domínio $A = \{1, 2, 3\}$ e contradomínio $B = \{a, b, c, d, e, f\}$.

8) Escrevendo em ordem crescente todos os números naturais de cinco algarismos distintos formados por 1, 2, 3, 6 e 8, qual será a ordem (número de posição) do número 36812?

9) A diretoria de uma firma é formada por sete diretores brasileiros e quatro japoneses. Quantas comissões de três brasileiros e três japoneses podem ser formadas?

10) O rei Dário da Babilônia dividiu o país em províncias e escolheu homens igualmente preparados para serem autoridades. Para a última província o rei tinha a sua disposição dez homens, dentre eles Ciro, a quem o rei já tinha determinado que seria um dos ministro da província. O rei precisava de um para o cargo de governador, seis para ministro e três para prefeito. De quantas maneiras o rei pode formar essa equipe de autoridade?

APÊNDICE 3: QUESTÕES DA 2ª AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA

1) Resolva a equação $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} = 12.$

2) Quantos números de três algarismos podemos formar com os cinco primeiros números naturais diferentes de zero?

3) Uma placa de automóvel é formada por três letras seguidas de quatro algarismos. Quantas placas podem ser formadas com pelo menos um algarismo não-nulo, dispondo-se das 26 letras do alfabeto e dos dez algarismos do sistema decimal?

4) Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 são formados números de 4 algarismos distintos. Dentre eles, quantos são divisíveis por 5?

5) Quantas matrizes quadradas de ordem 3 podemos formar usando os números 1, 2, 3, cada um uma vez, e 6 zeros?

6) Quantos números ímpares com 4 algarismos distintos podemos formar com os 10 primeiros números naturais?

7) Um examinador dispõe de 6 questões de Álgebra e 4 de Geometria para montar uma prova de 4 questões. Quantas provas diferentes ele pode montar usando 2 questões de Álgebra e 2 de Geometria?

8) Determine o número de anagramas da palavra BATATA que começam pela letra A.

9) Uma empresa tem 3 diretores e 5 gerentes. Quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas contendo no mínimo 1 diretor?

10) Um bar vende 3 tipos de refrigerantes: GUARANÁ, SODA E TÔNICA. De quantas formas uma pessoa pode comprar 5 garrafas de refrigerantes?

APÊNDICE 4: QUESTIONÁRIO

Universidade do Grande Rio – UNIGRANRIO
Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências
Mestrado Profissional de Ensino das Ciência na Educação Básica

Pesquisador: Antonio Carlos Bastos

Caro aluno (a), este questionário faz parte da pesquisa intitulada: "O Ensino da Análise Combinatória a Partir de uma Abordagem Histórica e Resolução de Problemas". Você é convidado a responder os itens abaixo, lembramos que sua participação é voluntária. Caso concorde, devemos frisar que, em nenhum momento seu nome constará na pesquisa. Desde já nosso sincero agradecimento.

1) Você achou que a História da Matemática trouxe motivação para a aprendizagem?
( ) sim ( )não
Por quê? ____

2) Você percebeu alguma relação do desenvolvimento do tema abordado (Combinatória) com outros campos do saber humano? (necessidades práticas, sociais, econômicas ou físicas)
( ) sim ( )não
Por quê? ____

3) A História foi um importante meio ou interessante para as aulas da Análise Combinatória?
( ) sim ( ) não
Por quê? ____

4) Você achou que os problemas ajudaram para uma compreensão melhor da Combinatória?
( ) sim ( ) não
Por quê? ____

5) A História integrada com a Resolução de Problemas contribui para o ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória?
( ) sim ( ) não
Por quê? ____

ANEXO 1: APROVAÇÃO DO COMITÊ DE ÉTICA

UNIVERSIDADE
UNIGRANRIO
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA

Duque de Caxias 26 de Setembro de 2014.

Do: Comitê de Ética em Pesquisa da UNIGRANRIO

Para Responsável Principal: Antonio Carlos Bastos

Para Orientadora: Profa. Dra. Eline das Flores Victer

Para Co-orientadora: Profa. Dra. Jurema Rosa Lopes

O Comitê de Ética em Pesquisa da UNIGRANRIO, após avaliação considerou **aprovado** o projeto de pesquisa **"O ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA SOB UMA ABORDAGEM HISTÓRICA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS"**, protocolado sob o **número de CAEE 35562614.5.0000.5283,** encontrando-se a referida pesquisa e o Termo de consentimento Livre e Esclarecido em conformidade com a Resolução N.º466, de 12 de Dezembro de 2012, do Conselho Nacional de Saúde, sobre pesquisa envolvendo seres humanos.

Os pesquisadores deverão informar ao Comitê de Ética qualquer acontecimento ocorrido no decorrer da pesquisa.

O Comitê de Ética em Pesquisa solicita a V. Sª., que ao término da pesquisa, conforme cronograma apresentado, encaminhe a este comitê um sumário dos resultados do projeto, a fim de que seja expedido o certificado de aprovação final.

Renato C. Zambrotti

Profº Renato C. Zambrotti
Coordenador do CEP-UNIGRANRIO

Andreia Peter C. Gomes

Andréia Peter Christo Gomes
Secretária do CEP/UNIGRANRIO

CEP/UNIGRANRIO – COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA da UNIGRANRIO
Rua Prof. José de Souza Herdy, 1160 – 25 de Agosto – Duque de Caxias – CEP: 25071-202
Tel.: 21 2672-7733 – E-mail: cep@unigranrio.com.br